

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**Confronto tra il metodo dell'equazione di  
Riccati e quello della trasformata di Fourier  
frazionaria nello studio di reticoli di Bragg in  
fibre ottiche**

RELATORE

Prof. Renato Spigler

LAUREANDA

Laura D'Andrea

ANNO ACCADEMICO: 2009-2010

Febbraio 2011

AMS classification: 94A12, 78-XX, 42A38, 65T50.

Keywords: fiber Bragg gratings, fractional Fourier transform, Riccati equation, FFT



## 1. Introduzione

Lo studio teorico e lo sviluppo tecnologico di guide d'onda dielettriche hanno permesso negli ultimi decenni di realizzare dispositivi per telecomunicazioni con caratteristiche inimmaginabili fino a poco tempo prima. In modo particolare l'individuazione delle grandi prestazioni fornite dalle *fibre ottiche* ha suscitato un crescente interesse scientifico sui dispositivi ottici che è sfociato in un impressionante susseguirsi di scoperte ed innovazioni. I bassi costi di produzione e la duttilità di tali apparecchiature hanno facilitato gli scambi di informazioni, rendendoli sempre più rapidi e sicuri.

Un esempio eclatante e di continuo interesse sono i filtri ottici basati sulla teoria dei reticoli di Bragg. Essi sono strutture caratterizzate dalla presenza di perturbazioni periodiche dell'indice di rifrazione all'interno di una semplice fibra ottica. Questo porta ad una modifica sostanziale del campo elettromagnetico all'interno della fibra e ad una conseguente riflessione totale o parziale di una banda di frequenze, centrata sulla cosiddetta frequenza di Bragg.

La natura ottica, l'elevata modellabilità e le potenzialità di compensazione hanno dunque permesso ai filtri ottici a reticoli di Bragg di conquistarsi un posto di rilievo nell'ingegneria dell'informazione, sia come filtri che come sensori. Per questi motivi, in questa Tesi si è scelto di impostare il confronto tra il metodo dell'equazione di Riccati e quello della trasformata frazionaria di Fourier (fFT) utilizzando filtri a reticoli di Bragg.

Per prima cosa si è dato spazio ad una presentazione teorica dell'argomento in questione, per consentire una trattazione uniforme e coerente. L'elemento portante di questa Tesi è il calcolo del coefficiente di riflessione per un reticolo di Bragg. Il calcolo di tale coefficiente verrà effettuato attraverso il metodo dell'equazione di Riccati e messo a confronto con quello della trasformata frazionaria di Fourier. Il risultato della risoluzione numerica dell'equazione di Riccati lo otteniamo col metodo di Runge-Kutta esplicito del quarto ordine. La trasformata di Fourier frazionaria che può essere calcolata analiticamente per certi speciali profili, la si può di calcolare numericamente mediante una trasformata di Fourier e quest'ultima mediante la FFT (Fast Fourier Transform). La trasformata di Fourier può essere implementata mediante un algoritmo chiamato FFT, il quale offre la possibilità di ridurre notevolmente la complessità computazionale. Esso è stato sviluppato negli anni '60, e grazie ad esso si ha una riduzione rilevante del numero di operazioni da compiere anche nel calcolo della trasformata frazionaria di Fourier. Esso fu scoperto da Gauss nel 1805 e ripreso da Cooley e Tukey nel 1965. La loro idea fu di semplificare opportunamente i calcoli decomponendo il problema, ovvero il calcolo della trasformata di Fourier discreta di lunghezza  $N$ , in sottopro-

lemi dello stesso tipo ma di dimensione non solo più piccola ma anche tale da consentire di eliminare buona parte di operazioni inutili e ridondanti. In altre parole, un algoritmo FFT implementa una metodologia di tipo *divide et impera*, applicandola più volte a ciascuno dei sottoproblemi così ottenuti, in modo da riorganizzare efficacemente le operazioni che coinvolgono gli esponenziali complessi.

Uno degli scopi di questa Tesi è valutare la differenza dei risultati di riflettività calcolati col metodo di Riccati e quello della trasformata frazionaria di Fourier e, prendendo nota delle CPU spese nei vari metodi, confrontare i tempi impiegati con metodi diversi per risolvere uno stesso dato caso.

Un confronto importante è quello degli errori commessi dai due metodi. In Riccati c'è solo l'errore numerico, mentre in fFT (sia nella formula esplicita che in quella numerica mediante la FFT) si fa anche l'approssimazione commessa trascurando il termine quadratico nell'equazione di Riccati.

I contributi "originali" di questa Tesi sono: i risultati ottenuti con l'equazione di Riccati e con la fFT (fatta analiticamente) e l'utilizzazione della FFT per calcolare numericamente la fFT. Questo libera dalla necessità di saper calcolare analiticamente quel certo integrale che è la fFT, il che era possibile solo in certi casi speciali.

Per brevità, in questo lavoro si sono usate delle sigle e per rendere più piacevole la lettura: con fFT si intende la trasformata frazionaria di Fourier calcolata analiticamente, mentre con FFT la trasformata frazionaria di Fourier calcolata numericamente con l'algoritmo veloce.

## 2. La Trasformata frazionaria di Fourier

La trasformata di Fourier frazionaria (fFT) è stata introdotta da Namias (1980) per risolvere problemi di Meccanica Quantistica, e successivamente rigorosamente sviluppata da McBryde e Kerr (1987). Numerose applicazioni sono state proposte da allora. Esistono varie versioni della fFT: qui si adotta la cosiddetta "chirped FFT". La trasformata di Fourier frazionaria di ordine  $a$  della funzione  $s(t)$  è quindi definita come

$$S_a(f) \equiv \mathcal{F}^\alpha[s(t)] = K_a e^{j\pi B_a f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j\pi B_a t^2} e^{-j2\pi C_a f t} dt \quad (1)$$

dove

$$C_a = \csc\left(\frac{\pi}{2}a\right), \quad B_a = \cot\left(\frac{\pi}{2}a\right), \quad (2)$$

$$K_a = \sqrt{1 - jB_a} = \left| \csc\left(\frac{\pi}{2}a\right) \right|^{1/2} e^{j\frac{\pi}{4}(a - \text{sgn}(\sin(\frac{\pi}{2}a)))} \quad (3)$$

Si vede subito che  $S_a(f)$  si riduce alla trasformata ordinaria di Fourier (FT), quando  $a = 1$ ,  $C_a K_a = 1$ ,  $B_a = 0$ . Se si pone  $a = -1$ , si ottiene la trasformata inversa. L'ulteriore grado di libertà di cui gode la fFT fornito dal parametro  $a$  può anche essere sfruttato in alcuni problemi. Tra le altre cose, si è osservato che la fFT può essere utilizzata per risolvere i problemi di diffrazione.

### 3. Equazione di Riccati

Un reticolo di Bragg a fibra ottica<sup>1</sup> è una struttura con una perturbazione periodica dell'indice di rifrazione lungo la fibra, creata dalla manipolazione del nucleo tramite moderne tecniche di struttura. La formazione di un reticolo permanente in una fibra ottica fu realizzata per la prima volta da K. Hill nel 1978 alla Canadian Communication Research Center. Da allora le innovazioni sono state numerose, e in campo teorico ed applicativo questo metodo resta tuttora estremamente vasto ed attraente.

Le caratteristiche vincenti di questi dispositivi, che ne determinano l'utilizzo sempre più frequente, sono da ricercare nella struttura geometrica favorevole nell'eliminazione del segnale di ritorno e nei costi potenzialmente bassi.

Si pone un profilo graduale dell'indice di rifrazione pari a

$$\gamma(z) = g(z) \operatorname{rect}\left(\frac{z}{L}\right) \quad (4)$$

dove  $g(z)$  è definita su tutto l'asse  $z$ ,  $L$  è la lunghezza del reticolo, e  $\operatorname{rect}$  è la funzione rettangolo, definita da

$$\operatorname{rect}\left(\frac{z}{L}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5)$$

In questo modo che il filtro sarà collocato in  $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$ .

Chiarita la struttura di un reticolo di Bragg, è possibile investigarne le ripercussioni fisiche. Questa struttura, come già accennato in precedenza, è assimilabile ad un filtro: la periodicità delle perturbazioni del reticolo fanno in modo che solo una banda di frequenza contenuta nello spettro del campo incidente la struttura venga riflessa da scattering successivi e coerenti.

Per arrivare ad ottenere l'equazione di Riccati ci serviamo della teoria dei modi accoppiati, la quale è una delle poche tecniche che consente di ottenere

---

<sup>1</sup>Nella letteratura specializzata si trova anchr la sigla FBG, acronimo dell'inglese Fiber Bragg Gratings.

delle equazioni che legano tra loro le grandezze fisiche di interesse, permettendone un'analisi qualitativa e quantitativa. la teoria dei modi accoppiati è argomento di continui studi per le sue numerose possibilità di utilizzazione sul piano sia teorico che applicativo.

In questa teoria si prendono in considerazione *lievi scostamenti* dal caso ideale il che porta ad equazioni in forma chiusa ed esatta. Ciò permette di utilizzare i risultati delle teorie già esistenti pur rilassando le stringenti ipotesi nelle quali sono state ottenute. Più concretamente, possiamo assumere che in un reticolo di Bragg la variazione dell'indice di rifrazione sia una debole perturbazione della struttura ideale. La teoria dei modi accoppiati permette dunque di assumere che il campo elettromagnetico all'interno di questa struttura sia sostanzialmente dato dalla sovrapposizione *lineare* di due soli modi principali, uno incidente la struttura concordemente al sistema di riferimento utilizzato, il secondo con direzione opposta, uscente dal reticolo. E' questo un esempio di accoppiamento controdirezionale.

Siano  $E_1$  e  $E_2$  le ampiezze complesse dei modi che si propagano lungo  $+z$  e  $-z$  rispettivamente.

Risulta di immediata utilità la creazione di una variabile ausiliaria  $\xi(\omega)$ , definita come la deviazione della costante di propagazione  $\beta$  della guida imperturbata dal valore  $k_0 = \frac{\pi}{\Lambda}$  alla frequenza  $\omega$

$$\xi(\omega) = \beta(\omega) - k_0 = 2\pi n_{eff} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_B} \right) = -\frac{\pi}{\Lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

dove  $k_0$  è il numero d'onda,  $\Lambda$  è il periodo centrale del reticolo,  $n_{eff}$  è l'indice di rifrazione equivalente del modo,  $\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda$  è detta lunghezza d'onda di Bragg e  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_B$ .

Nel caso di un reticolo di Bragg, si trova che le equazioni dei modi accoppiati che descrivono l'interazione tra la ampiezze sono

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1(z, \xi)}{\partial z} = -j\xi E_1(z, \xi) + q(z)E_2(z, \xi) \\ \frac{\partial E_2(z, \xi)}{\partial z} = -j\xi E_2(z, \xi) + q^*(z)E_1(z, \xi) \end{cases} \quad (6)$$

dove  $q(z)$  è il *coefficiente di accoppiamento* tra i modi che risulta essere

$$q(z) = k\gamma(z)e^{-j\phi(z)} \quad (7)$$

Si dimostra che  $k$ , fattore determinato dalle caratteristiche della guida imperturbata e dalla lunghezza d'onda, risulta essere costante.

La (6) è un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari dove le due ampiezze complesse risultano essere accoppiate, e la cui risoluzione appesantirebbe notevolmente la discussione. Si è interessati alle priorità di riflessione

del reticolo. Per poterlo poi utilizzare come filtro, risulta dunque conveniente introdurre un parametro per questa caratteristica, cioè il coefficiente di riflessione  $r$ ,

$$r(z, \xi) := \frac{E_1(z, \xi)}{E_2(z, \xi)} \quad (8)$$

Sostituendo nelle (6) si ottiene che  $r$  deve soddisfare all'equazione di Riccati,

$$\frac{\partial r(z, \xi)}{\partial z} = -2j\xi r(z, \xi) + q(z) - q^*(z)r^2(z, \xi) \quad (9)$$

La (9) è un'equazione ben nota in letteratura, e questa formalmente risulta più conveniente lettura alla (6) anche se è un'equazione non lineare, perchè alla (9) si associa un ordine irrea. Il miglioramento non è evidente, dato che esistono soluzioni esatte della (9), solo in casi particolari, e comunque, non sufficientemente generali.

#### 4. Analisi di base

Come si è anticipato, l'elemento portante di questa tesi è il calcolo del coefficiente di riflessione complesso. Trascurando il termine quadratico all'equazione di Riccati (9) si ha

$$r(\xi) = r\left(-\frac{\pi}{\Lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} k\gamma(z) e^{j\left(-\frac{2\pi}{\Lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} z + \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{C}{\Lambda} z^2\right)} dz \quad (10)$$

Questo integrale esprime il coefficiente di riflessione da un reticolo di Bragg (FBG) a passo linearmente variabile nella direzione di propagazione  $z$  con profilo graduale. Il grado di arbitrarietà del profilo scelto è tale da permettere una modellizzazione su una vasta serie di parametri caratterizzanti il reticolo, in modo da raggiungere i requisiti richiesti nella progettazione del filtro in esame. Tali parametri sono:

- il parametro  $k$ , che misura linearmente il salto d'indice  $A$ ;
- il profilo graduale dell'indice di rifrazione lungo  $z$ ,  $\gamma(z)$ ;
- il periodo centrale del reticolo  $\Lambda$ , legato a  $\lambda_B$  e  $n_{eff}$  (tramite la condizione di Bragg  $\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda$ );
- il coefficiente di chirp  $C$ .

Il calcolo dell'integrale (10) può essere eseguito analiticamente in alcuni casi oppure per via numerica da un elaboratore. L'indice di rifrazione si presume abbia la forma

$$n(z) = n_0 + \Delta n(z), \quad \Delta n(z) = A\gamma(z) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z + \phi(z)\right), \quad (11)$$

dove  $A = k\lambda_B/\pi$  è il salto d'indice, e la variazione del periodo del reticolo (*chirp*) è

$$\phi(z) = -\frac{2\pi}{\Lambda^2}Cz^2, \quad (12)$$

con  $C = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\Lambda}{L}$  detto coefficiente di chirp. I FBG si assume che si trovino nell'intervallo  $[-L/2, L/2]$  dell'asse  $z$ . Esprimiamo  $r$  come trasformata frazionaria di Fourier, usando (1) - (2). Otteniamo

$$r(\xi) = -k\frac{\Lambda}{\sqrt{2C'}}\sqrt{\cos\alpha}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\alpha}{2}}e^{-j\pi\cot(\alpha)\left(\frac{\xi}{A_2}\right)^2}\mathcal{F}^\alpha\left[\text{rect}\left(\frac{z}{2D'}\right)\right]\left(\frac{\xi}{A_2}\right) \quad (13)$$

dove  $C' = -C$ ,  $\alpha = \pi a/2$  e

$$A_1 = \frac{\Lambda}{\sqrt{2C'|\tan\alpha|}}, \quad A_2 = \frac{\pi\sqrt{2C'}}{\Lambda\sqrt{|\sin\alpha|\cos\alpha}} \quad (14)$$

Per essere valide, le (6) e (7) devono essere soggette alla condizione  $\pi/2 < \alpha < 0$  (cioè,  $-1 < a < 0$ ).

D'altra parte, come vedremo, per un gran numero di profili  $\gamma(z)$  di interesse pratico, le fFT sono facili da calcolare analiticamente, avendo le loro espressioni generali a portata di mano. Questo rende veloce ed efficiente la valutazione di  $r(\xi)$  quando i parametri FBG sono specificati. Nella prossima sezione si fornisce una serie di esempi, caratterizzati da funzioni  $\gamma(z)$  di vario tipo. I simboli sono stati definiti all'inizio di questa sezione; sia  $W$  la larghezza a mezzo massimo (FWHM). I valori dei parametri, dei risultati numerici presentati, sono i seguenti:  $A = 3 \times 10^{-5}$ ,  $C = -24 \times 10^{-10}$ ,  $\lambda_B = 1.552\mu m$ ,  $L = 7cm$  e  $n_{eff} = 1.4486$ .

**Esempio 1.** Cominciamo con il profilo più semplice, e cioè quello a salto d'indice *costante*, vale a dire

$$g(z) = 1, \quad \gamma(z) = \text{rect}\left(\frac{z}{L}\right) \quad (15)$$

Dobbiamo valutare la fFT di  $\gamma(A_1z) \equiv \text{rect}(z/2D')$ , dove abbiamo stabilito  $D' = S/A_1$ ,  $D = L/2$ . Ricordando (13) e (2), otteniamo

$$\mathcal{F}^\alpha\left[\text{rect}\left(\frac{z}{2D'}\right)\right](x) = (1+j)\frac{K_a}{2\sqrt{2B_a}}e^{-j\pi x^2/B_a}(\text{Erf}(x_+) - \text{Erf}(x_-)) \quad (16)$$

dove  $\text{Erf}(x)$  denota la funzione errore e

$$x_\pm = (1-j)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\pm\sqrt{B_aD'} - \frac{C_a}{\sqrt{B_a}}x\right)$$



Dopo alcuni passaggi, si è finalmente in grado di fornire un'espressione compatta per il calcolo del coefficiente di riflessione:

$$r(\xi) = -k \frac{\Lambda}{\sqrt{2C'}} \sqrt{\cos \alpha} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\alpha}{2}} e^{-j\pi \cot(\alpha) \left(\frac{\xi}{A_2}\right)^2} \mathcal{F}^a \left[ \text{rect} \left( \frac{z}{2D'} \right) \right] \left( \frac{\xi}{A_2} \right) \quad (17)$$

Al fine di rendere il confronto in termini di precisione significativo quanto possibile, abbiamo anche risolto numericamente l'equazione Riccati, per la quale (10) rappresenta, una soluzione approssimata, dove è trascurato il termine non lineare. Nella Figg. 1, la riflettività calcolata con dell'equazione di

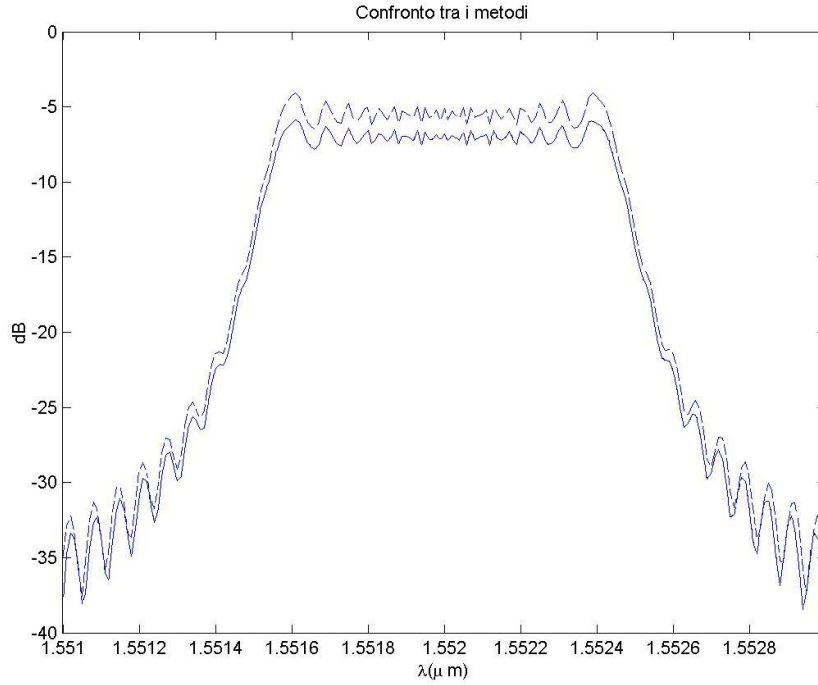


Figura 1: Confronto del calcolo del coefficiente di riflessione effettuato tramite la risoluzione numerica dell'equazione di Riccati ottenuta con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (linea continua) e la risoluzione analitica della trasformata frazionaria di Fourier (linea tratteggiata) per un reticolo a profilo a salto d'indice costante ( $L = 7 \text{ cm}$ ).

Riccati ottenuta col metodo Runge-Kutta esplicito del quarto ordine viene confrontata con quella valutata dalla fFT. L'errore massimo tra i due profili è circa  $2 \text{ dB}$ . Apparentemente, il calcolo fatto con la fFT fornisce una sottostima del risultato "vero" dato da Riccati (purchè il passo in Runge-Kutta sia

stato scelto sufficientemente piccolo). Questo è importante perchè significa che progettando un filtro utilizzando la fFT, si crede di avere una riflettività maggiore di quella che in realtà si ha poichè Riccati sta sotto. Tuttavia la forma del profilo spettrale è conservata con notevole precisione. Quando il filtro riflette con coefficiente di riflessione in modulo molto vicino a 1 (pur sempre  $< 1$ ), probabilmente minore di 0.98-0.99, ci si può aspettare che il metodo basato sull'equazione di Riccati dia una soluzione più corretta del metodo basato sulla fFT (calcolata analiticamente o anche mediante la FFT). Infatti, provando col primo metodo si ha solo l'errore numerico, mentre usando la fFT (sia con formule analitica che numericamente, cioè, mediante la FFT), si fa anche l'approssimazione che consiste nel trascurare il termine quadratico nell'equazione di Riccati. Questo è importante perché uno degli

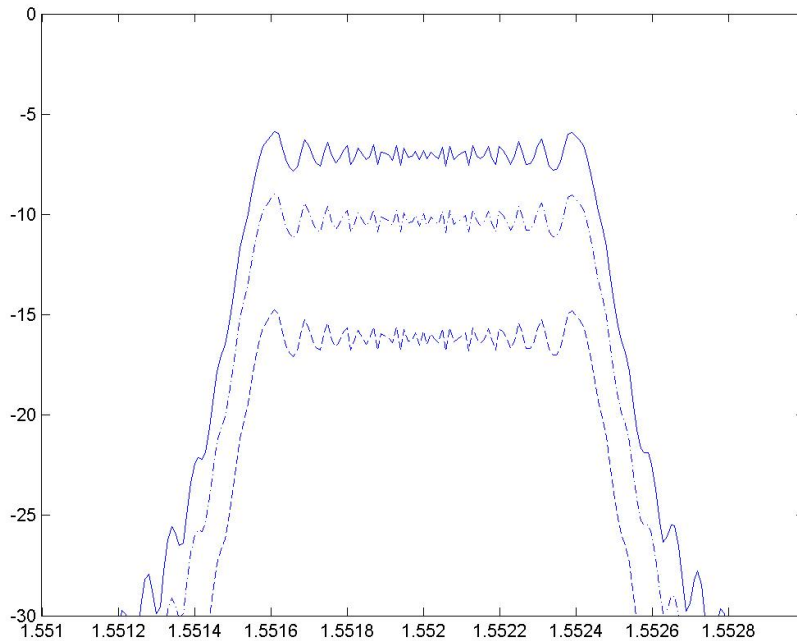


Figura 2: Esempi di riflettività calcolata col metodo basato sulla fFT per reticoli a passo variabile con profilo a salto d'indice costante, con vari valori del salto d'indice  $A$  ( $-A = 3 \times 10^{-5}$ ,  $\cdot - \cdot A = 2 \times 10^{-5}$ ,  $- - A = 10^{-5}$ ), con  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ . La lunghezza  $L$  del reticolo è  $7 \text{ cm}$ .

scopi di questa Tesi è valutare la differenza dei risultati di riflettività (cioè  $|r|$ ) calcolati col metodo di Riccati e con quello della trasformata frazionaria.

Prendendo nota delle CPU spese nei due metodi, si confrontano i tempi impiegati con metodi diversi per risolvere uno stesso dato caso.

Il tempo di CPU richiesto (su un PC standard) è stato di 19.90 s con Riccati, mentre la valutazione analitica della FFT ha richiesto solo 0.066 s.

Nella Figg. 2 sono riportate alcune riflettività per differenti specie di reticoli a salto d'indice costante. Si è voluto enfatizzare l'importanza, nel progetto del filtro, della scelta del salto d'indice di rifrazione,  $A$ , esaminando la sua influenza.

Un altro parametro importante è la lunghezza del filtro  $L$ . Si può notare che, così come nei reticoli uniformi a passo costante, anche in questo caso rimpicciolendo il reticolo si ottiene una maggior selettività in frequenza, cioè reticoli più corti sono più selettivi.

**Esempio 2.** Consideriamo il profilo *gaussiano*

$$g(z) = e^{-\frac{4\ln 2}{FWHM^2}z^2} \equiv e^{-\pi cz^2} \quad (18)$$

dove  $c = \frac{4\ln 2}{FWHM^2}$ . Il segnale da trasformare sarà allora

$$\gamma(z) = e^{-\pi cz^2} \text{rect}\left(\frac{z}{L}\right) \quad (19)$$

Si deve, quindi, calcolare la trasformata frazionaria della funzione

$$\gamma(zA_1) = e^{-\pi c(zA_1)^2} \text{rect}\left(\frac{zA_1}{L}\right) = e^{-\pi c'z^2} \text{rect}\left(\frac{z}{2D'}\right). \quad (20)$$

Per comodità si è posto  $D = L/2$ ,  $D'D/A_1$  e  $c' = cA_1^2$ . Si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\alpha \left[ e^{-\pi c'z^2} \text{rect}\left(\frac{z}{L}\right) \right] (x) &= \\ &= (-1)^{\frac{1}{4}} \frac{K_a}{2\sqrt{B_a + jc'}} e^{j\pi \left( B_a - \frac{C_a^2}{B_a + jc'} \right) x^2} [\text{Erf}(x_+) - \text{Erf}(x_-)] \end{aligned} \quad (21)$$

dove si è posto

$$x_\pm = -(-1)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\pi} \left( \frac{\pm(B_a + jc')D' - C_a x}{\sqrt{B_a + jc'}} \right). \quad (22)$$

Dopo alcuni passaggi, si è finalmente in grado di fornire l'espressione compatta

$$r(\xi) = -k \frac{\Lambda}{\sqrt{2C'}} \sqrt{\cos \alpha} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\alpha}{2}} e^{-j\pi \cot(\alpha) \left( \frac{\xi}{A_2} \right)^2} \mathcal{F}^\alpha \left[ e^{-\pi c'z^2} \text{rect}\left(\frac{z}{2D'}\right) \right] \left( \frac{\xi}{A_2} \right) \quad (23)$$

La Figg. 3 la riflettività calcolata con dell'equazione di Riccati ottenuta col metodo Runge-Kutta esplicito del quarto ordine viene confrontata con quella valutata dalla FFT. L'errore massimo tra i due profili è circa  $1\text{ dB}$ . Apparentemente, anche in questo profilo il calcolo fatto con la FFT fornisce una sottostima del risultato "vero" dato da Riccati (purchè il passo in Runge-Kutta sia stato scelto sufficientemente piccolo). In questo caso si è usato,

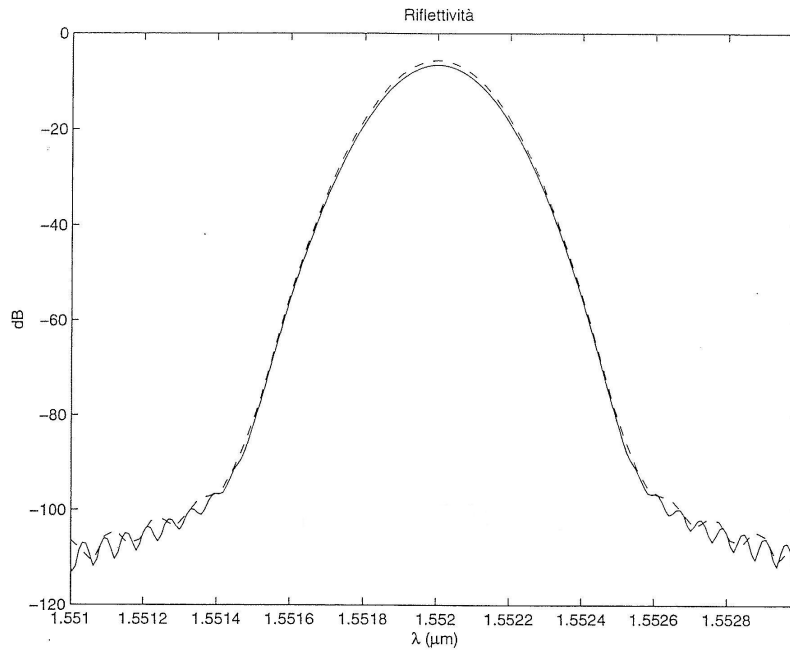


Figura 3: Confronto del calcolo del coefficiente di riflessione effettuato tramite la risoluzione numerica dell'equazione di Riccati ottenuta con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (linea continua) e la risoluzione analitica della trasformata frazionaria di Fourier (linea tratteggiata) per un reticolo gaussiano ( $L = 7\text{ cm}$  e  $FWHM = 2\text{ cm}$ ).

come parametro interno alla funzione  $\gamma$ ,  $FWHM = 2\text{ cm}$ . Si potrebbe mostrare che la modifica di questo parametro non comporta una modifica sostanziale nella forma della riflettività. Il miglioramento rispetto al caso di un reticolo a salto d'indice costante è evidente soprattutto per la maggior selettività, la minor oscillazione e la pendenza più accentuata del filtro.

**Esempio 3.** Consideriamo un reticolo di Bragg di lunghezza  $L$  a passo linearmente variabile lungo la direzione di propagazione  $z$  e con profilo a

coseno rialzato, ossia

$$g(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi z}{FWHM} \right) \right] \quad (24)$$

con  $FWHM = L/2$ . Attuando la consueta operazione di troncamento, si ha

$$\gamma(A_1 z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi z}{W'} \right) \right] \text{rect} \left( \frac{z}{2D'} \right) \quad (25)$$

dove abbiamo stabilito  $W' = W/A_1$  e  $D' = L/(2A_1)$ . Omettendo qualche

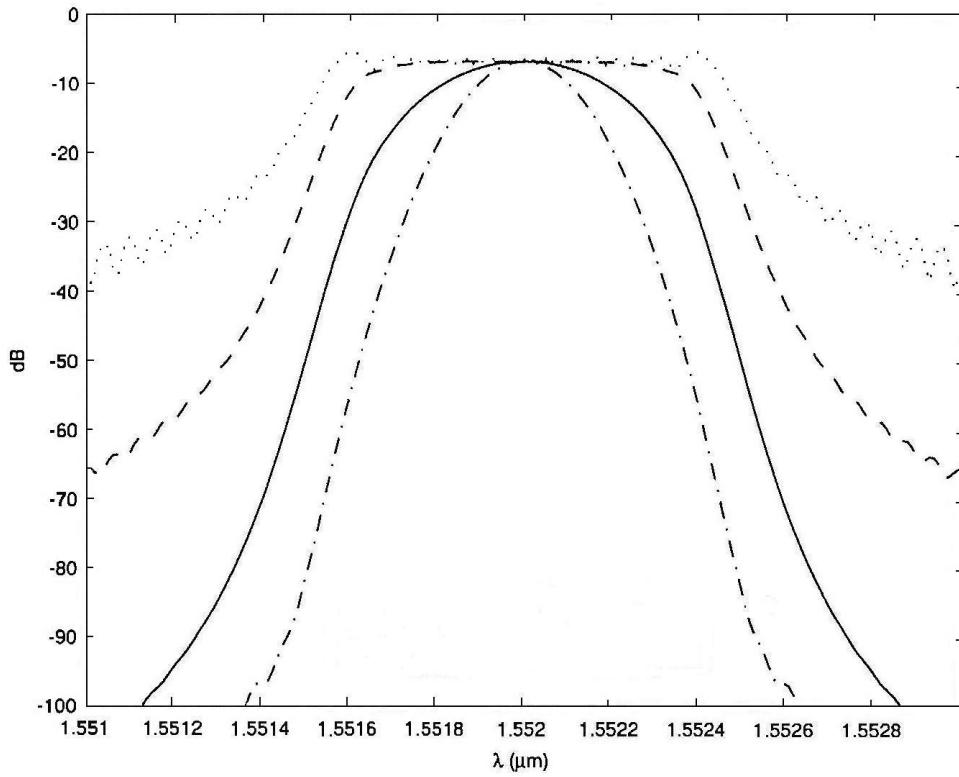


Figura 4: Esempi di riflettività calcolata col metodo basato sulla fFT per i vari profili d'indice presentati: profilo a salto d'indice costante (linea a puntini), profilo a tangente iperbolica simmetrica (linea tratteggiata), profilo a coseno rialzato (linea continua), profilo gaussiano (linea tratto punto). Per tutti si è scelto  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$  e  $L = 7 \text{ cm}$ .

risultato sulla fFT per brevità, il risultato finale sarà

$$\mathcal{F}^\alpha \left[ \text{cosr}(t) \text{rect} \left( \frac{t}{2D} \right) \right] (x) = \frac{A}{2} E_1 + ABCE_2 + AB^*CE_3 \quad (26)$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= (1 + j) \frac{K_a}{2\sqrt{2B_a}} e^{-j\pi x^2/B_a}, \\
B &= \frac{1}{4} \exp\left(\frac{j\pi C_a}{DB_a} x\right), \quad C = \exp\left(-\frac{j\pi}{4D^2 B_a}\right), \\
E_1 &= \text{Erf}(x_+^0) - \text{Erf}(x_-^0) \\
E_2 &= \text{Erf}(x_+^1) - \text{Erf}(x_-^1), \quad E_3 = \text{Erf}(x_+^2) - \text{Erf}(x_-^2), \\
x_{\pm} &= (1 - j) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \pm \sqrt{B_a} D' - \frac{C_a}{\sqrt{B_a}} x \right), \\
x_{\pm}^1 &= x_{\pm}^0 + \frac{\sqrt{\pi}(1 - j)}{L\sqrt{2B_a}}, \quad x_{\pm}^2 = x_{\pm}^0 - \frac{\sqrt{\pi}(1 - j)}{L\sqrt{2B_a}}
\end{aligned}$$

La figura 4 mostra i grafici della riflettività per vari profili calcolati col metodo basato sulla FFT. Bisogna per prima cosa notare la scelta fatta  $FWHM = L/2$ : la funzione coseno rialzato in questo modo risulta accordarsi perfettamente con il resto del dispositivo, rendendo praticamente nulle le oscillazioni nella riflettività.

## 5. Utilizzazione della Fast Fourier Transform

L'uso della Fast Fourier Transform (FFT) nel calcolo della riflettività di un FBG mediante FFT, rappresenta un contributo nuovo. Uno degli scopi di questa Tesi è quello di sviluppare e validare numericamente algoritmi capaci di calcolare la riflettività. Infatti, un'ulteriore problematica tipica degli algoritmi per il calcolo della trasformata di Fourier è l'elevata complessità computazionale. Ciò rende chiaramente lenta e onerosa l'elaborazione dei dati. Per questo motivo si utilizza l'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) sviluppato negli anni '60, grazie al quale si ha una riduzione rilevante del numero di operazioni da compiere nel calcolo numerico della FFT. Esso fu scoperto da Gauss nel 1805 e ripreso da Cooley e Tukey nel 1965 e si basa sul principio del "divide et impera" (spezzare il calcolo in parti di ampiezza più piccola).

Come detto nel corso degli esempi precedentemente esposti, gli algoritmi presentati mettono a confronto il calcolo della riflettività con il metodo dell'equazione di Riccati e quello della trasformata di Fourier frazionaria. Tale trasformata può essere implementata mediante la FFT, la quale offre la possibilità di ridurre notevolmente la complessità, passando da una complessità  $O(N^2)$  ad una  $N \log(N)$ , utilizzando una interpolazione ad hoc. La trasformata di Fourier veloce è un algoritmo ottimizzato per calcolare la trasformata

di Fourier e la sua inversa. La FFT è di grande importanza per una grande varietà di applicazioni, dall'elaborazione di segnali digitali alla soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, agli algoritmi per moltiplicare numeri interi di grandi dimensioni. Sia  $x_0, \dots, x_N$  una  $n$ -pla di numeri comp-

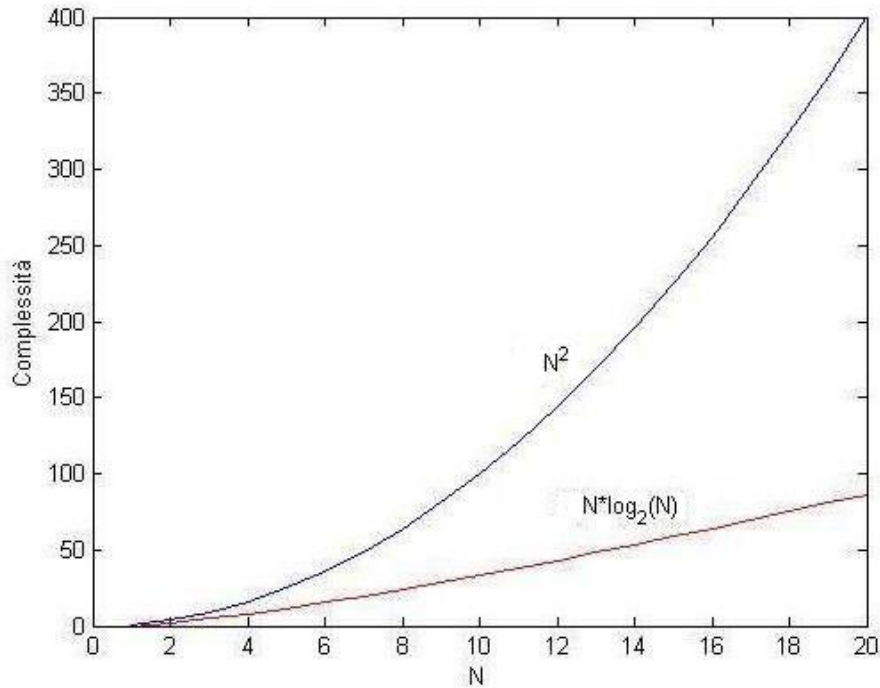


Figura 5: Variazione della complessità computazionale

lessi. Le funzioni (di MATLAB)  $Y=\text{fft}(x)$  e  $Y=\text{ifft}(x)$  calcolano la trasformata e la trasformata inversa, rispettivamente, determinando una coppia di vettori di lunghezza  $N$  da:

$$F(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)\omega_N^{(i-1)(k-1)}, \quad (27)$$

$$f(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\omega_N^{-(i-1)(k-1)}, \quad (28)$$

dove

$$\omega_N = e^{-2\pi j/N} \quad (29)$$

sono le radici  $N$ -me dell'unità, chiamate anche fattori di twiddle. Esse rappresentano le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^N = 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

e svolgono un ruolo particolarmente significativo nel calcolo di una FT poiché la complessità computazionale di una FT dipende, oltre che dalle operazioni floating point necessarie al calcolo della somma nella (27), anche dalla loro valutazione. Alla base degli algoritmi FFT vi è una opportuna riformulazione della FT (derivante dalla fattorizzazione del parametro  $N$ ) che, sfruttando la periodicità e la simmetria delle funzioni trigonometriche, consente di evitare valutazioni di tali funzioni inutili e ridondanti.

Per il calcolo di ciascun termine bisognerà eseguire  $N$  moltiplicazioni complesse ed  $N$  somme, dato che le moltiplicazioni richiedono un tempo di calcolo molto maggiore rispetto alle somme si può trascurare il tempo impiegato per il calcolo di queste ultime. Il largo impiego della FT è motivato dall'esistenza di algoritmi di calcolo efficienti che comportano una riduzione del numero di operazioni richieste e quindi una sostanziale riduzione di tempo. Il calcolo della FT richiede all'incirca  $N^2$  moltiplicazioni complesse e altrettante addizioni. Per  $N$  elevato il calcolo può risultare impraticabile in tempo reale, mentre la complessità degli algoritmi FFT cresce come

$$\frac{1}{2}N \log_2 N$$

A questo fine le proprietà sfruttano le proprietà di simmetria degli esponenziali  $e^{j\frac{2\pi}{N}}$ .

In generale questi algoritmi si basano sulla fattorizzazione di  $N$ , ma esistono algoritmi FFT per qualunque  $N$ , anche per numeri primi.

I parametri di cui si è in possesso per la modellizzazione dei filtri da realizzare sono stati introdotti nella sezione 3. Negli esempi seguenti, la riflettività sarà calcolata con salto d'indice di rifrazione  $A = 3 \times 10^{-5}$ , coefficiente di chirp  $C = -24 \times 10^{-10}$ , frequenza di Bragg  $\lambda_B = 1.552 \mu m$ , lunghezza del reticolo  $L = 7 cm$  ed indice di rifrazione equivalente del modo  $n_{eff} = 1.4486$ .

Il programma (implementato in MATLAB) per calcolare la riflettività usando l'algoritmo FFT è il seguente:

```

»h=5;
»N=fix(L/h);
»omz=pi/L;
»tr=N/2*omz;

```



```

»xq=-tr:omz:(N-1)*omz-tr;
»xp=lamb+xq*Lamb*lamb/pi;
»yq=zeros(1,N);
»inv=yq;
»for j=1:N
»yq(j)=q((j-1)*h-L/2,F,k);
»end
»fyq=h*fft(yq);
»c=fix(N/2)+1
»for j=1+c:N+c
»inv(j-c)=fyq(mod(j-1,N)+1);
»end
»for j=1:N
»fyq(j)=inv(N-j+1);
»end
»r=20*log10(abs(fyq));
»plot(xp,r,'g')
»title('Riflettività ')

```

Mediante i comandi *tic* e *toc* di MATLAB si è misurato il tempo impiegato da ciascun algoritmo per la ricostruzione del profilo. Si fornisce una tabella riassuntiva che mette a confronto i tempi di esecuzione richiesti per calcolare la riflettività usando la trasformata di Fourier frazionaria prima analiticamente e poi numericamente con la FFT.

Operazione		Tempo di esecuzione	
$N^2$	$\frac{N}{2} \log N$	$T_{fft}$	$T_{FFT}$
$66 * 10^3$	$10^3$	0.066 s	0.001 s
$16 * 10^6$	$25 * 10^3$	3 min	0.025 s
$268 * 10^6$	$115 * 10^3$	4.5 min	0.115 s

Tabella 1: Tabella riassuntiva che mette a confronto i tempi di esecuzione per il calcolo della riflettività di reticoli a passo variabile con profilo a salto d'indice costante

Tali risultati possono essere intesi solo come valori indicativi dell'effettiva complessità computazionale dell'algoritmo, in quanto MATLAB non fa nessuna ottimizzazione automatica del codice. Inoltre in tale ambiente di sviluppo alcune operazioni sono meglio ottimizzate rispetto ad altre. Per effettuare un test più preciso riguardo la complessità computazionale bisognerebbe

tradurre il codice nell'ambito del calcolo scientifico, quali C o Fortran, e verificarne le velocità di esecuzione.

**Esempio 4.** Si consideri un reticolo di Bragg di lunghezza  $L$  a passo linearmente variabile lungo la direzione di propagazione  $z$  e con profilo a salto d'indice costante, cioè

$$g(z) = 1 \quad \text{e quindi} \quad \gamma(z) = \text{rect}\left(\frac{z}{L}\right)$$

In Figg. 6 si è calcolata la riflettività usando il metodo della trasformata di Fourier frazionaria implementato con la FFT. Una differenza che si vede subito nella figure è la mancanza della oscillazioni nelle due code del profilo ottenuto applicando la FFT. Successivamente a questo si sono fatte numerose

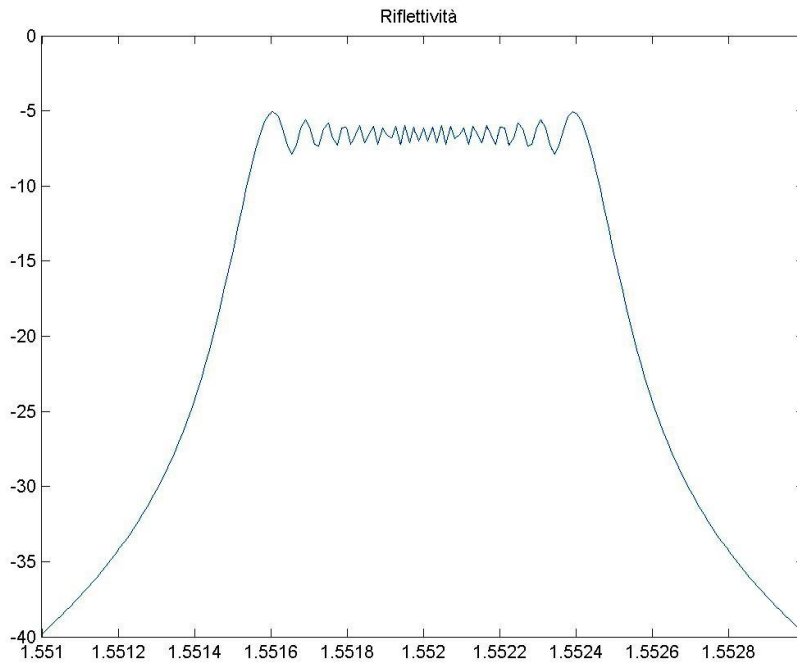


Figura 6: Calcolo della riflettività usando la FFT

prove per cercare di avvicinarci il più possibile al risultato dato dal metodo dell'equazione di Riccati che è quello più corretto. Nella FFT compare una sommatoria su  $i$  che va da 0 a  $N - 1$ , che coinvolge degli  $e^{-2j\pi ki/N}$  con  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Si è pensato di prendere  $N = 2^n$  con  $n$  sufficientemente grande, allora anche  $N$  lo sarà. Un calcolo fatto è stato con  $N = 760000$ .

Ovviamente il costo con la FFT così cresce. Trovando che, a fronte di una velocità notevolmente maggiore, usando la FFT si perdono tuttavia dei dettagli sulle bande laterali, si ipotizza che l'uso della NUFFT (Non Uniform Fast Fourier Transform) potrebbe risolvere questo problema.

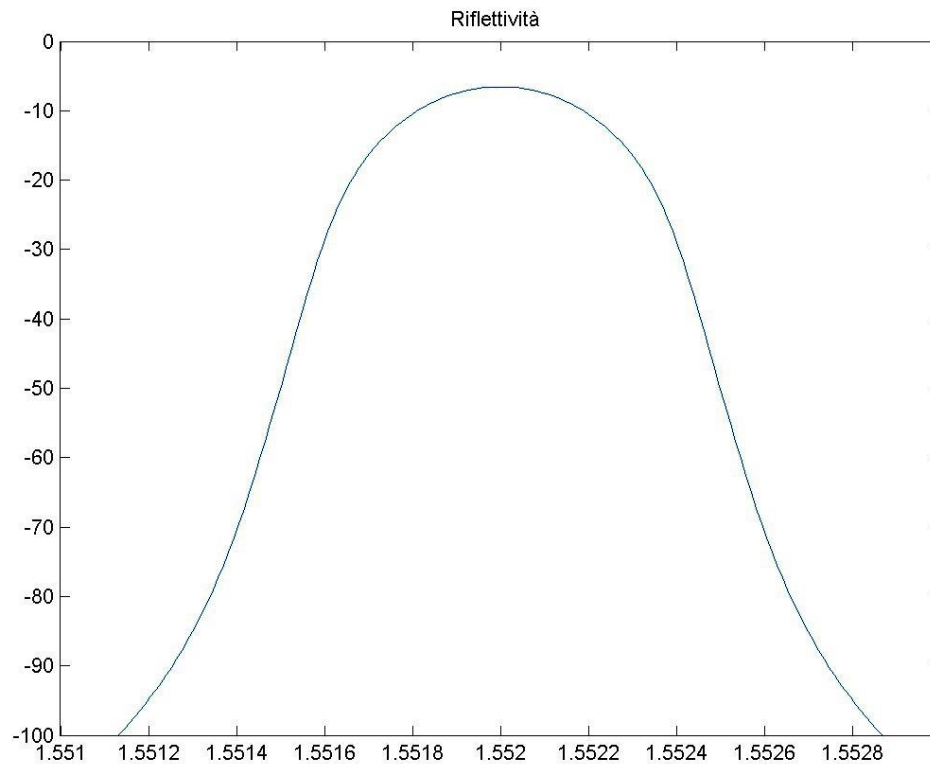


Figura 7: Calcolo della riflettività usando la FFT

La presenza di oscillazioni rapide nello spettro certo non implica la presenza delle stesse nella curva che esprime il segnale reale. Piuttosto conta la consistenza della curva agli estremi dello spettro. L'altezza delle code è infatti proporzionale all'intensità delle componenti a più alta frequenza dello spettro. I grafici della riflettività in funzione della lunghezza del reticolo, sembrano tendere tutti a un limite man mano che ci si avvicina ai bordi dell'intervallo considerato, ma con un comportamento oscillatorio di ampiezza via via più piccola (anche se comunque trascurabile rispetto alla riflettività limite). Lo spettro di tali risultati dovrebbe allora mostrare la presenza di componenti ad alta frequenza ma di piccola ampiezza. Ed è ciò che succede

anche nella FFT, dove sono presenti delle code di ampiezza non nulla ma sensibilmente minore rispetto al centro banda.

**Esempio 5.** Si consideri ora un reticolo di Bragg di lunghezza  $L$  a passo linearmente variabile lungo direzione di propagazione  $z$  e con profilo a coseno rialzato, cioè

$$g(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi z}{FWHM} \right) \right]$$

con  $FWHM = L/2$ . Attuando la consueta operazione di troncamento, si ha

$$\gamma(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi z}{FWHM} \right) \right] \text{rect} \left( \frac{z}{L} \right)$$

In Figg. 7 riportiamo il calcolo della riflettività di reticoli a passo variabile con profilo a coseno rialzato usando la FFT. Quest'ultimo risultato mostra un buon accordo apparente, anche se va sempre ricordato che il metodo dell'equazione di Riccati è quello che dà il risultato corretto.

#### 4. Conclusioni

In questa Tesi si è aggiunta un'ulteriore applicazione pratica alla teoria della trasformata di Fourier frazionaria. Si è infatti calcolata quest'ultima attraverso l'algoritmo FFT. Si sono valutati, in alcuni esempi, i comportamenti dei reticoli più noti calcolando numericamente con la FFT la trasformata di Fourier frazionaria dei rispettivi profili d'indice di rifrazione.

Il vantaggio della teoria affrontata verte sostanzialmente sulla rapidità di calcolo raggiungibile con essa a sulla immediata comprensione dell'influenza delle grandezze utilizzate. Lo sfruttamento dell'ormai ampia conoscenza della trasformata di Fourier frazionaria ha infatti permesso una trattazione estremamente coincisa di un argomento diversamente più complicato.

La riflettività calcolata con dell'equazione di Riccati ottenuta col metodo Runge-Kutta esplicito del quarto ordine viene confrontata con quella valutata dalla FFT. Apparentemente, il calcolo fatto con la FFT fornisce una sottostima del risultato "vero" dato da Riccati (purchè il passo in Runge-Kutta sia stato scelto sufficientemente piccolo). Questo è importante perchè significa che progettando un filtro utilizzando la FFT, si crede di avere una riflettività maggiore di quella che in realtà si ha poichè Riccati sta sotto. Tuttavia la forma del profilo spettrale è conservata con notevole precisione.

Il contributo nuovo di questa Tesi non è comunque di natura unicamente teorico-analitico. Si è infatti introdotto un algoritmo veloce per trovare la trasformata frazionaria di Fourier, il quale offre la possibilità di migliorare notevolmente la complessità computazionale, passando da una complessità  $O(N^2)$  ad una  $N \log(N)$ .