UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Exchange processes and Aldous' conjecture

Sintesi della tesi
presentata da
Katia Colaneri

RELATORE
Prof. Fabio Martinelli

ANNO ACCADEMICO: 2008-2009
Ottobre 2009

AMS classification: 60J27, 60J28 60J75, 60E15.
Keywords: continuous time Markov chain, spectral gap, logarithmic Sobolev constant, entropy

Sintesi della tesi

L'argomento di questa tesi è l'analisi di alcuni processi stocastici di scambio dal punto di vista analitico e la stima di determinate quantità che ne caratterizzano il rilassamento all'equilibrio.
Per avere un'idea chiara di cosa sono i processi di scambio consideriamo il seguente esempio.
Sia G un grafo connesso, non orientato, ossia una coppia (V, E) in cui V rappresenta l'insieme dei vertici, che assumiamo di cardinalità n, ed $E \subset V \times V$ l'insieme degli archi, e supponiamo che ciascun arco $e \in E$ sia dotato di un peso positivo che indichiamo con $c(e)$.
Nel seguito un tale grafo sarà chiamato *grafo pesato*.
Sui vertici di G disoponiamo delle etichette, non necessariamente tutte distinte tra di loro. Ad esempio le etichette possono assumere i valori 0 e 1 e in questo caso chiameremo particelle le etichette 1.
Per ogni coppia di vertici del grafo $(x, y) \in E$, con velocità data dal peso $c(x, y)$, scambio l' etichetta in x con quella in y. Chiaramente otterremo una situazione differente solo nel caso in cui le etichette scambiate sono diverse.
Il caso più semplice, e più esemplificativo, di processo di scambio è quello della passeggiata aleatoria sul ciclo $\mathbb{Z}_n$, in cui una sola etichetta vale 1 e tutte le altre 0.
Una configurazione σ di questo sistema è, pertanto, una stringa di lunghezza n i cui elementi sono 0 o 1.
Indichiamo con $\sigma_i \in \{0, 1\}$ l'etichetta posizionata nel sito i.
Diremo che, al tempo t, il vertice i-esimo è occupato se $\sigma_i(t) = 1$, altrimenti lo chiameremo vuoto. In questa dinamica chiaramente sono previsti soltanto scambi tra la pallina con il nome 1 e le sue due vicine marchiate con lo 0.
Di fatto se consideriamo l'evoluzione del'unica particella di tipo 1, questa eseguirà una passeggiata aleatoria sui vertici V di $\mathbb{Z}_n$.
Se le etichette sono sempre $\{0, 1\}$ ma il numero di particelle è $r > 1$ allora il processo di scambio appartiene alla classe dei processi di *esclusione semplice*.
Un caso limite è quello in cui tutte le etichette hanno valori diversi. In questa situazione tutti gli scambi tra vertici adiacenti sono possibili e lo spazio delle

configurazioni che possiamo ottenere nella dinamica è il gruppo di tutte le permutazioni di n elementi.

Formalmente il processo di scambio è una catena di Markov, $(X_t)_{t\geq 0}$, a tempo continuo su uno spazio finito Ω, detto spazio delle configurazioni o spazio degli stati, reversibile rispetto all'unica misura invariante π che è quella uniforme.
Per la passeggiata aleatoria, ad esempio, $\Omega = \mathbb{Z}_n$ e dunque $\pi(x) = \frac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_n$.
Indichiamo con $\mathcal{L}$ il generatore della catena. $\mathcal{L}$ è un operatore definito da

$$\mathcal{L}g(\sigma) = \sum_{\eta\in\Omega} \mathcal{L}(\sigma,\eta)(g(\eta) - g(\sigma))$$

la cui matrice degli elementi verifica:

1. $$\mathcal{L}(\sigma,\eta) := \begin{cases} c(x,y) > 0 & \text{se } \eta = \sigma^{xy} \text{ per qualche } (x,y) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   dove σ^{xy} è la configurazione ottenuta da σ scambiando l'etichetta in x con quella in y
2. $\sum_{\eta\in\Omega} \mathcal{L}(\sigma,\eta) = 0$, $\forall\sigma \in \Omega$
3. $\mathcal{L}\sigma,\eta) \geq 0$, $\forall \sigma \neq \eta \in \Omega$
4. *condizione di bilancio dettagliato*
   $\pi(\sigma)\mathcal{L}(\sigma,\eta) = \pi(\eta)\mathcal{L}(\eta,\sigma)$, $\forall\sigma,\eta \in \Omega$
5. $\forall\sigma,\eta \in \Omega$, $\sigma \neq \eta$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{L}^n(\sigma,\eta) > 0$

Una catena di Markov a tempo continuo è caratterizzata dal fatto che le transizioni tra gli stati possono avvenire in ogni istante e il lasso di tempo tra due transizioni consecutive è una variabile aleatoria esponenziale.

Quello a cui siamo interessati è quanto velocemente la distribuzione della catena al tempo t si avvicina alla misura stazionaria uniforme. La grandezza che quantifica il rilassamento si chiama tempo di mixing.
Prima di precisare ulteriormente il significato di questo tempo, dobbiamo però chiarire la nozione di distanza tra due misure di probabilità su uno spazio di misura. Una prima definizione è quella di distanza in variazione totale.

Definitione 0.0.1 *Date due misure di probabilità ν, μ su uno spazio Ω finito, definiamo la loro distanza in variazione totale come*

$$\|\mu - \nu\| = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)|$$

Il secondo utile concetto è quello della distanza ℓ^2.
Date due misure μ, ν strettamente positive, definiamo la densità relativa come $h(x) := \dfrac{\nu(x)}{\mu(x)}$

Definitione 0.0.2 *La distanza in $\ell^2(\Omega)$ tra le misure di probabilità μ e ν è data da*

$$\|h(x) - 1\|_2 := \left(\sum_{x \in \Omega} \mu(x) |h(x) - 1|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sia $H_t = e^{t\mathcal{L}}$, il semigruppo di Markov associato al generatore $\mathcal{L}$.
Diremo allora che il tempo di mixing è il più piccolo tempo t tale che la distanza in variazione totale fra la distribuzione della catena al tempo t, partendo dalla configurazione x, e la distribuzione stazionaria è inferiore a $\dfrac{1}{e}$, i.e.

$$\tau_{mix} = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{x \in \Omega} ||H_t^x - \pi||_{TV} \leq \frac{1}{e} \right\}$$

e definiamo il tempo $\tau_{(2)}$ come il più piccolo tempo t per cui la distanza $\ell^2(\Omega, \pi)$ è più piccola di $\frac{1}{e}$,

$$\tau_{(2)} := \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{x \in \Omega} \left\| \frac{H_t^x}{\pi} - 1 \right\|_2 \leq \frac{1}{e} \right\}$$

In generale $\forall p \geq 1$ definiamo la distanza in $\ell^p(\Omega, \pi)$ come

$$\tau_p := \inf \left\{ \sup_{x \in \Omega} \left\| \frac{H_t^x}{\pi} - 1 \right\|_p \leq \frac{1}{e} \right\}.$$

Notiamo che τ_{mix} coincide esattamente con

$$\tau_{(1)} := \inf \left\{ \sup_{x \in \Omega} \left\| \frac{P_t^x}{\pi} - 1 \right\|_1 \leq \frac{1}{e} \right\}$$

Queste due grandezze sono legate dalla seguente disuguaglianza

$$\tau_{mix} \leq \tau^{(2)}$$

Stimare direttamente il tempo di mixing per la maggior parte delle catene di Markov è alquanto difficile per cui generalmente si fa ricorso ad altre quantità che sono legate ad esso tramite alcune ben note disuguaglianze coercitive per il generatore della catena.
Queste interessanti quantità sono il gap spettrale, la costante logaritmica di Sobolev e la costante d'entropia.
A questo punto trovare una buona stima per queste grandezze diventa di fondamentale importanza.
Data una catena di Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sullo spazio finito Ω, con generatore $\mathcal{L}$, che sia irriducibile e reversibile rispetto alla misura invariante π, per ogni funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$, indichiamo con $\pi(f)$ l'aspettazione di f,

$$\pi(f) := E_\pi(f) = \sum_{x\in\Omega}^{\pi(f)} \pi(x) f(x),$$

e con $\mathrm{Var}_\pi(f)$ la varianza .
Definiamo con $\mathcal{E}(f,g)$ la forma di Dirichlet della coppia (f,g) associata a $-\mathcal{L}$, cioè la forma quadratica $< f, -\mathcal{L}g >_\pi$, dove $< \cdot,\cdot >_\pi$ è il prodotto interno su $\ell^2(\Omega,\pi)$.
Se indichiamo con $\mathcal{E}(f) := \mathcal{E}(f,f)$, possiamo scrivere la forma di Dirichlet della funzione f come

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\sum_{xy\in\Omega} \mathcal{L}(x,y)\left(f(y)-f(x)\right)^2$$

Infine per ogni funzione $f\geq 0$ tale che $\pi(f)=1$, denotiamo con l'espressione $\mathrm{Ent}(f)$ l'entropia di f che è data esplicitamente da

$$\mathrm{Ent}(f) = E_\pi(f\log f) = \sum_{x\in\Omega} \pi(x) f(x)\log f(x)$$

L'opposto del generatore, $-\mathcal{L}$, ha la proprietà di essere un operatore semidefinito positivo i cui autovalori sono $0\leq\lambda_1\leq ...\leq\lambda_{n-1}\leq 1$.
Diremo allora che il gap spettrale $\lambda=\lambda_1$ è il primo autovalore non nullo di $-\mathcal{L}$ e soddisfa il principio variazionale

$$\lambda := \inf\left\{\frac{\mathcal{E}(f)}{\mathrm{Var}_\pi(f)};\mathrm{Var}_\pi(f)\neq 0\right\}$$

Dalla definizione di gap spettrale possiamo dedurre che $\frac{1}{\lambda}$ è la migliore costante c che verifica la disuguaglianza di Poincarè

$$\mathrm{Var}_\pi(f)\leq c\,\mathcal{E}(f)\quad\forall\, f\in\ell^2(\Omega,\pi)$$

L'importante legame tra il gap spettrale e il tempo di mixing è data dalla seguente relazione che è mostrata in [6]

$$\frac{1}{\lambda} \leq \tau_{mix} \leq \frac{1}{2\lambda}\left(2 + \log\frac{1}{\pi_*}\right)$$

dove $\pi_* = \min_{x\in\Omega} \pi(x)$.
Una quantità che governa ancora meglio la convergenza all'equilibrio è la costante logaritmica di Sobolev che possiamo definire operativamente come la migliore costante c che verifica la disuguaglianza logaritmica di Sobolev

$$\operatorname{Ent}(f) \leq c\,\mathcal{E}(f).$$

La definizione variazionale è la seguente

$$\alpha = \inf\left\{\frac{\operatorname{Ent}(f)}{\mathcal{E}(f)};\ f \geq 0,\ \pi(f) = 1,\ \mathcal{E}(f) \neq 0\right\}$$

e il legame con il tempo di mixing è dato dal seguente risultato,[6] :

$$\frac{1}{\lambda} \leq \tau_{mix} \leq \frac{\alpha}{4}\left\{4 + \log\log\frac{1}{\pi_*}\right\}.$$

Un'interessante osservazione sulla costante logaritmica di Sobolev che deriva dalla sua stretta relazione con l'ipercontrattività del semigruppo è data dal fatto che questa regola il decadimento esponenziale di $\operatorname{Ent}(H_t f)$.

Definitione 0.0.3 *Data una funzione $q : \mathbb{R}^+ \to [q(0), +\infty]$ strettamente crescente, diremo che il semigruppo di Markov H_t è ipercontrattivo, con funzione di contrazione q, se per ogni funzione f e ogni $t \geq 0$*

$$\|H_t f\|_{q(t)} \leq \|f\|_{q(0)}$$

Vale il seguente risultato che è dimostrato in [6].

Teorema 0.0.4 *Sia $(\mathcal{L}, \pi)$ una catena di Markov la cui costante logaritmica di Sobolev è α. Allora*

(i) *H_t è ipercontrattivo con funzione q data da $q(t) = 1 + e^{-\frac{4}{\alpha}t}$*

(ii) *$Ent(H_t f) \leq e^{-\frac{4}{\alpha}t} Ent(f)$ per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ non negativa*

(iii) $\left\|\frac{H_t^x}{\pi} - 1\right\|_2 \leq e^{1-c}$ *per ogni $c \geq 0$ e $t = \frac{\alpha}{4}\left(\log\log\left(\frac{1}{\pi(x)}\right)\right) + \frac{c}{\lambda}$*

Infine definiamo la costante d'entropia, che è la migliore costante c che verifica la disuguaglianza

$$\mathrm{Ent}(f) \leq c\,\mathcal{E}(f, \log f)$$

o, equivalentemente

$$\beta = \inf \left\{ \frac{\mathrm{Ent}(f)}{\mathcal{E}(f, \log f)},\ f \geq 0,\ \pi(f) = 1\ \mathcal{E}(f, \log f) \neq 0 \right\},$$

che è la definizione in termini variazionali.
In assoluto tra le tre, la costante d'entropia è quella che ci dà la migliore approssimazione del tempo di avvicinamento all'equilibrio, infatti (vedi [10])

$$\tau_{mix} \leq \beta \left(1 + \log \log \frac{1}{\pi_*} \right).$$

Da questo punto di vista , dunque, è la più interessante ma al contempo è la quantità più difficile da stimate.
Gran parte del lavoro è stato quello di determinare le stime di queste costanti per processi di scambio: trasposizioni random, modello diffusivo di Bernoulli-Laplace e il processo di esclusione semplice simmetrica.

Nel modello delle trasposizioni random ci sono n siti che ospitano n particelle distinte, ciascuna in ogni sito. Ogni particella è dotata di un orologio di Poisson di media 1, ossia un orologio per cui il tempo tra due squilli successivi è una variabile aleatoria esponenziale, in questo caso di parametro 1. Quando l'orologio della particella x squilla, scegliamo a caso uniformemente uno degli n siti e scambiamo le posizioni delle 2 particelle. Questo modello può essere quindi interpretato come un processo di scambio in cui G è il grafo completo.
Una generica configurazione σ è una permutazione e lo spazio degli stati $\Omega = S_n$ è il gruppo delle permutazioni su n elementi.
Indichiamo con $\sigma^{i,j}$ la permutazione ottenuta da σ scambiando la particella nella posizione i con quella nella posizione j.
Diremo che due configurazioni σ, η sono vicine se esiste una trasposizione $\tau = (ij)$ tale che $\eta = \tau\sigma = \sigma^{i,j}$ e dunque definiamo il generatore di Markov come

$$(\mathcal{L}f)(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(f(\sigma^{i,j}) - f(\sigma) \right).$$

La misura stazionaria è la misura uniforme su S_n, cioè

$$\pi(\sigma) = \frac{1}{n!} \quad \forall \sigma \in S_n$$

Se su questo modello introduciamo una struttura di grafo, il che significa che consentiamo gli scambi solo tra particelle che sono legate tra loro tramite un arco, otteniamo il cosiddetto processo di interchange la cui dinamica è descritta dal seguente generatore

$$\mathcal{L}f(\sigma) = \sum_{\eta\sim\sigma} c^{IP}(\sigma, \eta)(f(\sigma) - f(\eta)) = \sum_{(i,j)\in E} c^{IP}(i, j)(f(\sigma) - f(\sigma^{ij}))$$

dove $c^{IP}(i, j) = 1$ se e soltanto se la coppia (i, j) è un arco del grafo.
La misura stazionaria rimane la misura uniforme sullo spazio degli stati S_n.

Il secondo modello che andremo ad analizzare è il modello diffusivo di Bernoulli-Laplace. Sia $r \leq n$. Supponiamo di avere r particelle e di disporle su n siti in modo tale che ci sia al più una particella in ogni sito.
Ciascuna particella è dotata di un orologio di Poisson di media 1. Quando l'orologio della particella x squilla scelgo a caso uniformemente un sito: se questo è libero sposto la particella x nel nuovo sito altrimenti non accade nulla. Una generica configurazione σ è una stringa di lunghezza n in cui ciascun elemento $\sigma_i \in \{0, 1\}$ vale 1 se il sito i-esimo è occupato da una particella e 0 se invece è vuoto.
Questo processo è reversibile rispetto alla misura stazionaria che è la misura uniforme sullo spazio degli stati $C_{n,r}$, dunque $\pi(\sigma) = \frac{1}{\binom{n}{r}}$. Il generatore è dato da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(\eta) &= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \eta_i(1-\eta_j)(f(\eta^{ij}) - f(\eta))^2 \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i<j}(f(\eta^{ij}) - f(\eta))^2.\end{aligned}$$

Se studiamo il modello di Bernoulli-Laplace su un grafo, riducendo così i salti di ogni particella ai soli siti vicini, ossia connessi da un arco, otteniamo il processo di esclusione semplice.
In particolare studieremo il processo di esclusione semplice prendendo come grafo $\mathbb{Z}_n$.
Il generatore per questo processo di Markov è dato da

$$(\mathcal{L}f)(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(\sigma^{i,i+1}) - f(\sigma)).$$

Come annunciato, per questi modelli vogliamo calcolare gap spettrale, la costante logaritmica di Sobolev e costante d'entropia.
I principali risultati, le cui dimostrazioni sono date in [10],[15],[19] e [8], possono essere riassunti come segue:

(i) per il modello delle trasposizioni random esiste una costante $c > 0$ tale che

1. $\frac{1}{c} \log n \leq \alpha^{RT} \leq c \log n$
2. $\frac{1}{2} \leq \beta^{RT} \leq 1$
3. $\lambda^{RT} = 1$

(ii) per il modello diffusivo Bernoulli-Laplace esiste una costante $c > 0$ tale che

1. $\frac{1}{c} \log \frac{n^2}{r(n-r)} \leq \alpha^{BL} \leq \frac{2}{\log 2} \log \frac{n^2}{r(n-r)}$
2. $\frac{1}{2} \leq \beta^{BL} \leq 2$
3. $\lambda^{BL} = 1$

(iii) per il modello di esclusione semplice su $\mathbb{Z}_n$ valgono le seguenti stime

1. $\frac{1}{c} n^2 \leq \alpha^{SE} \leq cn^2$, per qualche $c \geq 0$
2. $\delta n^2(1 + \log r) \leq \tau_{(2)}^{SE} \leq kn^2 \log n$, $\exists \delta, k \geq 0$
3. $\tau_{mix}^{SE} \leq c' n^2 \log r$, $\exists c' \geq 0$

Le due stime sul gap per i processi di trasposizioni random e di Bernoulli-Laplace (vedi [8]), si ottengono rapidamente verificando che per ogni funzione f la forma di Dirichlet è sempre maggiore o uguale alla varianza, $\mathcal{E}_\pi(f) \geq \mathrm{Var}_\pi(f)$, dunque $\lambda \geq 1$, inoltre per una particolare funzione test f vale l'uguaglianza: da qui si deduce che $\lambda = 1$.

Per le restanti stime, le strategie dimostrative che useremo sono essenzialmente due: il metodo delle martingale e le tecniche di paragone.
Il metodo delle martingale ci permetterà di ottenere le stime dall'alto per le costanti logaritmiche di Sobolev ,[15],e le costanti di entropia,[10], nei modelli delle trasposizioni random e di Bernoulli-Laplace. L'idea è quella di stabilire una ricorsione tra la costante logaritmica di Sobolev(rispettivamente la

costante d'entropia) quando il numero di siti passa da n a $n+1$. Questa tecnica, che ci consente di stimare l'entropia di una funzione f in termini della forma di Dirichlet, consiste nell'utilizzare le proprietà dell'aspettazione condizionata per ricavare $E_\pi(f \log f)$ come $E_\pi(E(f \log f|\sigma_s))$ vincolando, cioè, la funzione $f \log f$ alla posizione di una singola particella σ_s, e calcolando poi la media su $1 \leq s \leq n+1$.
Una volta stabilita la formula ricorsiva, la tesi seguirà procedendo per induzione.
Le stime dal basso per la costante logaritmica di Sobolev si ottengono facilmente prendendo una funzione test e calcolando esplicitamente il rapporto tra l'entropia e la forma di Dirichlet, mentre per la costante d'entropia sarà sufficiente utilizzare la disuguaglianza generale $\beta \geq \dfrac{1}{2\lambda}$
Il metodo di paragone, introdotto in [7], ci permetterà invece di stimare dall'alto la costante logaritmica di Sobolev nel caso dell'esclusione semplice.
Riassumiamo l'idea principale.
Prima di tutto, data una catena di Markov $(\mathcal{L}, \pi)$ sullo spazio degli stati Ω, definiamo il grafo $G = (V, E)$ in cui l'insieme dei vertici V coincide con Ω e l'insieme degli archi è $E := \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : \mathcal{L}(x, y) > 0\}$.
Indichiamo con e un generico arco e sia $Q(e) = \pi(x)\mathcal{L}(x, y)$. Infine definiamo un cammino $\gamma := (x_0, ..., x_n)$ di lunghezza n come la sequenza di $n+1$ vertici in Ω tali che $(x_i, x_{i+1}) \in E \quad \forall i \geq 0$. Sia $\Gamma_{(x,y)}$ l'insieme di tutti i cammini da x a y in cui ciascun arco compare esattamente 1 volta che chiameremo cammini canonici. Vale la seguente proposizione

Proposizione 0.0.5 *Data una catena di Markov $(\mathcal{L}, \pi)$ e un cammino canonico allora $\lambda \geq \frac{1}{A}$ dove*

$$A := \max_{e \in E} \left\{ \frac{1}{Q(e)} \sum_{\substack{x,y \in \Omega \\ \gamma(x,y) \ni e}} |\gamma(x, y)| \pi(x) \pi(y) \right\}$$

Possiamo allora descrivere così il metodo di paragone.
Date due catene di Markov $(\mathcal{L}, \pi)$ e $(\mathcal{L}', \pi')$ sullo stesso spazio degli stati Ω, se per qualche $A, a > 0$ valgono $\mathcal{E}(f) \leq A\mathcal{E}'(f) \;\; \forall f$ e $a\pi(x) \leq \pi'(x) \;\; \forall x \in \Omega$ allora.

$$\lambda \geq \frac{a\lambda'}{A} \qquad \text{e} \qquad \alpha \geq \frac{a}{A}\alpha'.$$

Una tecnica interessante con cui possiamo calcolare il valore di A consiste nell'usare i cammini. In particolare vale la seguente proposizione.

Proposizione 0.0.6 *Siano* $(\mathcal{L}, \pi)$ *e* $(\mathcal{L}', \pi')$ *due catene di Markov sui grafi* $G = (\Omega, E)$ *e* $G' = (\Omega, E')$ *rispettivamente. Per ogni* $e \in E'$ *scegliamo* $\gamma(x, y) \in \Gamma(x, y)$*. Allora*

$$\mathcal{E}'(f, f') \leq A\mathcal{E}(f, f)$$

dove

$$A = \max_{e \in E} \left\{ \frac{1}{Q(e)} \sum_{\substack{(x,y) \in E' \\ \gamma(x,y) \ni e}} |\gamma(x, y)| \pi'(x) \mathcal{L}'(xy) \right\}.$$

Se scegliamo come $\mathcal{L}$ il generatore del processo di esclusione semplice e come $\mathcal{L}'$ quello del modello di Bernoulli-Laplace, è possibile ottenere una stima di α^{SE} in termini di α^{BL} e dunque approssimare dall'alto la prima.
Per la stima dal basso invece sarà sufficiente ricorrere alla disuguaglianza generale

$$\alpha \geq \frac{1}{2\lambda}$$

e osservare che $\lambda^{SE} \sim \dfrac{c}{n^2}$.
É particolarmente rilevante la dimostrazione della stima dal basso per $\tau_{(2)}^{SE}$ che è basata su un'osservazione che lega il tempo di avvicinamento alla distribuzione stazionaria al limite idrodinamico per il modello di esclusione semplice,[15].
Per chiarire le idee diremo che un sistema di particelle interagenti ha un *comportamento idrodinamico* se esiste una scala macroscopica spazio e tempo in cui le quantità conservate si evolvono in modo da soddisfare una equazione differenziale alle derivate parziali. Tale equazione si definisce *equazione idrodinamica* del sistema.
Nel caso del processo di esclusione semplice con r particelle sul grafo $\mathbb{Z}_n$, si può dimostrare (vedi [13]) che l'equazione idrodinamica non è altro che l'equazione del calore. Per quanto riguarda il tempo di mixing del processo di esclusione semplice sul grafo $\mathbb{Z}_n$ un recente risultato,[19], ha stabilito che $\tau_{mix} \leq n^2 \log n$. In questo modo si è migliorata la stima dedotta dalla disuguaglianza $\tau_{mix} \leq \tau_{(2)}$. Per la dimostrazione di questo fatto ricorreremo ad un processo ausiliario, il processo camaleonte, una interessante variante del processo di esclusione.
Supponiamo di avere k particelle di cui r sono nere, 1 è rossa e le restanti $k-r-1$ sono bianche disposte sui vertici di un grafo. Ciascun arco del grafo è dotato di un orologio di Poisson di media 1. Quando l'orologio squilla scambio le palline agli estremi dell'arco. Se le palline scambiate sono una rossa

e 1 bianca allora le coloro entrambe di rosa. Vado avanti in questo modo, finché il numero di palline rosa non raggiunge il minimo tra le palline rosse e le bianche, a quel punto, lancio una moneta equa e coloro tutte le palline rosa di rosso se è uscita testa e di bianco se, invece, ho ottenuto croce.
Sfruttando la relazione tra le probabilità di transizione dei due processi, si ottiene una dettagliata analisi del rapporto tra i tempi di mixing e dunque una stima molto precisa.
I tempi di approccio all'equilibrio per i processi di trasposizioni random e di Bernoulli-Laplace li dedurremo invece direttamente dalla costante di entropia per quanto riguarda la stima dall'alto e dal gap per la stima dal basso.

Infine una parte importante del lavoro è dedicata alla congettura di Aldous,[1], che è stata recentemente dimostata e che ci permette di affermare che il gap del processo di esclusione semplice su $\mathbb{Z}_n$ è $\lambda = \dfrac{\pi^2}{n^2}$.

La congettura è stata ufficialmente formulata nel 1992 da David Aldous e Persi Diaconis, e può essere così enunciata:
La passeggiata aleatoria e il processo di interchange su uno steso grafo pesato $G = (V, E)$ hanno lo stesso gap spettrale.

Osserviamo innanzitutto che la passeggiata aleatoria è un sottoprocesso del processo di interchange in un senso che sarà chiarito di seguito.

Definitione 0.0.7 *Una catena di Markov $(\mathcal{L}_2, \pi_2)$ sullo spazio degli stati S_2 è un sottoprocesso della catena $(\mathcal{L}_1, \pi_1)$ sullo spazio degli stati S_1 se esiste una mappa suriettiva $\phi : S_1 \to S_2$ tale che*

$$\mathcal{L}_1(f \circ \phi) = (\mathcal{L}_2 f) \circ \phi \quad \forall f : S_2 \to \mathbb{R}$$

Se $(\mathcal{L}_2, \pi_2)$ è un sottoprocesso di $(\mathcal{L}_1, \pi_1)$ allora per ogni autofunzione di $(-\mathcal{L}_2)$ con autovalore λ la funzione $f \circ \phi$ è autofunzione di $(-\mathcal{L}_1)$ con lo stesso autovalore.
Dunque lo spettro di $(-\mathcal{L}_2)$ è contenuto nello spettro di $(-\mathcal{L}_1)$.
In maniera equivalente se indichiamo con λ^1 e λ^2 i gap dei due processi si avrà

$$\lambda^1 \leq \lambda^2.$$

Intuitivamente è chiaro che possiamo ottenere la passeggiata aleatoria dal processo di interchange semplicemente seguendo gli spostamenti di una particela e ignorando le altre, e dunque la mappa naturale sembra essere

$$\begin{aligned} \phi : \quad & S_n \to \mathbb{Z}_n \\ & \sigma \to \phi(\sigma) = \sigma_1. \end{aligned}$$

La conseguenza è che lo spettro di $-\mathcal{L}^{RW}$ è contenuto nello spettro di $-\mathcal{L}^{IP}$ e, dunque, $\lambda^{IP} \leq \lambda^{RW}$.
Ma allora anche il processo di esclusione semplice è un sottoprocesso dell'interchange perchè, di fatto, sarà sufficiente tenere sotto controllo le posizioni delle prime r particelle e ignorare le altre. Chiaramente la passeggiata aleatoria è essa stessa un sottoprocesso del processo di esclusione semplice.
Allora avremo

$$\lambda^{IP} \leq \lambda^{SE} \leq \lambda^{RW}.$$

La veridicità della congettura, dunque, ci permette di concludere che

$$\lambda^{IP} = \lambda^{SE} = \lambda^{RW}.$$

L'osservazione sugli spettri ne implica immediatamente un'altra.
In generale se $\{\gamma_1, ...\gamma_k\} \subseteq Spec(-\mathcal{L}^{IP})$ posso sempre decomporre lo spazio delle autofunzioni associate agli autovalori di $-\mathcal{L}^{IP}$, che scriviamo come $H_{Spec(-\mathcal{L}^{IP})}$, in due componenti ortogonali, $H_{\gamma,...,\gamma_k}$ e $H_{Spec(-\mathcal{L}^{IP})\setminus\{\gamma_1,...,\gamma_k\}}$, dove con $H_{\gamma_1,...,\gamma_k}$ indichiamo lo spazio delle autofunzioni associate agli autovalori $\{\gamma_1, ..., \gamma_k\}$.
Se scegliamo $\{\gamma_1, ..., \gamma_k\} = Spec(-\mathcal{L}^{RW}) \subseteq Spec(-\mathcal{L}^{IP})$, possiamo scrivere

$$H_{Spec(-\mathcal{L}^{IP})} = H_{Spec(-\mathcal{L}^{RW})} \oplus H_{Spec(-\mathcal{L}^{IP})\setminus Spec(-\mathcal{L}^{RW})}$$

.
Chiamiamo allora

$$\lambda^{RW} = \min\{\gamma_1, ...\gamma_k\}$$

e indichiamo con μ_1 il più piccolo autovalore associato alle funzioni in $Spec(-\mathcal{L}^{IP}) \setminus Spec(-\mathcal{L}^{RW})$. La congettura può essere, allora enunciata nuovamente nel seguente modo:

$$\mu_1 \geq \lambda^{RW}. \tag{1}$$

La prova definitiva è stata data nel giugno 2009 da un team di tre professori, P. Caputo, T. Liggett e T. Richtammer,[4], ma è stata preceduta dalle dimostrazioni di alcuni casi particolari. P. Diaconis e M. Shahshahani, [8], hanno affrontato per primi la questione; nel 1996 S. Handjani e D. Jungreis l'hanno mostrata per gli alberi e i grafi completi, nel 2008 indipendentemente B. Morris [20] e S. Starr e M. Conomos [22] hanno dimostrato una versione asintotica dell'ipotesi di Aldous sull'ipercubo, mentre nel 2009 F. Cesi [5] l'ha verificata nel caso di grafi completi multipartiti.

Nella prova generale il problema è stato affrontato sostanzialmente utilizzando una strategia ricorsiva.
Osserviamo che l'uguaglianza è banalmente vera nel caso di grafi con un solo edge, in quanto i due processi, la passeggiata aleatoria e il processo di interchange, coincidono.
L'intuizione che ha permesso di dimostrare il caso generale si basa sull'idea della riduzione delle resistenze in serie nelle reti elettriche ad un'unica resistenza equivalente in modo da lasciare invariata la differenza di potenziale agli estremi della rete.
Dato il grafo $G = (V, E)$ con pesi sugli edge $\{c(e)\}_{e \in E}$, definiamo il grafo ridotto $G_x = (V_x, E_x)$, come quello ottenuto da G rimuovendo il vertice x e tutti gli edge che hanno x come estremo. Su questo nuovo grafo risistemiamo i pesi nel modo seguente

$$\widetilde{c}(yz) = c_{yz} + c^{*,x}_{yz} \qquad c^{*,x}_{yz} := \frac{c_{xy}c_{xz}}{\sum_{v \in V} c_{xv}} \qquad \text{per } (yz) \in E_x.$$

La dimostrazione della congettura consiste nel provare le seguenti due delicate disuguaglianze:

1. $\lambda^{RW}(G_x) \geq \lambda^{RW}(G)$
2. $\mu_1(G) \geq \lambda^{RW}(G_x)$

La prima delle due relazioni è abbastanza semplice da dimostrare e discende direttamente dalla definizione di gap spettrale. Ma l'ingrediente tecnico principale che ci consente di verificare la seconda, consiste nella disuguaglianza che prende il nome di *octopus estimate*, la cui dimostrazione, dopo una serie di successivi e non banali passaggi di semplificazione si riduce a controllare che una certa matrice a blocchi è definita positiva. Per concludere enunciamo l'octopus estimate nel seguente modo:

Teorema 0.0.8 (Octopus estimate) *Per ogni grafo pesato G, con $|V| = n$, per ogni vertice $x \in V$ and $f : S_n \to \mathbb{R}$,*

$$\sum_{y \in V_x} c_{xy}\pi[(\nabla_{xy} f)^2] \geq \sum_{yz \in E_x} c^{*,x}_{y,z}\pi[(\nabla_{yz} f)^2] \tag{2}$$

dove $\nabla_{xy} f(\eta) = f(\eta^{xy} - f(\eta))$.

0.1 Struttura della tesi

La tesi è suddivisa in 5 capitoli in cui sono riportati i seguenti argomenti:

- nel capitolo 1 vengono richiamati alcuni concetti di base sulle catene di Markov a tempo discreto e a tempo continuo;
- il capitolo 2 raccoglie una serie di disuguaglianze generali che legano tra loro il tempo di mixing, il gap spettrale, la costante logaritmica di Sobolev e la costante di entropia;
- nel capitolo 3 analizzeremo i processi di scambio descrivendone la dinamica calcolandone il generatore di Markov, la forma di Dirichlet e l'entropia;
- il capitolo 4 è dedicato alla stima effettiva della costante logaritmica di Sobolev, della costante di entropia, del gap e del tempo di mixing per alcuni processi di scambio;
- nel capitolo 5 discuteremo in dettaglio la congettura di Aldous dando la dimostrazione di alcuni casi particolari prima, e di quello generale poi.

Bibliografia

[1] D.Aldous, www.stat.berkeley.edu/users/aldous/Research/OP/index.html

[2] D. Aldous, J. Fill, *Reversible Markov chains and random walk on graphs*, Book in preparation, http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/RWG/book.html

[3] J. Bertoin, F. Martinelli, Y. Peres (1997), *Lecture notes on probability theory and statistics* Ecole d'Eté de Prbabilités de Saint-Flour XXVII, Springer

[4] P. Caputo, T.M. Liggett, T. Richtammer (2009),*A recursive proof of Aldous' spectarl gap conjecture*, arXiv:0906.1238v3

[5] F.Cesi (2009), *On the eigenvalues of Cayley graphs on the symmetric group generated by a complete multipartite set of transpositions*, arXiv:0902.0727v1

[6] P. Diaconis, L. Saloff-Coste (1996), *Logarithmic sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **6** 695-750

[7] P. Diaconis, L. Saloff-Coste (1993), *Comparison theorems for reversible Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **3**, 696-730

[8] P. Diaconis, M. Shahshahani (1981), *Generating a random permutation with random transpositions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **57**, 159-179

[9] P. Diaconis, M. Shahshahani (1987), *Time to reach stationarity in the Bernoulli-Laplace diffusion model*, SIAM J. Math Anal. **18**, 208-218

[10] F. Gao, J. Quastel (2003), *Exponential decay of entropy in the random transposition and Bernoulli-Laplace Models*, Ann. Appl. Probab. **4**,1591-1600

[11] O. Häggström (2000), *Finite Markov chains and algorithmic applications*, Cambrodge Univ. Press.

[12] S. Handjani, D. Jungreis (1996), *Rate of convergence for shuffling cards by transpositions*, J. Theor. Prob. **9**, 983-993

[13] C. Kipnis, C.Landim, *Scaling limit of interacting particle systems*, **320**, Grundlehren der mathemathischen Wissenschaften.

[14] S. Starr, M. Conomos (2008), *Asymptotics of the spectral gap for the interchange process on large hypercubes*, arXiv:0802.1368v2

[15] T.Y. Lee, H.T. Yau (1998), *Logarithmic Sobolev inequality for some models of random walk* The Annals of Probability, Vol.26, No. 4, 1855-1873

[16] D. Levin,Y. Peres, E. Wilmer. (2009), *Markov chains and mixing times*, AMS Bookstore

[17] T. Liggett (1985), *Interacting Particle Systems*, Springer, New York.

[18] R. Lyons, Y. Peres (2009), *Probability on trees and networks*, Book in prepapation, http://mypage.iu.edu/˜rdlyons/prbtree/prbtree.html

[19] B. Morris(2006), *Mixing time for simple exclusion*, Ann. Appl. Probab. **16** No.3, 615-635

[20] B. Morris (2008), *Specral gap for interchange process in a box*, Electron. Commun. Probab. **13**

[21] J. Norris (1998), *Markov chains*, Cambridge university press.

[22] S. Starr, M. Conomos (2008), *Asymptotics of the spectral gap for the interchange process on large hypercubes*, arXiv:0802.1368v2