UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di

Alessandra Ceraglia

L'anello delle funzioni intere

Relatore

Prof.ssa Florida Girolami

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
LUGLIO 2002

Classificazione AMS: [13F05], [13F30], [13A15].

Parole chiave: funzione intera, domini di Bézout, non-D-anelli di Prüfer, E-domini.

Alessandra Ceraglia è nata a Roma il 30 ottobre del 1978. Ha conseguito il diploma di maturità scientifica presso il Liceo Scientifico F.Borromini di Roma nel 1997. Si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università Roma Tre nell'a.a. 1997-1998, presso cui ha svolto

attività di tutorato per l'insegnamento
" Laboratorio di programmazione e calcolo ".
(Nell'a.a. 1999-2000).

Incarico di collaborazione nei laboratori didattici.
(Nell'a.a. 2000-2001).

TESINE ORALI PRESENTATE

1. Il teorema della base di Hilbert
   (Geometria - Prof. Sernesi)

2. Teorema ergodico per catene di Markov
   ed applicazioni al metodo Montecarlo
   (Probabilità - Prof. Martinelli)

A nonna Barbara
zia Teresa
sig.ra Rita
e sig.ra Vera.

Indice

Introduzione **1**

1 Prerequisiti **5**

1.1 Dipendenza integrale 5

1.2 Anelli completamente integralmente chiusi 7

1.3 Richiami sugli anelli di valutazione 8

1.4 Ideali frazionari di un dominio d'integrità 15

1.5 Domini di Prüfer 17

1.6 Cenni sui sovranelli di un dominio di Prüfer 20

1.7 La proprietà (S) nei domini di Prüfer 21

2 Funzioni olomorfe **27**

2.1 Proprietà elementari 27

2.2 Zeri di una funzione olomorfa 34

2.3 Singolarità delle funzioni olomorfe -
funzioni meromorfe 36

2.4 Fattorizzazione di funzioni olomorfe 41

3 Proprietà algebriche dell'anello delle funzioni intere **50**

3.1 Proprietà di divisibilità 50

3.2 Gli ideali di **E** 54

3.3 La dimensione di **E** 62

3.4 Localizzazioni 65

4 Una classe di domini di Prüfer simili all'anello delle funzioni intere: gli E-domini **67**

4.1 Non-D-anelli 68

4.2 Non-D-anelli di Prüfer 71

4.3 E-domini 74

4.4 E-sovranelli di domini Noetheriani 79

Bibliografia **85**

Ringraziamenti **88**

Introduzione

L'argomento di studio di questa tesi è l'anello delle funzioni intere: una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice **intera** se è olomorfa o derivabile (in senso complesso) in ogni punto di $\mathbb{C}$, od equivalentemente, se per ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$ esiste una serie di potenze $\sum_{k\geq 0} a_k(z - z_0)^k$ a coefficienti complessi, che converge assolutamente in $\mathbb{C}$ e tale che si abbia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z - z_0)^k$.

L'insieme $\mathbf{E} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ intera}\}$ è un anello rispetto alla somma e al prodotto di funzioni. I primi risultati che abbiamo provato concernono gli zeri di una funzione intera: indicando con Z_f^* l'insieme degli zeri distinti[1] di f, facciamo vedere che esso è discreto, concludendo che $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ è un dominio d'integrità.

Il primo a studiare le proprietà aritmetiche delle funzioni intere è stato O. Helmer[2] nel 1940; lo studio venne perfezionato nel 1952 da Melvin Henriksen[3] che classificò gli ideali nel seguente modo:

un ideale proprio I di $\mathbf{E}$ si dice **fisso** se $\bigcap_{f\in I} Z_f \neq \emptyset$, altrimenti si dice **libero**.

[1] La notazione è motivata dal fatto che con Z_f abbiamo indicato l'insieme degli zeri di f in cui gli zeri multipli sono ripetuti.

[2] [13], pag. 345-356.

[3] [14] pag. 179-184, [15] pag. 711-720.

Abbiamo provato le seguenti proprietà:

- **E** è un dominio di Bézout.
- **E** è pseudo-principale.
- **E** è completamente integralmente chiuso[4].
- **E** non è Noetheriano.

In seguito concentriamo la nostra attenzione sugli ideali massimali, dimostrando che

- Ogni ideale massimale fisso è della forma

  $$I(z_0) = \{f \in \mathbf{E} : f(z_0) = 0\} \qquad \text{con } z_0 \in \mathbb{C}$$

  e che il campo residuo di ogni ideale massimale fisso è isomorfo a $\mathbb{C}$. In particolare, considerata la funzione $t_a : z \to z - a$, con $a \in \mathbb{C}$, l'ideale $M_a = (t_a)$ è massimale e fisso e non contiene strettamente nessun ideale primo non nullo; viceversa, ogni ideale primo finitamente generato di **E** è della forma (t_{z_0}) per qualche $z_0 \in \mathbb{C}$.
- Se M è un ideale massimale libero, allora E/M contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{C}(Z)$, con Z indeterminata su $\mathbb{C}$.
- Per ogni ideale massimale M di **E** si ha che $M \neq M^2$.

Per quanto riguarda gli ideali primi, nel 1946 Schilling[5] asserì che ogni ideale primo è massimale; solo agli inizi degli anni '50 I. Kaplansky indicò ad Henriksen (in una conversazione) che tale affermazione era falsa e costruì un controesempio di ideale primo di **E** non massimale. Stabilito ciò, Henriksen trovò una caratterizzazione per gli ideali primi non massimali e mostrò che

[4]Anche se è noto che un dominio pseudo-principale è anche c.i.c, abbiamo preferito dare una dimostrazione diretta di tale fatto.

[5]O. F. G. Schilling, *Ideal theory on open Riemann surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pag. 945-963.

- Ogni ideale primo di $\mathbf{E}$ è contenuto in un unico ideale massimale.

- $\dim(\mathbf{E}) = +\infty$.[6]

Inoltre, abbiamo considerato le localizzazioni di $\mathbf{E}$ rispetto ai suoi ideali massimali fissi e abbiamo provato che

$$\mathbf{E} = \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \mathbf{E}_{M_a},$$

che gli $\mathbf{E}_{M_a}$ sono sovranelli di valutazione discreta (di $\mathbf{E}$) e che la rappresentazione è irridondante e quindi, come tale, è unica.

Una volta studiato l'anello $\mathbf{E}$, seguendo un articolo di Alan Loper del 1998, [18], abbiamo considerato una classe di domini di Prüfer simili all'anello delle funziomi intere, chiamati E-domini:

un dominio D con campo dei quozienti K si dice un E-**dominio** se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Esiste una collezione di sovranelli di valutazione Noetheriani di D, $W = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Per ogni $\lambda \in \Lambda$, indichiamo con v_λ la valutazione normalizzata su K corrispondente a V_λ, con M_λ l'ideale massimale di V_λ e con $P_\lambda = M_\lambda \cap D$.

2. $D = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

3. Esiste un polinomio monico $f(X) \in D[X]$ di grado ≥ 2, che è un uv-polinomio[7] per ogni V_λ.

4. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ esiste un elemento $d_\lambda \in D$ tale che $v_\lambda(d_\lambda) > 0$ e $v_\alpha(d_\lambda) = 0$, per ogni $\alpha \in \Lambda$ e $\alpha \neq \lambda$.

In accordo con la terminologia di Henriksen, Loper chiama W l'insieme dei sovranelli di valutazione fissi (mostrando che W è univocamente

[6]Noi per dimostrare questo abbiamo preferito generalizzare un esempio di Lapaza [17], pag. 42.

[7]un polinomio non costante $f(X) \in D[X]$ è un **uv-polinomio** se $f(y)$ è invertibile per ogni $y \in D$.

determinato); gli ideali $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ vengono detti ideali massimali fissi (giustificando in seguito la terminologia). Inoltre, Loper definisce un ideale I di un E-dominio D fisso se $I \subseteq P_\lambda$ per qualche massimale fisso P_λ, altrimenti lo definisce libero; in seguito Loper mostra che

- Ogni ideale finitamente generato I di un **E**-dominio è tale che esiste un intero positivo m per cui I^m è principale.
- Se un ideale finitamente generato I di un E-dominio D è contenuto in un numero finito di ideali massimali fissi $P_1, \ldots, P_t$ di D, allora $P_1, \ldots, P_t$ sono gli unici ideali massimali di D che contengono I.
- Ogni ideale massimale fisso è finitamente generato.
- Nessun ideale libero (se esiste) è finitamente generato.

Per affrontare l'argomento siamo partiti dalla classificazione dei domini d'integrità, suggerita da Gunji e McQuillan nel 1975, in D-anelli e non-D-anelli, concentrando la nostra attenzione sui secondi, essendo gli E-domini particolari non-D-anelli di Prüfer.

Per concludere, mostriamo un metodo, descritto da Loper, per costruire E-domini.

Capitolo 1

Prerequisiti

Cominceremo con il passare in rassegna rapidamente alcuni risultati relativi alla dipendenza integrale. Per semplicità, con il termine "anello" indicheremo sempre un anello commutativo con unità.

1.1 Dipendenza integrale

Definizione 1.1.1. *Siano S un anello ed $R \subseteq S$ un sottoanello. Un elemento $x \in S$ si dice* ***intero*** *su R, se x è radice di un polinomio monico a coefficienti in R, ossia se x soddisfa un'equazione della forma*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad a_i \in R, \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1.1.1}$$

Chiaramente ogni elemento di R è intero su R, diamo ora un esempio più significativo:

Esempio:

- Si consideri $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Se un elemento $x \in \mathbb{Q}$, diciamo $x = r/s$ (possiamo supporre MCD(r,s)=1), è intero su $\mathbb{Z}$, allora dall'equazione (1.1.1) si ottiene
$$r^n + a_1 r^{n-1} s + \cdots + a_n s^n = 0$$
dove gli a_i sono interi. Quindi s divide r^n, da cui $s = \pm 1$, cioè $x \in \mathbb{Z}$.

Illustriamo la caratterizzazione per gli elementi interi:

Proposizione 1.1.2. *Siano S un anello ed $R \subseteq S$ un sottoanello. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) $x \in S$ è intero su R;

2) Il sottoanello $R[x]$ è finitamente generato come R-modulo;

3) $R[x]$ è contenuto in un sottoanello C di S, che è finitamente generato come R-modulo;

4) Esiste un $R[x]$-modulo fedele[1] M che è finitamente generato come R-modulo.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2): Dalla (1.1.1) si ha che $\forall r \in \mathbb{N}$

$$x^{n+r} = -(a_1 x^{n+r-1} + \cdots + a_n x^r);$$

dunque, per induzione, tutte le potenze di x appartengono all'R-modulo generato da $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Quindi $R[x]$ è generato (come R-modulo) da $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

2) $\Rightarrow$ 3): Basta prendere $C = R[x]$.

3) $\Rightarrow$ 4): Basta prendere $M = C$, che è un $R[x]$-modulo fedele.

4) $\Rightarrow$ 1): Ciò segue dalla proposizione 2.4 di [2], prendendo per ϕ la moltiplicazione per x, ed $I = R$ (si ha che $xM \subseteq M$, perché M un $R[x]$-modulo); poiché M è fedele, si ha $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, essendo gli a_i opportuni elementi di R. □

Corollario 1.1.3. *Siano S un anello ed $R \subseteq S$ un sottoanello; siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementi di S interi su R. Allora il sottoanello $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ è finitamente generato come R-modulo.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su n. Il caso $n = 1$ è trattato nella proposizione 1.1.2. Supponiamo $n > 1$, e poniamo $R_k = R[x_1, x_2, \ldots, x_k]$; per ipotesi induttiva, R_{n-1} è un R-modulo finitamente generato. $R_n = R_{n-1}[x_n]$ è un R_{n-1}-modulo finitamente generato (segue dal caso $n = 1$, e dal fatto

[1] Ricordiamo che, dato un anello R, un R-modulo M si dice fedele se $\mathrm{Ann}\,(M) = \{x \in R : xM = 0\} = 0$.

che x_n è intero su R_{n-1}), da cui segue facilmente che R_n è un R-modulo finitamente generato (infatti, in generale, dati un anello A, un A-modulo finitamente generato B e un B-modulo finitamenente generato N, allora N è un A-modulo finitamente generato, perché se $y_1, \ldots, y_n$ è un sistema di generatori di N sopra B e se $x_1, \ldots, x_m$ è un sistema di generatori di B come A-modulo, allora gli mn prodotti $x_i y_j$ generano N sopra A). □

Corollario 1.1.4. *Siano S un anello ed $R \subseteq S$ un sottoanello, allora l'insieme C degli elementi di S che sono interi su R è un sottoanello di S che contiene R.*

Dimostrazione. Se $x, y \in C$, allora $R[x, y]$ è un R-modulo finitamente generato per il corollario 1.1.3. Allora per il punto 3) della proposizione 1.1.2, $x \pm y$ e xy sono interi su A. □

Definizione 1.1.5. *Siano S un anello ed $R \subseteq S$ un sottoanello. L'anello C degli elementi di S interi su R prende il nome di* ***chiusura integrale di*** *R in S. Se $C = R$, allora R si dice* ***integralmente chiuso in*** *S. Se $C = S$, allora S si dice* ***intero sopra*** *R. R si dice* ***integralmente chiuso*** *(senza ulteriori specificazioni) se è integralmente chiuso nel suo anello totale dei quozienti.*

Dall' esempio di pagina 5 si deduce che $\mathbb{Z}$ è integralmente chiuso.

1.2 Anelli completamente integralmente chiusi

Definizione 1.2.1. *Siano S un anello e $R \subseteq S$ un sottoanello. Sia $s \in S$; se per ogni $n > 0$, s^n appartiene ad un sotto R-modulo finitamente generato di S, allora diciamo che s è* ***quasi intero*** *su R. L'insieme $R_0 = \{s \in S : s$ è quasi intero su $R\}$ si dice* ***completa chiusura integrale di*** *R in S. Se $R = R_0$, allora diciamo che R è* ***completamente integralmente chiuso in*** *S. Se S è l'anello totale dei quozienti di R ed $R = R_0$, allora R è* ***completamente integralmente chiuso****.*

Proposizione 1.2.2. *Siano R un anello, T l'anello totale dei quozienti di R ed S la completa chiusura integrale di R in T. Allora $S = \{x \in T :$ esiste un elemento regolare $r \in R$, tale che $rx^n \in R$, per ogni intero positivo $n\}$.*

Dimostrazione. È chiaro che se $rx^n \in R$, $\forall n > 0$, con r regolare in R, allora $R[x]$ è contenuto in Rr^{-1}, l'$R-$sottomodulo di T generato da r^{-1}. Dunque, x è quasi intero su R. Se, viceversa, $y \in T$ è quasi intero su R e se $R[y] \subseteq Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_k \subseteq T$, allora possiamo trovare un elemento regolare $r \in R$ tale che $rm_i \in R$, per ogni i, $(1 \leq i \leq k)$. Quindi, $rR[y] \subseteq R$, ed in particolare, $ry^n \in R$, $\forall n > 0$. □

Chiaramente, dati un anello S ed $R \subseteq S$ un suo sottoanello, un elemento di S intero su R è anche quasi intero su R, ma il viceversa è falso! Per esempio, consideriamo l'anello $R = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] \subseteq S = \mathbb{Q}[X]$; allora R è integralmente chiuso, ma la completa chiusura integrale di R è $\mathbb{Q}[X]$, infatti basta prendere l'elemento $1/2$: questo è quasi intero su R, ma non è intero su R. Il viceversa vale però se R è Noetheriano: ciò segue facilmente dalla proposizione 1.1.2 e dal fatto che un modulo finitamente generato su un anello Noetheriano è un modulo Noetheriano.

1.3 Richiami sugli anelli di valutazione

Prima di dare la definizione di anello di valutazione, ricordiamo che un gruppo abeliano $(G, +)$ sul quale è definita una relazione d'ordine totale "$\leq$" compatibile con l'operazione del gruppo (ossia tale che per ogni $x, y, z \in G$, se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$) si dice **totalmente ordinato**.

Dato un gruppo totalmente ordinato G, esso può essere ampliato con un elemento, che denotiamo con ∞ non appartenente a G, che chiamiamo infinito, e indichiamo con $G_\infty = G \cup \{\infty\}$. A tale insieme possiamo estendere l'operazione del gruppo G e la relazione d'ordine totale ponendo per ogni $x \in G$

$$x < \infty \qquad \text{e} \qquad x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$$

Definizione 1.3.1. *Un dominio d'integrità V con campo dei quozienti K è un* ***anello di valutazione*** *se, per ogni $x \in K^*$, dove $K^* = K - \{0\}$, $x \in V$ o/e $x^{-1} \in V$*

Proposizione 1.3.2. *Sia V un anello di valutazione. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1) V è un anello locale.

2) Se V' è un anello tale che $V \subseteq V' \subseteq K$, allora V' è un anello di valutazione.

3) V è integralmente chiuso.

Dimostrazione. 1): Sia M l'insieme degli elementi non invertibili di V, quindi $x \in M \iff x = 0$ oppure $x^{-1} \notin V$; basta mostrare che M è un ideale di V. Se $a \in V$ e $x \in M$ si ha $ax \in M$, altrimenti $(ax)^{-1} \in V$ e dunque $x^{-1} = a(ax)^{-1} \in V$. Siano $x, y \in M$ due elementi non nulli. Allora o $xy^{-1} \in V$ oppure $x^{-1}y \in V$. Se $xy^{-1} \in V$, allora $x + y = (1 + xy^{-1})y \in VM \subseteq M$, e analogamente se $x^{-1}y \in V$. Dunque M è un ideale e quindi V è un anello locale.

2): Segue banalmente dalla definizione di anello di valutazione.

3): Sia $x \in K$ intero su V. Allora si ha

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

dove $a_i \in V$. Se $x \in V$, non c'è nulla da provare. Altrimenti, si ha $x^{-1} \in V$. Dall'equazione di dipendenza integrale di x su V, si ha

$$x^n = -(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

e moltiplicando per x^{1-n}, otteniamo che $x = -(a_0x^{1-n} + \cdots + a_{n-1})$. Pertanto x è un elemento di V. $\square$

Se V è un dominio di valutazione, allora l'insieme degli ideali è totalmente ordinato: infatti, l'insieme degli ideali principali è totalmente ordinato (perché se (x) e (y) sono due ideali principali di V tali che $(x) \nsubseteq (y)$, allora y non divide x, cioè $x/y \in K - V$ e per definizione di anello di valutazione,

$y/x \in V$, ovvero $(y) \subseteq (x)$). Siano I e J ideali di V e supponiamo che $I \nsubseteq J$; sia $x \in I - J$ e per ogni $y \in J$ si ha che $(x) \nsubseteq (y)$, quindi $(y) \subseteq (x)$, da cui $J \subseteq I$. Viceversa, se l'insieme degli ideali è totalmente ordinato e $x/y \in K - V$, con $x, y \in V$, cioé $(x) \nsubseteq (y)$, allora si ha che $(y) \subseteq (x)$, ovvero $y/x \in V$, da cui V è di valutazione.

Inoltre, *ogni ideale di V finitamente generato è principale*, infatti se $I = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, l'insieme $\{(a_i)\}_{i=1}^{r}$ degli ideali principali è totalmente ordinato rispetto all'inclusione, e quindi esiste un intero k tra 1 ed r per cui (a_i) è contenuto in (a_k). Di conseguenza $I = (a_k)$, cosicché I è principale.

Proveremo ora un risultato, dovuto originariamente a Krull[2], in cui si stabilisce che un dominio D è integralmente chiuso se, e soltanto se, può essere rappresentato come un'intersezione di suoi sovranelli[3] di valutazone. A tale scopo, consideriamo un campo K ed un campo algebricamente chiuso F; sia Σ l'insieme di tutte le coppie (R, f), dove R è un sottoanello di K e f è un omomorfismo di R in F. Introduciamo una relazione di ordine parziale in Σ nel seguente modo:

$$(R, f) \leq (R', f') \iff R \subseteq R' \text{ e } f'_{|R} = f\,.$$

Le condizioni del lemma di Zorn sono soddisfatte, e pertanto l'insieme Σ possiede almeno un elemento massimale. Sia (V, g) un elemento massimale di Σ. Come primo passo vogliamo provare che V è un anello di valutazione del campo K, e per fare ciò dimostriamo prima i seguenti due lemmi:

Lemma 1.3.3. *V è un anello locale ed $M = Ker(g)$ è il suo ideale massimale.*

Dimostrazione. Poiché $g(V)$ è un sottoanello di un campo e quindi un dominio d'integrità, l'ideale $M = Ker(g)$ è primo. Possiamo estendere g ad un omomorfismo $\tilde{g} : V_M \to F$, ponendo $\tilde{g}(y/s) = g(y)/g(s)$ per ogni $y \in V$ e per ogni $s \in V - M$, dato che $g(s) \neq 0$. Poiché la coppia (V, g) è massimale, si ha che $V = V_M$; quindi V è un anello locale ed M è il suo massimale. $\square$

[2]W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie*, J. reine angew. Math. 167 (1931), pag 169.

[3]ricordiamo che dato un dominio D con campo dei quozienti K, un anello D' tale che $D \subseteq D' \subseteq K$ si dice un **sovranello** di D.

Lemma 1.3.4. *Sia x un elemento non nullo di K. Sia $V[x]$ il sottoanello generato da x sopra V, e $M[x]$ l'estensione di M in $V[x]$. Allora o $M[x] \neq V[x]$ oppure $M[x^{-1}] \neq V[x^{-1}]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $M[x] = V[x]$ e $M[x^{-1}] = V[x^{-1}]$. Allora si avranno equazioni

$$u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1 \quad (u_i \in M)$$
$$v_0 + v_1 x^{-1} + \cdots + v_n x^{-n} = 1 \quad (v_j \in M)$$

e possiamo supporre che siano entrambe di grado minimo. Supponiamo inoltre che $m \geq n$ e moltiplichiamo la seconda per x^n:

$$(1 - v_0)x^n = v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n \,.$$

Poiché $v_0 \in M$, e per il lemma precedente V è locale, si ha che $1 - v_0$ è invertibile in V, e quindi l'ultima equazione può riscriversi nella forma

$$x^n = w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n \qquad (w_j \in M).$$

Dunque si può sostituire x^m nella prima equazione con $w_1 x^{m-1} + \cdots + w_n x^{m-n}$, e ciò contraddice la minimalità dell'esponente m. □

Teorema 1.3.5. *Sia (V, g) un elemento massimale di Σ. Allora V è un anello di valutazione del campo K.*

Dimostrazione. Occorre provare che se $x \neq 0$ è un elemento di K, allora o $x \in V$ oppure $x^{-1} \in V$. Per il lemma 1.3.4, possiamo supporre che $M[x]$ non sia l'ideale unità dell'anello $V' = V[x]$. Allora $M[x]$ è contenuto in un ideale massimale M' di V', e si ha $M' \cap V = M$ (perché $M' \cap V$ è un ideale proprio di V che contiene M). Dunque l'immersione di V in V' induce un'immersione del campo $K = V/M$ mel campo $K' = V'/M'$; inoltre $K' = K[\bar{x}]$, dove $\bar{x}$ è l'immagine di x in K', perciò $\bar{x}$ è algebrico su K e quindi K' è un'estensione algebrica finita di K.
L' omomorfismo g induce un'immersione $\bar{g}$ di K in F (perché per il lemma 1.3.3 M è il nucleo di g). Siccome F è algebricamente chiuso, $\bar{g}$ può essere esteso ad un'immersione $\bar{g}'$ di K' in F. Componendo $\bar{g}'$ con l'omomorfismo naturale $V' \to K'$, si ottiene un omomorfismo $g' : V' \to F$ che estende g. Ma dato che la coppia (V, g) è massimale, $V = V'$ e quindi $x \in V$. □

Corollario 1.3.6. *Sia D un sottoanello di un campo K. Allora la chiusura integrale $\bar{D}$ di D in K è l'intersezione di tutti gli anelli di valutazione di K che contengono D. In particolare, D è integralmente chiuso se, e soltanto se, può essere rappresentato come un'intersezione di suoi sovranelli di valutazione.*

Dimostrazione. Sia V un anello di valutazione di K tale che $D \subseteq V$. Essendo V integralmente chiuso (teorema 1.3.2), si ha che $\bar{D} \subseteq V$. Viceversa, sia x un arbitrario elemento di K tale che $x \notin \bar{D}$, x non appartiene all'anello $D' = D[x^{-1}]$. Dunque x^{-1} non è invertibile in D', e quindi è contenuto in un ideale massimale M' di D'. Sia F la chiusura algebrica del campo $K' = D'/M'$. Allora la restrizione a D dell'omomorfismo naturale $D' \to K'$ definisce un omomorfismo di D in F. Per il teorema 1.3.5, esso può essere esteso a qualche anello di valutazione $V \supseteq D$, e dato che x^{-1} viene mandato nello zero, ne segue che $x \notin V$. □

Diamo ora la definizione di valutazione:

Definizione 1.3.7. *Sia K un campo. Una* ***valutazione*** *di K a valori in un gruppo totalmente ordinato $(G, +)$, è un'applicazione v di K in G_∞ tale che, $\forall x, y \in K$, si ha*

(i) $v(x) = \infty \iff x = 0$;

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$;

(iii) $v(x + y) \geq min(v(x), v(y))$.

Osserviamo che se $K^* = K - \{0\}$ è il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di un campo, allora una valutazione v di K a valori in un gruppo totalmente ordinato G induce un omomorfismo di gruppi:

$$v_{|_{K^*}} : K^* \to G.$$

Allora, sostituendo G con l'immagine dell'omomorfismo $v_{|_{K^*}}$, si può sempre rendere una valutazione suriettiva. Il gruppo immagine di $v_{|_{K^*}}$ si dice **gruppo dei valori** di v.

Esempio:

- Sia p un numero primo; sia $z = \frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ e $y \neq 0$, un numero razionale non nullo. Allora
$$z = \frac{p^s x'}{p^r y'}\,, \tag{1.3.2}$$
dove p non divide né x' né y'. Possiamo considerare l'applicazione definita nel seguente modo:
$$v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_\infty$$
$$v_p(z) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad z = 0 \\ s - r & \text{se} \quad z \text{ si scrive come in (1.3.2)} \end{cases}$$
L'applicazione v_p è una valutazione su $\mathbb{Q}$ che si chiama **valutazione** p**-adica**. Quindi ogni elemento non zero $z \in \mathbb{Q}$ si può scrivere in modo unico nel seguente modo:
$$\pm \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(z)} \tag{1.3.3}$$
dove $\mathcal{P}$ è l'insieme dei numeri primi di $\mathbb{Z}$.
Ciò che abbiamo detto per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ può essere ripetuto per un qualsiasi dominio a fattorizzazione unica e per il suo campo dei quozienti (infatti nel prodotto (1.3.3) figurano soltanto un numero finito di fattori diversi da 1).

Sia v una valutazione sul campo K, definiamo l'insieme
$$A_v := \{x \in K : v(x) \geq 0\}.$$
A_v risulta essere un anello di valutazione, detto **anello associato alla valutazione v**, quindi, per la proposizione 1.3.2, risulta essere un anello locale avente ideale massimale
$$M_v = \{x \in K : v(x) > 0\}$$
ed insieme degli elementi invertibili $U(A_v) = \{x \in K : v(x) = 0\}$.

Ci occuperemo in particolare dei "domini di valutazione discreta":

Definizione 1.3.8. *Sia K un campo. Una* ***valutazione*** *su K si dice* ***discreta*** *se il suo gruppo di valori G è ciclico e infinito (cioè, isomorfo a $\mathbb{Z}$).*

Esempi di valutazioni discrete sono le valutazioni p-adiche.

Definizione 1.3.9. *Un dominio d'integrità D è detto* ***dominio di valutazione discreta (DVR)*** *se esiste una valutazione discreta v del suo campo dei quozienti K, tale che D sia l'anello associato alla valutazione v.*

Se $I \neq (0)$ è un ideale di un DVR D, esiste un minimo intero k tale che $v(x) = k$, per qualche $x \in I$. Pertanto I contiene ogni elemento $y \in D$ con $v(y) \geq k$ e quindi gli unici ideali non nulli di D sono gli ideali del tipo:

$$M_k = \{y \in D : v(y) \geq k\}.$$

Tali ideali formano un'unica catena

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \tag{1.3.4}$$

e pertanto D è *Noetheriano*.
Inoltre, poiché $v : K^* \to \mathbb{Z}$ è suriettiva, esiste un elemento $x \in M$ tale che $v(x) = 1$, e allora $M = (x)$, e $M_k = (x^k)$ per ogni $k \geq 1$. Quindi M è l'unico ideale primo non nullo di D, e D risulta essere un dominio locale noetheriano di *dimensione uno*, in cui ogni ideale non nullo è potenza dell'ideale massimale.

Viceversa, se (D, M) è un dominio locale Noetheriano di dimensione uno e se esiste un elemento $x \in D$, tale che ogni ideale non nullo è della forma (x^k), con k intero non negativo, allora D è un DVR: infatti è chiaro che $(x) = M$ e, come conseguenza del lemma di Nakayama (2.6, [2]), $(x^k) \neq (x^{k+1})$. Dunque se a è un arbitrario elemento non nullo di D, si ha che $(a) = (x^k)$ per un unico valore di k. Definiamo $v(a) = k$ ed estendiamo v a K^* ponendo $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$. Si verifica che v è ben definita ed è una valutazione discreta, e che D è l'anello di valutazione di v.

1.4 Ideali frazionari di un dominio d'integrità

Sia D un dominio d'integrità con campo dei quozienti K.

Definizione 1.4.1. *Ogni sotto D-modulo F di K per cui esiste un elemento $d \neq 0$ in D tale che $dF \subseteq D$, si dice un* ***ideale frazionario*** *di D.*

Ovviamente ogni ideale ordinario di D è frazionario, quando lavoreremo con l'insieme degli ideali frazionari di D, ci riferiremo sempre agli ideali ordinari (di D) come ad "ideali interi". Osserviamo che se $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ è un sottoinsieme finito di K, allora il sotto D-modulo di K generato da $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ è un ideale frazionario di D; ma se S è un arbitrario sottoinsieme di K, allora (S), il sotto D-modulo di K generato da S, può non essere frazionario, per esempio, K è frazionario di D solo se $K = D$.

Denotiamo con $\mathcal{F}(D)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di D; se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(D)$, allora come sottoinsiemi di K, $F_1 + F_2$ e F_1F_2 sono definiti da

$$F_1 + F_2 = \{x + y : x \in F_1, y \in F_2\} \qquad F_1F_2 = \{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i : x_i \in F_1, y_j \in F_2\}.$$

La seguente proposizione illustra alcune proprietà di base degli ideali frazionari:

Proposizione 1.4.2. *Sia D un dominio di integrità con campo dei quozienti K. Sia $\mathcal{F}(D)$ l'insieme degli ideali frazionari di D. Allora*

1) $\mathcal{F}(D)$ è chiuso rispetto all'addizione, alla moltiplicazione e all'intersezione.

2) $\mathcal{F}(D)$ è un semigruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione, con identità D.

Dimostrazione. La dimostrazione segue facilmente applicando la definizione di ideale frazionario. □

Dati due elementi $F, G \in \mathcal{F}(D)$, diciamo che "$F \prec G$" se ogni ideale frazionario principale che contiene F contiene anche G. Banalmente si vede che la relazione "$\prec$" definisce un preordinamento su $\mathcal{F}(D)$. Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza

$$\text{“}F \prec G \quad e \quad G \prec F\text{”} \tag{1.4.5}$$

canonicamente associata alla relazione di preordine "$\prec$", e $\mathcal{D}(D)$ l'insieme quoziente $\mathcal{F}(A)/\mathcal{R}$; chiameremo gli elementi di $\mathcal{D}(D)$ i **divisori** di D e, per ogni $F \in \mathcal{F}(D)$, indicheremo con $div(D)$ la sua classe in $\mathcal{D}(D)$. Chiaramente, passando al quoziente, il preordinamento "$\prec$" su $\mathcal{F}(D)$ definisce su $\mathcal{D}(D)$ un ordinamento, che noi denoteremo con "$\preceq$".

Per ogni $F \in \mathcal{F}(D)$ esiste, per ipotesi, un elemento $d \neq 0$ di D tale che $F \subseteq Dd^{-1}$; quindi per la proposizione precedente, l'intersezione F_v di tutti gli ideali frazionari principali contenenti F è un elemento di $\mathcal{F}(D)$. Chiaramente la relazione "$F \prec G$" è equivalente alla relazione $F_v \supseteq G_v$, e la relazione $F \supseteq G$ implica che "$F \prec G$". Pertanto due elementi $F, G \in \mathcal{F}(D)$ sono equivalenti modulo $\mathcal{R}$ se, e soltanto se, $F_v = G_v$.

Definizione 1.4.3. *Ogni elemento $F \in \mathcal{F}(D)$ tale che $F = F_v$ si dice un **ideale frazionario divisoriale** di D*

Abbiamo perciò che un ideale divisoriale è una intersezione non nulla di una famiglia non vuota di ideali frazionari principali. Ogni intersezione non nulla di una famiglia non vuota di ideali divisoriali è un ideale divisoriale. Per ogni $F \in \mathcal{F}(D)$, chiaramente, F_v è il più piccolo ideale divisoriale contenente F ed è equivalente ad F modulo $\mathcal{R}$. Inoltre, se G è un ideale divisoriale equivalente ad F modulo $\mathcal{R}$, allora $F_v = G_v = G$. Dunque F_v è l'unico ideale divisoriale G tale che $div(F) = div(G)$.

Siano F, G due elementi di $\mathcal{F}(D)$; denotiamo con $[G : F]$ (od anche con $[G : F]_K$) l'insieme di tutti gli $x \in K$ tali che $xF \subseteq G$. Ovviamente $[G : F]$ è un D-modulo ed appartiene a $\mathcal{F}(D)$, infatti se d è un elemento non nullo di D tale che $dG \subseteq D$ e $dF \subseteq D$ ed a è un elemento non nullo di $F \cap D$, allora $da[G : F] \subseteq D$; in altre parole, se b è un elemento non nullo di G, allora $bdF \subseteq G$, dunque $bd \in [G : F]$ e $[G : F] \neq (0)$. La definizione di $[G : F]$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$[G : F] = \bigcap_{x \in F - \{0\}} Gx^{-1} \tag{1.4.6}$$

Proposizione 1.4.4. *Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Allora:*

1) Se G è un ideale divisoriale e $F \in \mathcal{F}(D)$, allora $[G : F]$ è divisoriale.

2) Siano $F, G \in \mathcal{F}(D)$; allora $div(F) = div(G) \iff [D : G] = [D : F]$.

3) Per ogni $F \in \mathcal{F}(D)$, $F_v = [D : [D : F]]$.

Dimostrazione. 1): Segue immediatamente dalla (1.4.6), infatti se G è divisoriale anche Gx^{-1} lo è per ogni $x \neq 0$.

2): Denotiamo con $P(F)$ l'insieme di tutti gli ideali frazionari principali contenenti F. La relazione $Dx \in P(F)$ è equivalente a $F \subseteq Dx$, da cui $x^{-1}F \subseteq D$ e dunque $x^{-1} \in [D : F]$. Pertanto la relazione $div(F) = div(G)$ è equivalente a $P(F) = P(G)$, che è equivalente ad $[D : G] = [D : F]$.

3): Sappiamo che $F[D : F] \subseteq D$ e $F \subseteq [D : [D : F]]$. Sostituendo F con $[D : F]$ in questa formula, si ottiene $[D : F] \subseteq [D : [D : [D : F]]]$; inoltre, la relazione $F \subseteq [D : [D : F]]$ implica che $[D : F] \supseteq [D : [D : [D : F]]]$. Dunque $[D : F] = [D : [D : [D : F]]]$ e per il punto 2) $div(F) = div([D : [D : F]])$. Quindi $[D : [D : F]]$ è divisoriale per il punto 1) e quindi $F_v = [D : [D : F]]$.

□

1.5 Domini di Prüfer

Continuiamo il discorso sugli ideali frazionari, introducendo la definizione di ideale frazionario invertibile:

Definizione 1.5.1. *Un ideale frazionario F, non nullo, di un dominio d'integrità D si dice* ***invertibile*** *se esiste $G \in \mathcal{F}(D)$ tale che $FG = D$.*

Proposizione 1.5.2. *Se F è un ideale frazionario invertibile di D, allora*

$$F^{-1} := [D : F] = \{x \in K : xF \subseteq D\}$$

è l'unico inverso di F in $\mathcal{F}(D)$.

Dimostrazione. Sia G un inverso di F in $\mathcal{F}(D)$, quindi $FG = D$. Chiaramente $G \subseteq F^{-1} = [D : F]$. Moltiplicando tutto per F si ottiene $D = FG \subseteq FF^{-1} \subseteq D$, dunque $G = F^{-1}$. □

Teorema 1.5.3. *Sia D un dominio. Ogni ideale frazionario invertibile di D è finitamente generato.*

Dimostrazione. Sia $I \subset D$ un ideale invertibile, cioè $II^{-1} = D$; allora si ha che $\sum a_i b_i = 1$, con $a_1 \in I$, $b_j \in I^{-1}$. Vogliamo mostrare che gli a_i generano I: se $x \in I$ abbiamo che $x = x \sum a_i b_i = \sum (x b_i) a_i$, con $x b_i \in D$. □

Osservazione 1.5.4. *Ogni ideale frazionario principale non nullo è invertibile: se $I = (y)$, $y \neq 0$ (y potrebbe non stare in D, ma nel suo campo dei quozienti), allora $I^{-1} = (y^{-1})$ e $II^{-1} = D$.*

Lemma 1.5.5. *Ogni ideale invertibile in un dominio locale D è principale.*

Dimostrazione. Utilizziamo la notazione della dimostrazione del teorema 1.5.3. Gli elementi $a_i b_i \in D$ e la loro somma è 1, quindi uno tra questi, diciamo $a_1 b_1$, è invertibile. Si deduce che $I = (a_1)$, infatti ogni elemento $y \in I$ si scrive come $y = a_1 (y b_1) u$ dove u è invertibile in D e $y b_1 \in II^{-1} = D$.

□

Lemma 1.5.6. *Sia I un ideale finitamente generato di un dominio d'integrità D. Allora I è invertibile $\iff$ I_M è principale, per ogni ideale massimale $M \subset D$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Se I è invertibile, allora anche I_M è invertibile in D_M, e quindi, per il lemma 1.5.5, è principale.

($\Leftarrow$): Se $II^{-1} \neq D$, allora II^{-1} è contenuto in un massimale M. In D_M, per ipotesi, I_M è principale; un generatore può essere scelto, in modo che sia un $y \in I$. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un sistema di generatori per I; abbiamo che $s_j a_j \in (y)$, per opportuni elementi $s_j \in D - M$. Sia $s = s_1 s_2 \cdots s_n$, allora sy^{-1} è tale che $sy^{-1} a_j \in D$, per ogni j, $1 \leq j \leq n$, cioè $sy^{-1} \in I^{-1}$. Ma $s = sy^{-1} y \in I^{-1} \subset M$, che è una contraddizione. □

Lemma 1.5.7. *Un dominio locale è un dominio di valutazione se, e soltanto se, è un dominio di Bézout.*

Dimostrazione. Un dominio di valutazione è sempre un dominio di Bézout. Viceversa, sia D un dominio di Bézout locale; dati due elementi $a, b \in D$, possiamo supporre che $MCD(a, b) = 1$ (altrimenti dividiamo entrambi per il loro massimo comun divisore), cosicché $(a, b) = D$; poiché esistono $\mu, \lambda \in D$ tali che $\mu a + \lambda b = 1$, si ha che μa o λb deve essere invertibile, diciamo μa, per cui a è invertibile e divide b. □

Definizione 1.5.8. *Un **dominio di Prüfer** è un dominio d'integrità in cui ogni ideale non nullo finitamente generato è invertibile.*

Osservazione 1.5.9. *In un dominio di Bézout ogni ideale finitamente generato è principale, pertanto ogni ideale non nullo finitamente generato è invertibile. Allora, ogni dominio di Bézout è di Prüfer.*

Teorema 1.5.10. *Sia D un dominio d'integrità, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) D è di Prüfer;

2) Per ogni ideale primo P, D_P è un dominio di valutazione;

3) Per ogni ideale massimale M, D_M è un dominio di valutazione.

Dimostrazione. 1)⇒2): Sia J un ideale, non nullo, finitamente generato di D_P. Se J è generato da $a_1/s_1, \ldots, a_n/s_n$ ($a_i, s_i \in D$, $s_i \notin P$), allora $J = I_P$, dove $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Per ipotesi I è invertibile; quindi I_P è invertibile in D_P e, per il lemma 1.5.5, J è principale. Per il lemma 1.5.7, D è un dominio di valutazione.

2)⇒3) è banale.

3)⇒1): Sia I un ideale, non nullo, finitamente generato di D. Allora, ogni ideale I_M è principale, e per il lemma 1.5.6, I è invertibile. □

Corollario 1.5.11. *Sia D un dominio di Prüfer, che non sia un campo; allora D è integralmente chiuso.*

Dimostrazione. Sia $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'insieme degli ideali primi di D. Ogni D_{P_λ} è un anello di valutazione, e quindi è integralmente chiuso, per la proposizione 1.3.2. Allora $D = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_{P_\lambda}$ è integralmente chiuso. □

Proposizione 1.5.12. *Siano D un dominio di Prüfer e $P \subset D$ un ideale primo. Allora D/P è un dominio di Prüfer.*

Dimostrazione. Ogni ideale primo di D/P è della forma Q/P, per qualche ideale primo $Q \subset D$, che contiene P. Inoltre $(D/P)_{Q/P} \simeq D_Q/P^e$. Essendo D di Prüfer, D_Q è un anello di valutazione (per il teorema 1.5.10), e quindi D_Q/P^e è ancora un anello di valutazione; ne segue che, sempre per il teorema 1.5.10, D/P è di Prüfer. □

1.6 Cenni sui sovranelli di un dominio di Prüfer

Il seguente teorema ci fornisce un'importante proprietà sui sovranelli di valutazione di un dominio di Prüfer:

Teorema 1.6.1. *Sia D un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e sia V un sovranello di valutazione di D. Allora $V = D_P$, per qualche ideale primo $P \subset D$.*

Dimostrazione. Sia M l'unico ideale massimale di V, e poniamo $P = M \cap D$. Per ogni $s \in D - P$, si deve avere che $s^{-1} \in V$, altrimenti $s \in M$, e così $s \in P$. Quindi $D_P \subseteq V$. Per provare che $V \subseteq D_P$, utilizziamo il fatto che, per il teorema 1.5.10, D_P è un dominio di valutazione; Così se $v \in V$, ma $v \notin D_P$, abbiamo che $v^{-1} \in D_P$, diciamo $v^{-1} = a/s$, con $a, s \in D$ ed $s \notin P$. Otteniamo che $a \in P$, altrimenti a/s sarebbe invertibile in D_P, e quindi $v \in D_P$. Quindi $a \in M$ e $av \in M$, $s = av \in M \cap D = P$, che è una contraddizione. □

Nel prossimo paragrafo studieremo una particolare proprietà dei domini di Prüfer, ovvero la possibilità di rappresentare questi ultimi come un'intersezione "irridondante" di sovranelli di valutazione; a tale scopo è utile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.6.2. *Sia D' un sovranello di un dominio di Prüfer D. Sia Θ l'insieme degli ideali primi P di D, tali che $PD' \subset D'$. Allora*

1) Se P' è un ideale primo proprio di D' e se $P = P' \cap D$, allora $D_P = D'_{P'}$ e $P' = PD_P \cap D'$, da cui D' è un Prüfer.

2) Se P è un ideale primo proprio di D, allora $P \in \Theta \iff D_P \supseteq D'$. Inoltre, $D' = \bigcap_{P \in \Theta} D_P$.

3) Se A' è un ideale di D' e se $A = A' \cap D$, allora $A' = AD'$.

4) $\{PD'\}_{P \in \Theta}$ è l'insieme degli ideali primi propri di D'.

Dimostrazione. 1): Sia $S = D - P$. Chiaramente $D'_{P'} \supseteq D'_S \supseteq D_S = D_P$. E poiché D_P è un dominio di valutazione, $D'_{P'}$ è un dominio di valutazione che è un anello quoziente di D_P. Segue che $D'_{P'}$ è un anello quoziente di D, e siccome $D'_{P'}$ è locale, $D'_{P'} = D_Q$, dove $Q = P'D'_{P'} \cap D = P'D'_{P'} \cap D' \cap D = P' \cap D = P$. Quindi $D'_{P'} = D_P$ e $P' = P'D'_{P'} \cap D'$.

2): Se $D_P \supseteq D'$, allora $PD' \subseteq PD_P \subset D_P$, cosicché $PD' \subset D'$. E se $PD' \subset D'$, allora esiste un ideale massimale M di D' contenente PD'. Abbiamo che $P \subseteq M \cap D$, cosicché $D_P \supseteq D_{M \cap D}$. Per il punto 1), $D_{M \cap D} = D'_M \supseteq D'$. Quindi, $P \in \Theta \iff D' \subseteq D_P$. L'inclusione $D' \subseteq \bigcap_{P \in \Theta} D_P$ è chiara; l'altra inclusione è vera perché $D' = \bigcap D'_{M'}$, ($M' \subset D'$, ideali massimali), e per il punto 1) ogni $D'_{M'}$ è della forma D_P per qualche $P \in \Theta$.

3): Dobbiamo solo mostrare che $A' \subseteq AD'$. Se $\{M_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ è l'insieme degli ideali massimali di D', Allora $A' = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} A'D'_{M_\sigma}$. Se $P_\sigma = M_\sigma \cap D$, allora $D'_{M_\sigma} = D_{P_\sigma}$, per ogni $\sigma \in \Sigma$. Quindi, $A'D'_{M_\sigma} = A'D_{P_\sigma}$, e se $x \in A'D_{P_\sigma}$, $x = a'/v$ per qualche $a' \in A'$, $v \in D - P_\sigma$. Inoltre, $A' \subseteq D' \subseteq D_{P_\sigma}$, cosicché $a' = d/u$ per qualche $d \in D$, $u \in D - P_\sigma$. Allora si ha $d = a'u \in A' \cap D = A$ e $x = a/uv \in AD_{P_\sigma} = AD'D_{P_\sigma} = AD'D'_{M_\sigma}$. Quindi, $A'D'_{M_\sigma} = AD'D'_{M_\sigma}$ per ogni $\sigma \in \Sigma$, il che implica $A' = AD'$

4): Dal punto 3) segue che ogni ideale primo proprio di D' è della forma PD', per qualche $P \in \Theta$. Se, viceversa, $P \in \Theta$, allora $D' \subseteq D_P$ e $PD_P \cap D'$ è un ideale primo proprio di D' tale che $PD_P \cap D' = [PD_P \cap D' \cap D]D' = PD'$. $\square$

1.7 La proprietà (S) nei domini di Prüfer

Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Abbiamo mostrato che D è integralmente chiuso se, e soltanto se D può essere rappresentato come un'intersezione di suoi sovranelli di valutazione (corollario 1.3.6). Se $H = \{V_\lambda\}$ è un insieme di sovranelli di valutazione di D, tali che $D = \bigcap_\lambda V_\lambda$, diciamo che $V_\alpha \in H$ è **superfluo** nella rappresentazione $D = \bigcap_\lambda V_\lambda$, se $D = \bigcap_{\lambda \neq \alpha} V_\lambda$, ovvero se l'omissione di V_α dall'intersezione non cambia il risultato. La rappresentazione $D = \bigcap_\lambda V_\lambda$ è detta, invece, **irridondante** se non esistono in H domini di valutazione superflui. Se D ammette una rappresentazione irridondante, diremo che D gode della proprietà (S), ed ogni rappresentazione irridondante di D sarà chiamata una **S-rappresentazione**.

Considereremo S-rappresentazioni di domini di Prüfer.[4] Ricordiamo che un dominio di Prüfer D è caratterizzato dalla proprietà che, se V è un sovranello di valutazione di D, allora $V = D_P$, dove P è il centro di V su D (teorema 1.6.1). Daremo una condizione necessaria e sufficiente affinché un dominio di Prüfer D verifichi la proprietà (S); in particolare mostreremo che se D gode della proprietà (S), allora D ha un'unica S-rappresentazione.

I primi risultati riguardano il "trasformato" di un ideale, un concetto introdotto da Nagata[5] nel 1956:

Definizione 1.7.1. *Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Sia $I \subseteq D$ un ideale. Il **trasformato** di I è definito essere $\bigcup_{n\geq 1} I_n$, dove $I_n = [D : I^n]_K = \{x \in K : xI^n \subseteq D\}$.*

Il trasformato di I è un sovranello di D. In particolare, se l'ideale I è invertibile, allora I_1 è l'inverso di I e, per ogni n, $I_n = (I^n)^{-1}$. Se I è invertibile e T è il trasformato di I, allora $IT = T$.

Lemma 1.7.2. *Sia I un ideale invertibile di un dominio D e sia T il trasformato di I. Se $P \subseteq D$ è un ideale primo, allora $I \subseteq P \Longleftrightarrow PT = T$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow)$: Se $I \subseteq P$, allora $T = IT \subseteq PT$, cosicché $PT = T$.
$\Leftarrow)$: Se $PT = T$, abbiamo che $1 = \sum_{i=1}^n p_i t_i$, dove ogni $p_i \in P$ ed ogni $t_i \in T$. Dalla definizione di T, esiste un intero positivo m tale che $t_i I^m \subseteq D$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Se $x \in I^m$, allora $x = \sum_{i=1}^n p_i(t_i x) \subseteq P$. Segue che $I^m \subseteq P$ e poiché P è primo, $I \subseteq P$. $\square$

Ora considereremo il trasformato di un ideale di un dominio di Prüfer. D'ora in poi, fino alla fine del paragrafo, D *denoterà sempre un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K.*

[4] L'argomento si può consultare in [11].
[5] M. Nagata, *A treatise on the 14-th problem of Hilbert*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 30, (1956) pag 58.

Proposizione 1.7.3. *Sia I un ideale non nullo, finitamente generato di un dominio di Prüfer D, e sia T il trasformato di I. Se P è un ideale primo proprio di D, allora $T \subseteq D_P \iff I \nsubseteq P$. Se $\{P_\alpha\}$ è la collezione degli ideali primi di D non contenenti I, allora $T = \bigcap_\alpha D_{P_\alpha}$.*

Dimostrazione. Poiché D è di Prüfer, I è invertibile. Per il lemma 1.7.2, $PT = T \iff P \supseteq I$. Per il teorema 1.6.2, $PT = T \iff D_P \nsupseteq T$. Il teorema 1.6.2 mostra anche che $T = \bigcap_\beta D_{Q_\beta}$, dove $\{Q_\beta\}$ è l'insieme degli ideali primi di D tali che $T \subseteq D_{Q_\beta}$. Per le osservazioni precedenti $\{Q_\beta\} = \{P_\alpha\}$. $\square$

Lemma 1.7.4. *Siano B e C due ideali finitamente generati di un dominio di Prüfer D. Allora $B \cap C$ e $(B : C) = \{d \in D : dC \subseteq B\}$ sono finitamente generati.*

Dimostrazione. Si ha che $BC = (B \cap C)(B + C)$, ([10], 25.2 (d)). Essendo BC invertibile, anche $B \cap C$ è invertibile, e quindi, per il teorema 1.5.3, è finitamente generato. Inoltre, osserviamo che $(B : C) = ((B \cap C) : C)$, e poiché C è invertibile, esiste un ideale A tale che $CA = B \cap C$. Segue che A è invertibile e che $A = ((B \cap C) : C)$. Quindi $A = (B : C)$ è finitamente generato. $\square$

Se ξ è un elemento di $K - D$, allora definiamo $A_\xi = \{d \in D : d\xi \in D\}$. A_ξ e un ideale di D e se $\xi = a/b$, con $a, b \in D$, allora $A_\xi = ((b) : (a)) = \{d \in D : da \in bD\}$.

Lemma 1.7.5. *$D[\xi]$ è il trasformato dell'ideale A_ξ.*

Dimostrazione. Sia T il trasformato di A_ξ, per la proposizione 1.7.3 $T = \bigcap_\alpha D_{P_\alpha}$, dove $\{P_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali primi non contenenti A_ξ. Ma, un ideale primo P di D non contiene $A_\xi \iff \xi \in D_P$, cioè se, e soltanto se $D[\xi] \subseteq D_P$. Per il teorema 1.6.2 segue che $D[\xi] = \bigcap_\alpha D_{P_\alpha} = T$. $\square$

Proposizione 1.7.6. *Sia $\{P_\alpha\} \cup \{P\}$ un insieme di ideali primi di un dominio di Prüfer D. Allora $\bigcap_\alpha D_{P_\alpha}$ è contenuta in $D_P \iff$ ogni ideale finitamente generato contenuto in P è contenuto in qualche P_α.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un ideale finitamente generato A in P, che non è contenuto in nessun P_α. Sia T il trasformato di A. La proposizione 1.7.3 mostra che $T \subseteq \bigcap_\alpha D_{P_\alpha}$ e $T \nsubseteq D_P$. Quindi, $\bigcap_\alpha D_{P_\alpha}$ non è contenuto in D_P. Viceversa, supponiamo che $\bigcap_\alpha D_{P_\alpha}$ non sia contenuto in D_P. Scegliamo $\xi \in (\bigcap_\alpha D_{P_\alpha}) - D_P$. Per il lemma 1.7.5, $A_\xi = \{d \in D : d\xi \in D\}$ è finitamente generato, quindi $\xi \notin D_P$ e A_ξ è contenuto in P. Poiché $\xi \in D_{P_\alpha}$, per ogni α, A_ξ non è contenuto in nessun P_α. □

Corollario 1.7.7. *Se $\{P_\alpha\}$ è un insieme di ideali primi di un dominio di Prüfer D, allora $D = \bigcap_\alpha D_{P_\alpha} \iff$ ogni ideale proprio finitamente generato di D è contenuto in qualche P_α.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione 1.7.6. □

Lemma 1.7.8. *Sia $\{P\} \cup \{P_\gamma\}$ un insieme di ideali primi di un dominio di Prüfer D, tali che $D = D_P \cap (\bigcap_\gamma D_{P_\gamma})$, e tali che D è propriamente contenuto in $\bigcap_\gamma D_{P_\gamma}$. Allora P è un ideale massimale ed esiste un ideale finitamente generato A contenuto in P che non è contenuto in alcun P_γ. Per ognuno di tali ideali A finitamente generati, P è l'unico ideale massimale di D che li contiene.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.7.6, esiste un ideale finitamente generato $A \subseteq P$, ma non contenuto in nessun P_γ. Se M è un ideale massimale contenente A e se $x \in M$, allora per il corollario 1.7.7 abbiamo che $A + (x)$ è contenuto in P o in qualche P_γ; poiché $A \nsubseteq P_\gamma$, concludiamo che $A + (x) \subseteq P$ e che $M = P$, e quindi P è massimale ed è l'unico massimale contenente A. □

Denotiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme di tutti gli ideali massimali M di un dominio di Prüfer D che hanno la seguente proprietà: esiste un ideale di D finitamente generato A, tale che M è l'unico massimale di D che lo contiene.

Teorema 1.7.9. *Sia $\{P_\beta\}$ un insieme di ideali primi di un dominio di Prüfer D tali che $D = \bigcap_\beta D_{P_\beta}$. Se la rappresentazione $D = \bigcap_\beta D_{P_\beta}$ è irridondante, allora $\{P_\beta\} = \mathcal{M}$.*

Dimostrazione. Il lemma 1.7.8 mostra che ogni $P_\beta \in \mathcal{M}$, e dalla proposizione 1.7.6 segue che $\{P_\beta\}$ non è contenuto propriamente in $\mathcal{M}$. □

Corollario 1.7.10. *Un dominio di Prüfer D ha la proprietà $(S) \iff D = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} D_M$*

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 1.7.6 e il teorema 1.7.9. □

Corollario 1.7.11. *Se un dominio di Prüfer D ha la proprietà (S), allora la rappresentazione di D come un'intersezione irridondante di sovranelli di valutazione è unica.*

Teorema 1.7.12. *In un dominio di Prüfer D le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) D ha la proprietà (S).

2) Ogni ideale proprio di D finitamente generato è contenuto in qualche $M \in \mathcal{M}$.

3) Per ogni ideale proprio A di D finitamente generato, esiste un ideale B finitamente generato, tale che $A+B$ è contenuto in un unico ideale massimale di D.

Dimostrazione. 1)⇒2): Se D ha la proprietà (S), allora il corollario 1.7.10 mostra che $D = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} D_M$. Perciò, per il corollario 1.7.7, ogni ideale proprio finitamente generato è contenuto in qualche $M \in \mathcal{M}$.

2)⇒3): Sia A un ideale proprio finitamente generato di D e sia $M \in \mathcal{M}$ contenente A. Dalla definizione di $\mathcal{M}$ esiste un ideale finitamente generato B, tale che M è l'unico massimale contenente B. $A+B$ è un ideale finitamente generato ed M è l'unico massimale che lo contiene.

3)$\Rightarrow$1): La condizione 3) implica che ogni ideale proprio finitamente generato di D è contenuto in qualche $M \in \mathcal{M}$. Il corollario 1.7.7 mostra che $D = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} D_M$. Quindi, per il corollario 1.7.10, D ha la proprietà (S). $\square$

Corollario 1.7.13. *Se un dominio di Prüfer D ha la proprietà (S) e se A è un ideale finitamente generato di D, tale che A è contenuto solo in un numero finito di ideali $M_1, M_2, \dots, M_s \in \mathcal{M}$, allora $M_1, M_2, \dots, M_s$ sono gli unici ideali massimali di D che contengono A.*

Dimostrazione. Supponiamo che N sia un ideale massimale di D, $N \notin \{M_i\}_{i=1}^{s}$, e sia $y \in N - (\bigcup_{i=1}^{s} M_i)$. Allora l'ideale $B = A + (y)$ non è contenuto in nessun $M \in \mathcal{M}$. Quindi $B = D$ e A non è contenuto in N. $\square$

Osservazione 1.7.14. *Segue dal teorema 1.7.12 che se D è un dominio di Dedekind, allora D ha la proprietà (S) e l'unica S-rappresentazione di D è $\bigcap_{\lambda} D_{M_\lambda}$, dove $\{M_\lambda\}$ è l'insieme di tutti gli ideali massimali di D. Poiché $\{D_{M_\lambda}\}$ è l'insieme di tutti i sovranelli di valutazione di D non banali, $D = \bigcap_{\lambda} D_{M_\lambda}$ è, infatti, l'unica rappresentazione di D come intersezione di suoi sovranelli di valutazione non banali.*

Capitolo 2

Funzioni olomorfe

2.1 Proprietà elementari

Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi; $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico con distanza $d(z,w) = |z-w|$, dove $z, w \in \mathbb{C}$. Si hanno pertanto le nozioni standard di insiemi aperti e chiusi, di compattezza, di connessione, di convergenza e di continuità; *d'ora in avanti denoteremo con* Ω *un aperto di* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$, ovvero una funzione complessa di variabile complessa, può essere vista anche come una funzione da un aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (identificando $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con la coppia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) e quindi si potrebbe parlare di differenziabilità di f e di matrice jacobiana di f. D'altra parte in $\mathbb{C}$ (a differenza di $\mathbb{R}^2$) vi è definito un prodotto naturale e dunque ha senso parlare di rapporto incrementale e di derivabilità:

Definizione 2.1.1. *Una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *si dice* ***olomorfa*** *o* ***derivabile (in senso complesso) in un punto*** $z_0 \in \Omega$, *se esiste il limite del rapporto incrementale*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

In tal caso esso si denota con $f'(z_0)$ *o con* $\frac{df}{dz}(z_0)$. f *si dice* ***olomorfa*** *o* ***derivabile (in senso complesso)*** *in* Ω, *se lo è in ogni punto di* Ω.

Indicheremo la classe di tutte le funzioni olomorfe in Ω con $H(\Omega)$.

Osservazione 2.1.2. *Se $f \in H(\Omega)$ e $g \in H(\Omega)$, allora $f+g \in H(\Omega)$ e $fg \in H(\Omega)$, si verifica facilmente che $(H(\Omega), +, \cdot)$ è un anello.*

Definizione 2.1.3. *Le funzioni olomorfe in tutto il piano si dicono **intere**, e denoteremo l'anello delle funzioni intere con $\boldsymbol{E}$.*

Esempi:

- Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la funzione complessa di variabile complessa $z \to z^n$ è intera e lo stesso accade per ogni funzione polinomiale $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- $f : z \to \frac{1}{z^n}$ è olomorfa in $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ per ogni naturale $n \geq 1$; in generale se $f_1, f_2 \in H(\Omega)$, allora $\frac{f_1}{f_2}$ è definita ed olomorfa in ogni aperto contenuto nel sottoinsieme degli $z \in \Omega$ tali che $f_2(z) \neq 0$.

- La funzione esponenziale è una funzione intera, lo stesso vale per le funzioni trigonometriche $\sin z$ e $\cos z$ e per le funzioni iperboliche $\sinh z$ e $\cosh z$.

- Diamo ora un esempio di funzione complessa di variabile complessa non derivabile. Sia $f(z) = \bar{z}$, dove la barra, come d'uso comune, denota il complesso coniugato. Osserviamo che se f è derivabile in z_0, allora comunque si scelga una successione di numeri complessi $z_n \to z_0$, si ha $\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} \to f'(z_0)$. Fissiamo z_0 e consideriamo le successioni $z_n = z_0 + \frac{1}{n}$ e $w_n = z_0 + i\frac{1}{n}$. Si verifica immediatamente che $z_n \to z_0$, $w_n \to z_0$ e
$$\frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} = 1, \qquad \frac{\bar{w}_n - \bar{z}_0}{w_n - z_0} = -1.$$
Da questo segue che la funzione $z \to \bar{z}$ non è derivabile in alcun punto.

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z \in \Omega$, allora abbiamo che

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} . \tag{2.1.1}$$

Come detto precedentemente, f può essere vista come una funzione da un aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, identificando $z = x + iy$ con la coppia (x, y) ed i valori di

f con (u, v), (dove $u \equiv$Re f e $v \equiv$Im f), cosicché $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. In tal caso la (2.1.1) implica che le funzioni u e v ammettono derivate parziali e che

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) \ , \qquad (2.1.2)$$

e dunque che

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \qquad \text{e} \qquad v_x(x, y) = -u_y(x, y) \, . \qquad (2.1.3)$$

Tali equazioni sono note come **le equazioni di Cauchy-Riemann**.

Inoltre, se $w = h + ik$, dalle (2.1.2) e (2.1.3) segue che

$$f'(z)w = (u_x h - v_x k) + i(v_x h + u_x k) = (u_x h + u_y k) + i(v_x h + v_y k) \, ,$$

relazione che tramite l'identificazione di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ può essere riscritta come segue:

$$f'(z)w = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Quindi, *se f è derivabile (in senso complesso) in z, allora l'applicazione $(x, y) \to (u, v)$ è differenziabile in (x, y).* Viceversa, il quarto esempio della pagina precedente mostra che *la nozione di derivabilità in senso complesso è più forte della nozione di differenziabilità dell'applicazione associata* $(x, y) \to (u, v)$: infatti la funzione $(x, y) \to (x, -y)$ è chiaramente differenziabile su $\mathbb{R}^2$, ma la funzione complessa ad essa associata $f : z \to \bar{z}$, come visto, non è derivabile in alcun punto.

Se, invece, si ha che $(x, y) \to (u, v)$ è differenziabile in (x, y) e se u e v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann date dalle (2.1.3), allora $f(z) \equiv u + iv$ è derivabile in $z = x + iy$; in tal caso infatti, se $w = h + ik$, per la differenziabilità $(x, y) \to (u, v)$ e per le (2.1.3), si ha

$$\begin{aligned} f(z + w) &= f(z) + (u_x h + u_y k) + i(v_x h + v_y k) + o(w) \\ &= f(z) + (u_x h - v_x k) + i(v_x h + u_x k) + o(w) \\ &= f(z) + \alpha w + o(w), \qquad \text{con } \alpha \equiv u_x + iv_x \end{aligned}$$

Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.4. *Date due funzioni $(x, y) \to u(x, y)$, $v(x, y)$ (ed identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, associando a (x, y) il numero complesso $z = x + iy$), condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione $z \to f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ definisca una funzione olomorfa in $z = x + iy$ è che $(x, y) \to (u, v)$ sia differenziabile in (x, y) e che in tal punto valgano le equazioni di Cauchy-Riemann date dalle (2.1.3).*

Sebbene la discussione appena fatta possa far pensare che l'analisi delle funzioni complesse di variabile complessa sia analoga a quella delle funzioni di variabile reale, nello studio delle funzioni olomorfe appaiono straordinari fenomeni, ad esempio, evidenzieremo il fatto che una funzione olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ è rappresentabile come "serie di potenze" nell'intorno di ogni punto di Ω. Iniziamo a considerare, allora, serie di potenze in campo complesso, ovvero serie della forma $\sum_n a_n(z - z_0)^n$, con a_n, z_0 numeri complessi e z variabile complessa.[1]

Definizione 2.1.5. *Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice **analitica in un punto** $z_0 \in \Omega$, se esiste una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ che converge assolutamente per $|z - z_0| < r$, per qualche $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, e tale che si abbia $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, $\forall z \in D(z_0; r)$. f si dice **analitica in** Ω se f è analitica in ogni punto di Ω.*

La seguente proposizione ci dice che sono analitiche tutte le funzioni definite da serie di potenze:

Proposizione 2.1.6. *Sia $a \in \mathbb{C}$ e $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z - a)^k$ una serie di potenze convergente assolutamente nel disco aperto $D(a; r)$ per qualche $r > 0$. Allora la funzione la funzione $f : D(a; r) \to \mathbb{C}$ definita dalla serie è analitica.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che $a = 0$, e quindi che si abbia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ in $D(0; r)$. Sia $z_0 \in D(0; r)$ e sia $s > 0$ tale che $|z_0| + s < r$. Scriviamo

$$z = z_0 + (z - z_0)$$

[1] Ovviamente una serie di potenze $f(z) = \sum_n a_n(z - z_0)^n$ convergente in un disco aperto $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, per qualche $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definisce una funzione da $D(z_0; r) \subset \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, ovvero una funzione complessa di variabile complessa.

e quindi

$$z^k = [z_0 + (z - z_0)]^k \, .$$

Possiamo pertanto riscrivere

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k \left[\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \right] . \tag{2.1.4}$$

Se $|z - z_0| < s$ allora $|z_0| + |z - z_0| < r$ e quindi la serie (2.1.4) converge assolutamente e possiamo scambiare l'ordine della sommatoria, ottenendo che la serie

$$\sum_{j\geq 0} \left[\sum_{k\geq j} a_k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} z_0^{k-j} \right] (z - z_0)^j \tag{2.1.5}$$

converge assolutamente ad $f(z)$ per $|z - z_0| < s$. □

Le definizioni 2.1.1 e 2.1.5 sono equivalenti, nel senso che *una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *è olomorfa in* Ω *se, e soltanto se è analitica in* Ω. Ometteremo la dimostrazione completa di tale fatto, infatti mentre dimostrare l'implicazione "analitica ⇒ olomorfa" è piuttosto semplice (e segue nel prossimo teorema), la via più breve per dimostrare il viceversa è quella di utilizzare il teorema di Cauchy ([21], pag. 234), che conduce ad un'importante rappresentazione integrale delle funzioni olomorfe. Bisognerebbe, dunque, sviluppare una teoria dell'integrazione necessaria a questo scopo e ciò va al di là del nostro obiettivo principale, che è quello di uno studio della struttura algebrica dell'anello delle funzioni intere.

Teorema 2.1.7. *Se* f *è analitica in* Ω*, allora* f *è olomorfa in* Ω *ed* f' *è rappresentabile mediante serie di potenze in* Ω*. Più precisamente, sia* $a \in \Omega$*, se per* $z \in D(a; r)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \, , \tag{2.1.6}$$

per tali z *si ha anche*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1} \, . \tag{2.1.7}$$

Dimostrazione. La serie (2.1.6) converge in $D(a;r)$; il criterio della radice ([22], 2.6) mostra che anche la serie (2.1.7) converge in tale disco. Poniamo a=0 (senza che ciò implichi nessuna restrizione), e indichiamo la somma della serie (2.1.7) con $g(z)$. Fissiamo un $w \in D(0;r)$ e scegliamo ρ tale che $|w| < \rho < r$.
Se $z \neq w$, abbiamo

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right]. \tag{2.1.8}$$

Ove per n=1, l'espressione tra parentesi è 0, mentre per $n \geq 2$ è uguale a

$$(z-w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}. \tag{2.1.9}$$

Se $|z| < \rho$, il modulo della somma in (2.1.9) è minore di

$$\frac{n(n-1)}{2}\rho^{n-2},$$

cosicché

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z)\right| \leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} n^2|c_n|\rho^{n-2}. \tag{2.1.10}$$

Poiché $\rho < r$, quest'ultima serie converge. Quindi il primo membro della (2.1.10) tende a 0 per $z \to w$. Questo significa che $f'(z) = g(w)$, e la dimostrazione è così completa. □

Osservazione 2.1.8. *Se f è analitica in Ω, poiché f' soddisfa le stesse ipotesi che soddisfa la f, il teorema precedente può essere applicato ad f'. Ne segue che, in un intorno di $a \in \Omega$, f ha derivate di tutti gli ordini, che ciascuna derivata è rappresentabile da una serie di potenze e che se vale la* (2.1.6), *allora*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}. \tag{2.1.11}$$

Da quest'ultima si deduce che

$$k!\,c_k = f^{(k)}(a) \tag{2.1.12}$$

con $k \in \mathbb{N}$; cosicché $\forall a \in \Omega$, esiste ed è unica *la successione $\{c_n\}$ per la quale vale la* (2.1.6).

Data l'equivalenza " analitica $\iff$ olomorfa", d'ora in poi, per semplicità, dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, con $H(\Omega)$ indicheremo anche le funzioni analitiche in Ω.

Esempi:

- La funzione $f : \mathbb{C} - \{1\} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

  è analitica in $\mathbb{C} - \{1\}$ e il suo sviluppo in serie nell'origine è

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} z^k$$

  Tale serie ha raggio di convergenza $r_0 = 1$ e quindi rappresenta la funzione f nel disco $D(0;1)$. Consideriamo ora un qualunque punto $b \in D(0;1) - \{0\}$. Dalla dimostrazione della proposizione 2.1.6 segue che lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b è

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} \left[\sum_{k \geq j} \binom{k}{j} b^{k-j} \right] (z-b)^j. \tag{2.1.13}$$

  La serie tra parentesi quadre converge a $(1-b)^{-(j+1)}$ e quindi lo sviluppo di $f(z)$ in b si può scrivere come:

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} (1-b)^{-(j+1)} (z-b)^j$$

  e il raggio di convergenza r_b di questa serie è dato da[2]

$$\frac{1}{r_b} = \lim_{j \to \infty} (|1-b|^{-(j+1)})^{\frac{1}{j}} = |1-b|^{-1}$$

  cioè $r_b = |1-b|$, che è la distanza di b dal punto 1.

- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

[2][22] teorema 2.6 pag 8.

f ha derivate continue di ogni ordine e $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni n. Pertanto f non è rappresentabile in serie di potenze in un intorno di 0, perché la sua serie di Taylor in 0 è la serie nulla. Questo esempio dimostra come la differenziabilità e l'analiticità non coincidono per funzioni di variabile reale.

2.2 Zeri di una funzione olomorfa

Definizione 2.2.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto ed f una funzione di Ω in $\mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = 0$ si dice uno **zero** di f.*

Teorema 2.2.2 (Principio del prolungamento analitico). [3]
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso, $z_0 \in \Omega$ ed $f \in H(\Omega)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $f^{(k)}(z_0) = 0$, per ogni $k \geq 0$.

(ii)f è identicamente nulla in un intorno di z_0.

(iii)f è identicamente nulla in Ω.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ lo sviluppo in serie di f in z_0. Poiché $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$, segue che $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, e quindi $f(z) = 0$ in un intorno di z_0.

$(ii) \Rightarrow (i)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ sono ovvie.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\Delta = \{a \in \Omega : f \text{ è identicamente nulla in un intorno di } a\}$$

coincide con Ω. Osserviamo che $z_0 \in \Delta$ e quindi $\Delta \neq \emptyset$. Pertanto, poiché Ω è connesso, sarà sufficiente dimostrare che Δ è aperto e chiuso in Ω.
Δ è aperto per definizione.
Sia $c \in \bar{\Delta}$. Allora esiste una successione $c_n \to c$ tale che $c_n \in \Delta$. In ogni punto c_n è verificata la condizione (ii), e quindi anche la (i), cioè $f^{(k)}(c_n) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e per ogni n. Ma allora, essendo le derivate $f^{(k)}(z)$ funzioni

[3] [22] teorema 5.1 pag 24.

continue, si ha anche $f^{(k)}(c) = 0$ per ogni k, cioè in c è soddisfatta la condizione (i). Ma allora anche la (ii) è soddisfatta, cioè $c \in \Delta$, e quindi Δ è chiuso. $\square$

Corollario 2.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso. Se $f, g \in H(\Omega)$ coincidono in un intorno di un punto $z_0 \in \Omega$, allora coincidono identicamente in tutto Ω.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione $f - g$.

$\square$

Definizione 2.2.4. *Sia f una funzione analitica in un aperto connesso Ω non identicamente nulla e sia a un punto di Ω. Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ il suo sviluppo in serie in a.* ***L'ordine di*** *f* ***in*** *a è definito come il più piccolo esponente k tale che $a_k \neq 0$, e si denota con $o_a(f)$.*

Teorema 2.2.5 (Principio di identità delle funzioni analitiche). [4]
Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f \in H(\Omega)$ non identicamente nulla, allora l'insieme degli zeri di f è un insieme discreto, cioè tutti i suoi punti sono isolati.

Dimostrazione. Sia $a \in \Omega$ uno zero di f, cioè $f(a) = a_0 = 0$. Siccome f non è identicamente nulla in qualunque intorno di a, possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k = (z-a)^h \sum_{k=h}^{\infty} a_k(z-a)^{k-h},$$

dove $h = o_a(f) > 0$.
La serie $\sum_{k=h}^{\infty} a_k(z-a)^{k-h}$ converge in un intorno di a ad una funzione analitica $g(z)$.
Poiché $g(a) = a_h \neq 0$, $\exists\, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tale che $g(z) \neq 0, \forall z \in D(a; r)$. Ma allora $f(z) = (z-a)g(z) \neq 0, \forall z \in D(a; r) - \{a\}$. Quindi a è isolato nell'insieme degli zeri di f. $\square$

In virtù del precedente teorema possiamo concludere che *l'anello delle funzioni olomorfe in un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio di integrità ed in particolare lo è $(\boldsymbol{E}, +, \cdot)$.*

[4][22] teorema 5.3 pag 25.

2.3 Singolarità delle funzioni olomorfe - funzioni meromorfe

Definizione 2.3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Se $a \in \Omega$ e $f \in H(\Omega - \{a\})$, Si dice che f ha una* ***singolarità isolata*** *nel punto a. Se f può essere estesa ad a in modo che la funzione ottenuta sia olomorfa in Ω, diremo che la singolarità è* ***eliminabile****.*

Nella dimostrazione del teorema seguente utilizzeremo l'implicazione (che non abbiamo dimostrato) " f olomorfa $\Rightarrow$ f analitica " .

Teorema 2.3.2. [5] *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in \Omega$ e $f \in H(\Omega - \{a\})$. Se f è limitata in $D(a;r) - \{a\}$ per qualche $r > 0$, allora f ha una singolarità eliminabile in a.*

Dimostrazione. Definiamo $h : \Omega \to \mathbb{C}$, ponendo

$$\begin{aligned} h(z) &= (z-a)^2 f(z), \qquad z \neq a \\ h(a) &= \qquad 0 \end{aligned}$$

si ha che, essendo f è limitata in un intorno di a

$$\lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0. \tag{2.3.14}$$

Pertanto h è olomorfa in tutto Ω e quindi h è analitica in Ω.
Poiché $h(a) = 0 = h'(a)$, si ha che in un intorno di a

$$h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Ponendo $f(a) = c_2$, definiamo un'estensione di f a tutto Ω che è analitica, perché in un intorno di a si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z-a)^k. \qquad \square$$

[5] [22] teorema 6.2, pag. 27

Il teorema seguente dà una classificazione delle singolarità delle funzioni analitiche:

Teorema 2.3.3. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in \Omega$ ed $f \in H(\Omega - \{a\})$. Allora si ha una, ed una sola delle seguenti possibilità:*
(i) f ha una singolarità eliminabile in a.
(ii) Esistono un intero $m > 0$, e $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-m} \in \mathbb{C}$ con $a_{-m} \neq 0$, tali che

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

abbia una singolarità eliminabile in a.
(iii) $\forall r > 0$ tale che $D(a;r) \subset \Omega$, l'insieme $f(D(a;r) - \{a\})$ è denso in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Supponiamo che (iii) non sia verificato. Allora esistono $r > 0$, $\delta > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tali che $|f(z) - w| > \delta$, $\forall z \in D(a;r) - \{a\}$. Poniamo

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in D(a;r) - \{a\}).$$

Allora $g \in H(D(a;r) - \{a\})$ e $|g(z)| < \frac{1}{\delta}$ in $D(a;r) - \{a\}$. Dal teorema precedente segue che g si estende ad una funzione analitica in $D(a;r)$.
Se $g(a) \neq 0$, dalla definizione di g, segue che f è limitata in $D(a;r) - \{a\}$ e siamo nel caso (i).
Se $g(a) = 0$, sia $m = o_a(g) > 0$. Allora

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z),$$

con $g_1 \in H(D(a;r))$, $g_1(a) \neq 0$. La funzione

$$h(z) = \frac{1}{g_1(z)}$$

è ben definita ed analitica in un disco $D(a;s)$, per qualche $s \in (0;r]$, e si ha

$$f(z) - w = (z-a)^{-m} h(z).$$

Ma allora, essendo in un intorno di a,

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-a)^j, \qquad b_0 \neq 0$$

e siamo nel caso (ii), con

$$\begin{aligned} a_{-m} &= b_0 \\ a_{-m+1} &= b_1 \\ &\dots \\ a_{-1} &= b_{m-1}. \end{aligned}$$

E ciò conclude la dimostrazione. □

Se siamo nel caso (ii) diremo che f ha un **polo** di ordine m nel punto a, ovvero che a è un **polo** (od una **singolarità polare**) di ordine m per f. La funzione

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

si dice **parte principale** di f in a.
Se in un intorno di a si ha:

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

scriveremo

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

dove il secondo membro si chiama **sviluppo in serie di Laurent** di f nel punto a.

Se siamo nel caso (iii) diremo che a è una **singolarità essenziale** per f.

Definizione 2.3.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f \in H(\Omega - S)$, dove $S \subset \Omega$ è un sottoinsieme discreto, tale che f possieda una singolarità eliminabile oppure un polo in ogni punto di S, si dice* ***meromorfa*** *in Ω. L'insieme delle funzioni meromorfe in Ω si denota con $M(\Omega)$.*

Dalla definizione e dai risultati precedenti segue che, se $f \in M(\Omega)$, $\forall a \in \Omega$, la funzione f possiede uno sviluppo in serie della forma:

$$f(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k (z-a)^k \qquad a_\nu \neq 0, \tag{2.3.15}$$

dove $\nu \geq 0$, se f è analitica oppure ha una singolarità eliminabile in a ; mentre $\nu < 0$ se f ha un polo in a.
Con abuso di linguaggio chiameremo la (2.3.15) lo sviluppo in serie di Laurent di f in a, qualunque sia ν. Chiameremo ν l'ordine di f in a, e lo denoteremo con $o_a(f)$. Si verifica che $(M(\Omega), +, \cdot)$ è un anello contenente $H(\Omega)$.

Teorema 2.3.5. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, allora $M(\Omega)$ è un campo.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $M(\Omega)$ è un campo, è sufficiente verificare che ogni funzione meromorfa, f non identicamente nulla, possiede inversa in $M(\Omega)$.
Sia $S \subset \Omega$ l'insieme dei poli di f. Allora f è analitica in $\Omega - S$ che è connesso, perché S è discreto. Poiché f non è identicamente nulla, $\forall a \in \Omega$, f non è identicamente nulla in un intorno di a. Quindi f non ha poli in $D(a;r) - \{a\}$, per qualche $r > 0$, e dunque $\frac{1}{f}$ è ben definita ed analitica in $D(a;r) - \{a\}$.
f avrà uno sviluppo in serie di Laurent in a come nella (2.3.15), con $a_\nu \neq 0$.
Possiamo riscrivere la (2.3.15) come

$$f(z) = (z-a)^\nu \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k (z-a)^{k-\nu},$$

e la serie $\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k T^{k-\nu}$ ha raggio di convergenza positivo e ordine zero. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} b_k T^k$ la sua inversa in $\mathbb{C}\{\{T\}\}$, l'anello delle serie convergenti nell'indeterminata T.[6] Allora

$$(z-a)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k, \tag{2.3.16}$$

è una serie che converge assolutamente in $D(a;r) - \{a\}$, dove ha per somma la funzione $\frac{1}{f}$. Quindi la (2.3.16) è lo sviluppo in serie di Laurent di $\frac{1}{f}$ in

[6] Per le serie formali di potenze consultare [22] pag 1-15.

a: in particolare $\frac{1}{f}$ ha una singolarità eliminabile oppure un polo in a e $o_a(\frac{1}{f}) = -o_a(f)$.
Poiché questo ragionamento si può applicare per ogni punto a di Ω, deduciamo che $\frac{1}{f}$ è meromorfa in Ω. □

Nel prossimo paragrafo dimostreremo che $M(\Omega)$ risulta essere proprio il campo dei quozienti di $H(\Omega)$.

Esempi:

- La funzione f definita da $f(z) = \frac{1}{z^n}$ ha un polo di ordine n in 0, per ogni $n > 0$.

- Un esempio di singolarità essenziale è data dal punto 0 per la funzione f definita da
$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$
infatti in ogni aperto della forma $D(0;r) - \{0\}$ si ha che
$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!\, z^k}.$$
Se ne deduce che per ogni $n > 0$ la funzione $z^n e^{\frac{1}{z}}$ non ha una singolarità eliminabile in $z = 0$, e quindi ha una singolarità essenziale in $z = 0$.

- Sia g una funzione meromorfa in un intorno di 0, e dotata di un polo in 0. Allora la funzione f definita da
$$f(z) = e^{g(z)}$$
ha una singolarità essenziale nel punto 0; infatti si ha che
$$F(z) = e^{g(z)} = 1 + g(z) + \frac{1}{2} g(z)^2 + \frac{1}{3!} g(z)^3 + \cdots$$
e come nell'esempio precedente si deduce che per ogni $n > 0$ la funzione $z^n f(z)$ non ha una singolarità eliminabile in $z = 0$.

2.4 Fattorizzazione di funzioni olomorfe

Facciamo ora qualche considerazione topologica.

Proposizione 2.4.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Ogni sottoinsieme aperto di Ω è l'unione di una successione $\{K_n\}$ di compatti tali che:*
a) K_n è contenuto nella parte interna di K_{n+1}, per $n = 1, 2, \dots$
b) Ogni sottoinsieme compatto di Ω è contenuto in qualche K_n.

Dimostrazione. Poniamo, per $n = 1, 2, \dots,$

$$A(n) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > n\},$$

sia

$$V_n = A(n) \cup \bigcup_{a \notin \Omega} D\left(a\,;\frac{1}{n}\right) \tag{2.4.17}$$

e sia $K_n = \mathbb{C} - V_n$. Segue che K_n è un sottoinsieme chiuso e limitato (e quindi compatto) di Ω, e $\Omega = \bigcup K_n$. Se $z \in K_N$ e $r = 1/N - 1/(N+1)$, si verifica facilmente che $D(z; r) \subset K_{N+1}$: questo prova la a).
Per conseguenza Ω è l'unione di parti interne W_n dei K_n. Se K è un sottoinsieme compatto di Ω, abbiamo $K \subset W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_N$ per un N opportuno; quindi $K \subset K_N$. □

Definizione 2.4.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Si dice che una successione $\{f_j\}$ di funzioni in Ω **converge uniformemente ad f sui compatti** di Ω, se ad ogni compatto $K \subset \Omega$ e ad ogni $\epsilon > 0$ corrisponde un $N = N(K, \epsilon)$ tale che $|f_j(z) - f(z)| < \epsilon$, $\forall z \in K, j > N$.*

Per esempio la successione $\{z^n\}$ converge uniformemente a 0 sui sottoinsiemi compatti di $D(0; 1)$, ma la convergenza *non* è uniforme in $D(0; 1)$.

Teorema 2.4.3. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$. Siano, per $j = 1, 2, \dots$ $f_j \in H(\Omega)$ ed $f_j \to f$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di Ω. Allora $f \in H(\Omega)$.*

Dimostrazione. Poiché la convergenza è uniforme su ciascun disco compatto di Ω, f è continua. Sia Δ un triangolo in Ω; Δ è compatto, e quindi si ha per il teorema di Cauchy ([21], pag 234)

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{j\to 0} \int_{\partial\Delta} f_j(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Il teorema di Morera ([21], teorema 10.17) implica di conseguenza che $f \in H(\Omega)$. □

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa di variabile complessa. Indicheremo d'ora in poi con Z_f l'insieme $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, cioè l'insieme degli zeri di f in cui gli zeri multipli sono ripetuti. Definiamo inoltre con Z_f^* la successione degli zeri distinti di f, presi nell'ordine di modulo crescente. Finora abbiamo trovato solo un risultato concernente l'insieme degli zeri Z_f di una funzione f olomorfa non costante in un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$: precisamente si è visto che Z_f non ha alcun punto limite in Ω. Ora vedremo che questo è tutto quanto si può dire di Z_f se non si impongono condizioni ulteriori alla funzione f; ciò dipende dal teorema di Weierstrass, secondo cui ogni $A \subset \Omega$ privo di punti limite in Ω è lo Z_f di una opportuna funzione olomorfa; se, ad esempio, $A = \{\alpha_n\}$, l'idea per costruire una funzione siffatta, consiste nello scegliere delle funzioni f_n in $H(\Omega)$ ciascuna con un solo zero in α_n, e considerare il limite per $n \to \infty$ dei prodotti

$$p_n = f_1 f_2 \cdots f_n.$$

È necessario far sì che la successione $\{p_n\}$ converga ad una $f \in H(\Omega)$ e che la funzione limite f si annulli soltanto nei punti prescritti α_n.
È pertanto opportuno cominciare con lo studiare alcune proprietà generali dei prodotti infiniti.

Definizione 2.4.4. *Sia $\{u_n\}$ una successione di numeri complessi. Posto*

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n), \tag{2.4.18}$$

supponiamo che esista

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n,$$

scriveremo allora

$$p = \prod_{n\geq 1}(1+u_n). \tag{2.4.19}$$

I p_n *sono i* ***prodotti parziali*** *del prodotto infinito* (2.4.19)*. Diremo che il prodotto infinito* (2.4.19) ***converge*** *se, e soltanto se, converge la successione* $\{p_n\}$.

Nello studio delle serie numeriche infinite $\sum_n a_n$ ha importanza la rapidità con cui gli a_n tendono a 0; analogamente, nello studio dei prodotti infiniti, è interessante vedere se i fattori sono o non sono prossimi ad 1; questo spiega la notazione precedente: $1+u_n$ è prossimo ad 1 se u_n è prossimo allo 0.

Lemma 2.4.5. *Se* $u_1, u_2, \ldots, u_N$ *sono numeri complessi e se*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|), \tag{2.4.20}$$

risulta

$$p_N^* \leq e^{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_N|} \tag{2.4.21}$$

e

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1. \tag{2.4.22}$$

Dimostrazione. Per $x \geq 0$, la disuguaglianza $1+x \leq e^x$ è una conseguenza immediata dello sviluppo di e^x in serie di potenze di x. Sostituendo x con $|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_N|$ e moltiplicando le disuguaglianze ottenute, si ottiene la (2.4.21).
Per $N = 1$, la (2.4.22) è banale. Il caso generale segue per induzione: per $k = 1, 2, \ldots, N-1$,

$$p_{k+1} - 1 = p_k(1+u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1+u_{k+1}) + u_{k+1},$$

cosicché, se la (2.4.22) vale con k in luogo di N, risulta

$$|p_{k+1} - 1| \leq (p_k^* - 1)(1+|u_{k+1}|) + |u_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1.$$

□

Teorema 2.4.6. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni complesse limitate su un insieme S, tale che $\sum |u_n(s)|$ converga uniformemente su S. In questa ipotesi, il prodotto*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(s)), \qquad (s \in S) \tag{2.4.23}$$

converge uniformemente su S, ed $f(s_0) = 0$ per qualche $s_0 \in S$ se, e soltanto se, $u_n(s_0) = -1$, per qualche n.
Inoltre, se $\{n_1, n_2, \dots\}$ è una qualsiasi permutazione di $\{1, 2, \dots\}$ risulta anche

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_{n_k}(s)). \tag{2.4.24}$$

Dimostrazione. L'ipotesi implica che $\sum |u_n(s)|$ è limitata su S, e se p_N indica l' N-simo prodotto parziale di (2.4.23), per il lemma precedente possiamo concludere che esiste una costante $C < \infty$ tale che $|p_n(s)| \leq C$ per tutti gli N e per tutti gli s in S.
Fissato $\epsilon \in (0, 1/2)$, esiste un N_0 tale che

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \epsilon \qquad (s \in S). \tag{2.4.25}$$

Sia $\{n_1, n_2, \dots\}$ una permutazione di $\{1, 2, \dots\}$. Se $N \geq N_0$, se M è così grande che

$$\{1, 2, \dots, N\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_M\}, \tag{2.4.26}$$

e se $q_M(s)$ è l'M-simo prodotto parziale della (2.4.24), risulta

$$q_M - p_M = p_N\left(\prod(1 + u_{n_k}) - 1\right). \tag{2.4.27}$$

gli n_k che compaiono nella (2.4.27) sono tutti distinti e sono tutti più grandi di N_0. Pertanto la (2.4.25) e il lemma precedente mostrano che

$$|q_M - p_N| \leq |p_N|(e^s - 1) \leq 2|p_N|\epsilon \leq 2C\epsilon. \tag{2.4.28}$$

Se $n_k = k, (k = 1, 2, \dots)$, è $q_M = p_N$ e la (2.4.28) mostra che $\{p_N\}$ converge uniformemente ad una funzione limite f. Inoltre, per la (2.4.28),

$$|p_M - p_{N_0}| \leq 2|p_{N_0}|\epsilon \qquad (M > N_0),$$

cosicché $|p_M| \geq (1-2\epsilon)|p_{N_0}|$. Quindi

$$|f(s)| \geq (1-2\epsilon)|p_{N_0}(s)| \qquad\qquad (s \in S),$$

il che prova che $f(s)=0$ se, e soltanto se $p_{N_0}(s)=0$.
Dalla (2.4.28) segue, infine, la convergenza di $\{q_M\}$ allo stesso limite cui tende $\{p_N\}$. □

Segue immediatamente il seguente

Corollario 2.4.7. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Sia $f_n \in H(\Omega)$ per $n=1,2,\dots$; supponiamo inoltre che nessuna funzione f_n sia identicamente nulla e che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1-f_n(z)| \tag{2.4.29}$$

converga uniformemente sui sottoinsiemi compatti di Ω. In queste ipotesi il prodotto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{2.4.30}$$

converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di Ω. Pertanto $f \in H(\Omega)$.

Definizione 2.4.8. *Poniamo $E_0(z) = 1-z$ e per $p=1,2,\dots,$*

$$E_p(z) = (1-z)\, e^{\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\}}.$$

*Queste funzioni, introdotte da Weierstrass, vengono talora chiamate **fattori elementari**.*

Il loro unico zero è nel punto $z=1$. La loro utilità dipende dal fatto che esse sono vicine ad 1, se $|z|<1$ e p è grande, pur essendo $E_p(1)=0$.

Lemma 2.4.9. *Per $|z| \leq 1$ e $p = 0,1,2\dots$,*

$$|1-E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Dimostrazione. Per $p = 0$ questo è ovvio. Per $p > 0$, un calcolo diretto mostra che

$$-E_p'(z) = z^p \, e^{\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\}}$$

Così $-E_p'$ ha uno zero di ordine p in $z = 0$ e il suo sviluppo in serie di potenze di z ha coefficienti reali non negativi. Poiché

$$1 - E_p(z) = -\int_0^z E_p'(w) \, \mathrm{d}w \,,$$

$1 - E_p$ ha uno zero di ordine $p + 1$ in $z = 0$, e se

$$\phi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \,,$$

abbiamo che $\phi(z) = \sum_n a_n z^n$ con tutti i coefficienti $a_n \geq 0$; per cui, se $|z| \leq 1$, $|\phi(z)| \leq \phi(1) = 1$. □

Proposizione 2.4.10. *Sia $\{z_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri complessi, tali che $z_n \neq 0$ per ogni n e $|z_n| \to \infty$ per $n \to \infty$. Allora, il prodotto infinito*

$$P(z) = \prod_{n\geq 1} E_{n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{2.4.31}$$

definisce una funzione intera P che ha uno zero in ciascun punto z_n e non ha altri zeri in $\mathbb{C}$.

Più precisamente, se α compare m volte nella successione $\{z_n\}$, P ha uno zero di ordine m in α.

Dimostrazione. Posto $r_n = |z_n|$ (per ogni $n \geq 1$), qualsiasi $r \in \mathbb{R}$ è tale che $r_n > 2r$ per tutti gli n, ad eccezione di un numero finito (al più); quindi

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \infty \tag{2.4.32}$$

Fissiamo ora r. Se $|z| \leq r$, il lemma precedente mostra che

$$\left|1 - E_{n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^n \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^n$$

se $r_n \geq r$; ciò per tutti gli n ad eccezione di un numero finito di essi. Segue ora dalla (2.4.32) che la serie

$$\sum_{n\geq 1} \left| 1 - E_{n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right) \right|$$

converge uniformemente sugli insiemi compatti del piano, e dal corollario precedente discende l'asserto. □

Osservazione 2.4.11. *La proposizione precedente può essere formulata in maniera più generale, ovvero, data una successione $\{z_n\}_{n\geq 1}$ di numeri complessi, tali che $z_n \neq 0\ \forall n$ e $|z_n| \to \infty$ per $n \to \infty$; se $\{p_n\}$ è una successione di interi non negativi tale che*

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty \qquad [*]$$

per ogni $r > 0$, ove $(r_n = |z_n|)$, Allora, il prodotto infinito

$$P(z) = \prod_{n\geq 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{2.4.33}$$

definisce una funzione intera P che ha uno zero in ciascun punto z_n e non ha altri zeri in $\mathbb{C}$. In particolare, prendendo $p_n = n - 1$ la condizione $[*]$ è sempre soddisfatta.

Prima di dimostrare il teorema di fattorizzazione di Weierstrass, introduciamo la nozione di regione semplicemente connessa:

Definizione 2.4.12. [7] *Un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è una* ***regione semplicemente connessa*** *se il suo complementare, $\mathbb{C} - \Omega$, è connesso.*

Le regioni semplicemente connesse svolgono un ruolo particolarmente importante nella teoria delle funzioni olomorfe per la ragione seguente: se f è una funzione intera priva di zeri, allora esiste una funzione g, determinazione analitica di $\log f(z)$, da cui segue che f è della forma $f(z) = e^{g(z)}$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.[8]

[7] [1], definizione 1 pag 139.
[8] [1], corollario 2 pag 142.

Teorema 2.4.13 (Teorema di fattorizzazione di Weierstrass). *Sia f una funzione intera tale che $f(0) \neq 0$; se $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sono gli zeri di f elencati secondo la loro molteplicità, esiste una funzione intera g e una successione di interi non negativi $\{p_n\}$ tale che*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n \geq 0} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{2.4.34}$$

Dimostrazione. Sia P il prodotto (2.4.33), formato dagli zeri di f. La funzione $\frac{f}{P}$ ha soltanto singolarità eliminabili nel piano e quindi è (o può essere estesa a) una funzione intera. Inoltre, $\frac{f}{P}$ non ha zeri; e poiché il piano è semplicemente connesso, $\frac{f(z)}{P(z)} = e^{g(z)}$, per una opportuna funzione intera g.

□

Osservazione 2.4.14. *Se f ha uno zero di ordine k nel punto $z = 0$, il teorema precedente si applica a $\frac{f(z)}{z^k}$.*

La dimostrazione del teorema 2.4.13 si può facilmente adattare ad ogni insieme aperto ([21],15.11). Come applicazioni possiamo dimostrare il seguente

Teorema 2.4.15. *Ogni funzione meromorfa in un insieme aperto Ω è un quoziente di due funzioni olomorfe in Ω. In particolare $M(\mathbb{C})$ è il campo dei quozienti di $\boldsymbol{E}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia una funzione meromorfa in Ω, e sia A l'insieme di tutti i poli di f in Ω. Per ogni $\alpha \in A$, sia $o_\alpha(f)$ l'ordine del polo di f in α. Per la proposizione 2.4.10 esiste una funzione $h \in H(\Omega)$ con uno zero di molteplicità $o_\alpha(f)$ in ogni $\alpha \in A$, e senza altri zeri. Poniamo $g = fh$. Le singolarità di g nei punti di A sono eliminabili, quindi g può essere estesa in modo che $g \in H(\Omega)$; quindi, $f = g/h$, risulta essere il quoziente di due funzioni olomorfe in Ω. □

Dimostriamo, infine, il seguente teorema, che svolge per le funzioni meromorfe il ruolo del teorema di Weierstrass per le funzioni olomorfe:

Teorema 2.4.16 (Teorema di Mittag-Leffler). *Sia* $\{b_\nu\}$ *una successione di numeri complessi tale che* $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \infty$, *e sia* $\xi \to P_\nu(\xi)$ *una funzione polinomiale priva di termini costanti. Allora esiste una funzione* f *meromorfa in* $\mathbb{C}$, *con poli in ciascun* b_ν *e con parte singolare in* b_ν *data da* $P_\nu(\frac{1}{z-b_\nu})$.

Dimostrazione. La funzione $P_\nu(\frac{1}{z-b_\nu})$ è analitica nel disco $\{z : |z| < |b_\nu|\}$, quindi, nell'intorno dell'origine possiamo sottrargli il suo polinomio di Taylor, $p_\nu(z)$, di grado N_ν. Stimiamo ora le differenza integrale data dal teorema di Taylor[9]:

$$P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right) - p_\nu(z) = \frac{z^{N_\nu}}{2\pi i}\int_{\xi=\frac{|b_\nu|}{2}} \frac{P_\nu(\frac{1}{\xi-b_\nu})}{\xi^{N_\nu}(\xi-z)}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.4.35}$$

Passando ai moduli, e ponendo $M_\nu = \sup_{|z|\le\frac{|b_\nu|}{2}} |P_\nu(\frac{1}{z-b_\nu})|$, abbiamo che il modulo della differenza (2.4.35), per tutti gli z tali che $|z| \le |b_\nu|/4$, è maggiorato da

$$|z|^{N_\nu} M_\nu \frac{1}{(\frac{|b_\nu|}{2})^{N_\nu-1}}\frac{4}{|b_\nu|} \le 2^{N_\nu+1} M_\nu \left(\frac{|z|}{|b_\nu|}\right)^{N_\nu} \le \frac{1}{2^{N_\nu}} 2M_\nu.$$

Scegliamo allora il grado del polinomio di Taylor tale che $\frac{1}{2^{N_\nu}}2M_\nu \le \frac{1}{2^{\nu+1}}$: con tale scelta $|P_\nu(\frac{1}{z-b_\nu}) - p_\nu(z)| \le \frac{1}{2^{\nu+1}}$. Quindi la serie

$$\sum_{\nu=1}^{N} P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right) - p_\nu(z)$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} - \{\{b_\nu\}_{\nu\ge1}\}$, e quindi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right) - p_\nu(z)$$

è analitica in $\mathbb{C}-\{\{b_\nu\}_{\nu\ge1}\}$ ed ha parte singolare $P_\nu(\frac{1}{z-b_\nu})$ in b_ν per costruzione.

□

[9][1], teorema 8 pag 125.

Capitolo 3

Proprietà algebriche dell'anello delle funzioni intere

3.1 Proprietà di divisibilità

Iniziamo lo studio delle proprietà algebriche dell'anello delle funzioni intere seguendo il lavoro di O. Helmer [13].

Notazione: Indicheremo con K un arbitrario sottocampo di $\mathbb{C}$; con $K\langle z\rangle$ l'insieme delle funzioni intere esprimibili come serie di potenze del tipo $\sum_n a_n z^n$ con $a_n \in K$.

Definizione 3.1.1. [1] *Sia $f(z) \in K\langle z\rangle$. Se Z_f è l'insieme degli zeri di f, diremo che Z_f è **simmetrico** se gli elementi di Z_f^* sono distribuiti simmetricamente rispetto all'asse reale e se due numeri complessi coniugati compaiono con la stessa molteplicità.*

Proposizione 3.1.2. [2] *Un elemento di $K\langle z\rangle$ è invertibile se, e soltanto se, è della forma $ce^{f(z)}$, con $c \in K$, $c \neq 0$, e $f(z) \in K\langle z\rangle$, $f(0) = 0$.*

Dimostrazione. Un elemento invertibile di $K\langle z\rangle$ non ha zeri e quindi deve essere della forma $e^{g(z)}$, ovvero, $ce^{f(z)}$, dove $c = e^{g(0)}$ e $f(0) = 0$; basta provare

[1] [13], pagina 345.

[2] [13], teorema 1.

che i suoi coefficieti sono in K. Affinché ciò sia vero, è necessario e sufficiente che c e i coefficienti di

$$e^{f(z)} = 1 + \frac{a_1 z + a_2 z^2 + \cdots}{1!} + \frac{(a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)^2}{2!} + \cdots \tag{3.1.1}$$

cioè

$$a_1,\ a_2 + \frac{1}{2}a_1^2,\ a_3 + a_1 a_2 + \frac{1}{6}a_1^3, \ldots \tag{3.1.2}$$

siano in K. È chiaro che le quantità (3.1.2) appartengono a K se, e soltanto se, $a_1, a_2, \ldots \in K$. □

Se $Z \subset \mathbb{C}$ è un insieme discreto, in virtù del teorema 2.4.10, possiamo costruire una funzione f in $\mathbf{E}$ tale che $Z = Z_f$. Inoltre, se Z è simmetrico, si può trovare $f \in \mathbb{R}\langle z\rangle$. Il seguente lemma mostra che si può imporre una forte restrizione sui coefficienti:

Lemma 3.1.3. [3] *Sia K un campo di numeri immaginario, per esempio $\mathbb{Q}(i)$; allora, per ogni sottoinsieme discreto Z di K, esiste una funzione $f(z) \in K\langle z\rangle$ tale che $Z = Z_f$. Inoltre, se Z è simmetrico, tale funzione è in $\mathbb{Q}\langle z\rangle$.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema, basta provare che ogni funzione intera $f(z) \in \mathbb{R}\langle z\rangle, \mathbb{C}\langle z\rangle$, può essere moltiplicata per un elemento invertibile $e^{\phi(z)}$ in maniera che $g(z) = e^{\phi(z)} f(z)$ abbia i coefficienti, rispettivamente, in $\mathbb{Q}$ o in K, dove K è un campo immaginario. Siano:

$$f(z) = \sum_n a_n z^n\,, \qquad g(z) = \sum_n b_n z^n\,, \qquad \phi(z) = \sum_n \lambda_n z^n\,. \tag{3.1.3}$$

Possiamo assumere $f(0) = a_0 \neq 0$ (altrimenti, siano $f(z) = z^s \cdot f_1(z)$ con $f_1(0) \neq 0$, $g_1(z) = e^{\phi(z)} \cdot f_1(z)$, e $g(z) = z^s \cdot g_1(z)$). Inoltre, dato che la moltiplicazione per una costante non cambia gli zeri, possiamo assumere $a_0 = 1$, ed ancora, sia $\lambda_0 = 0$, in modo che $b_0 = 1$. Abbiamo quindi

$$e^{(\lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots)}(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \tag{3.1.4}$$

Comparando i coefficienti di z^n nella (3.1.4), otteniamo un'equazione della forma

$$P_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) + \lambda_n = b_n, \tag{3.1.5}$$

[3] [13], teorema 3.

dove P_n è un'espressione polinomiale nelle quantità indicate, a coefficienti razionali. Il nostro scopo è quello di determinare i λ_n in modo tale che

(i) $\phi(z)$ sia una funzione intera,

(ii) b_n siano in $\mathbb{Q}$ o in K, rispettivamente.

(i) è soddisfatto se, e soltanto se, $\lim_n |\lambda_n|^{1/n} = 0$. Questo è vero se, per esempio, scegliamo $|\lambda_n| \leq n^{-n}$. Ora utilizziamo il fatto che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$, e che ogni campo immaginario è denso in $\mathbb{C}$: possiamo, infatti scegliere i λ_n uno dopo l'altro in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$, in modo che la condizione (i) sia verificata, e che i numeri $b_n = P_n + \lambda_n$ siano in $\mathbb{Q}$ o in K, rispettivamente. La costruzione della funzione desiderata $g(z)$ è, quindi, completata. $\square$

Teorema 3.1.4 (Teorema fondamentale di fattorizzazione in $K\langle z\rangle$). [4] *Ogni funzione $f(z) \in K\langle z\rangle$, non nulla e non invertibile, può essere rappresentata come un prodotto (finito o infinito) di elementi irriducibili di $K\langle z\rangle$. Tale rappresentazione è unica a meno dell'ordine dei fattori e di elementi invertibili.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui K sia immaginario. Sia

$$f(z) = Cz^m e^{\psi(z)} \prod_k f_k(z) \tag{3.1.6}$$

la rappresentazione di Weierstrass di $f(z)$, in cui il prodotto (3.1.6) ha almeno un fattore e potrebbe averne infiniti, e gli $f_k(z)$ possiedono esattamente una radice. C può essere scelto in maniera che $\psi(0) = 0$; C è allora il primo coefficiente di $f(z)$ non nullo e, quindi, appartiene a K. Dal lemma precedente, ogni $f_k(z)$ può essere moltiplicata per un opportuno elemento invertibile $e^{\phi_k(z)}$, in modo che $f_k(z)e^{\phi_k(z)}$ abbia coefficienti in K. Se

$$\phi_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{k_n} z^n ,$$

i $|\lambda_{k_n}|$ devono essere $\leq n^{-n}$ e possono essere scelti arbitrariamente piccoli; in particolare, possiamo richiedere che

$$|\lambda_{k_n}| \leq \frac{1}{2^k n^n} .$$

[4][13], teorema 6.

Ciò fa sì che

$$\phi(z) = \sum_k \phi_k(z) = \sum_k \sum_n \lambda_{k_n} z^n = \sum_n z^n \sum_k \lambda_{k_n}$$

con

$$|\sum_k \lambda_{k_n}| \leq \sum_k |\lambda_{k_n}| \leq \sum_k \frac{1}{2^k n^n} \leq \frac{1}{n^n}\,,$$

cosicché $\phi(z)$ è una funzione intera. Se si pone

$$g_k(z) = f_k(z) e^{\phi_k(z)}\,,$$

abbiamo

$$f(z) = C z^m e^{\psi(z)-\phi(z)} \prod_k g_k(z)\,. \tag{3.1.7}$$

Se il prodotto a destra della (3.1.7) è finito, questo appartiene a $K\langle z \rangle$, poiché ciascuno dei fattori ci appartiene; perciò $e^{\psi-\phi}$ appartiene a $K\langle z \rangle$, e le (3.1.7) è la rappresentazione di $f(z)$ desiderata. Ciò potrebbe non essere se il prodotto è infinito. In questo caso, sia

$$\psi(z) - \phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n\,.$$

Per ogni n, si deve scegliere una successione di numeri $\gamma_{1_n}, \gamma_{2_n}, \ldots$ in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

$$\gamma_{k_n} \in K, \qquad \sum_k \gamma_{k_n} = \gamma_n, \qquad |\gamma_{k_n}| \leq n^{-n}\,. \tag{3.1.8}$$

Questo è possibile, perché K è denso in $\mathbb{C}$. Sia

$$\psi_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} z^n\,.$$

Per la (3.1.8), $\psi_k(z)$ è un elemento di $K\langle z \rangle$, e

$$\sum_k \psi_k(z) = \sum_n \gamma_n z^n = \psi(z) - \phi(z).$$

Quindi

$$f(z) = C z^m \prod_k e^{\psi_k(z)} \prod_k g_k(z) = C z^m \prod_k [e^{\psi_k(z)} g_k(z)]\,,$$

in cui ogni fattore del prodotto, per la proposizione precedente è in $K\langle z\rangle$. Quindi, anche in questo caso, siamo arrivati alla rappresentazione di $f(z)$ desiderata. Che quest'ultima sia unica, a meno dell'ordine dei fattori e di elementi invertibili, è ovvio.
Dobbiamo ancora trattare il caso in cui K sia reale. L'insieme Z_f è allora simmetrico, e $f(z)$ può essere scritto nella forma (3.1.6), dove ora le $f_k(z)$ hanno un significato diverso: esse hanno o una radice reale, oppure hanno una coppia di radici complesse coniugate. In (3.1.6), $\psi(z)$, come pure ogni $f_k(z)$ è allora in $\mathbb{R}\langle z\rangle$, e il resto della dimostrazione procede come prima, eccetto per le λ_{k_n}, che devono (e possono) essere scelte in $\mathbb{R}$; in particolare, la (3.1.8) viene soddisfatta, perché K è denso in $\mathbb{R}$. $\square$

3.2 Gli ideali di E

Facciamo ora qualche considerazione sugli insiemi degli zeri. Abbiamo visto che gli elementi invertibili di $\mathbf{E}$ sono della forma $e^{g(z)}$, quindi, data $f \in \mathbf{E}$, tutti e soli i suoi elementi associati sono del tipo $e^{g(z)}f(z)$, $\forall g \in \mathbf{E}$, perciò due funzioni associate hanno lo stesso insieme degli zeri, e viceversa. In altre parole, c'è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi degli zeri e l'insieme delle funzioni intere associate; in particolare:

- Alla classe degli elementi invertibili di $\mathbf{E}$ corrisponde $\emptyset$, in altre parole, $f \in \mathbf{E}$ è un elemento invertibile $\iff Z_f = \emptyset$.
- $f \in \mathbf{E}$, $f \neq 0$ e non invertibile, è irriducibile $\iff |Z_f| = 1$.
- $f \in \mathbf{E}$ è un prodotto finito di elementi irriducibili $\iff |Z_f| < \infty$.

Se I un ideale non nullo di $\mathbf{E}$, poniamo $Z(I) = \{Z_f : f \in I\}$. Ne segue, per quanto appena detto, che la natura degli ideali $I \subset \mathbf{E}$ è completamente determinata dagli insiemi $Z(I)$.

In accordo con la terminologia usata da Henriksen ([14], definizione 3), classifichiamo gli ideali dell'anello $\mathbf{E}$ come segue:

Definizione 3.2.1. *Un ideale proprio $I \subset$ **E** è chiamato **fisso** se, e soltanto se, $\bigcap_{f \in I} Z_f \neq \emptyset$; altrimenti è chiamato **libero**.*

La struttura degli ideali fissi è piuttosto semplice, Helmer la determinò nel corso del suo studio sulle proprietà aritmetiche delle funzioni intere, ([13], teoremi 7-8-9). Egli notò che se S è un qualsiasi sottoinsieme finito di $\mathbf{E}$, allora ogni funzione $d \in \mathbf{E}$ tale che

$$Z_d = \bigcap_{f \in S} Z_f \tag{3.2.9}$$

è un massimo comun divisore delle funzioni di S. Inoltre, mostrò che $\mathbf{E}$ è un dominio di Bézout. Daremo adesso le dimostrazioni di tali fatti, utilizzando un linguaggio più moderno.

Proposizione 3.2.2. *Siano $f, g \in$ **E**. Allora $g \in (f) \iff Z_f^* \subseteq Z_g^*$ e $o_f(z) \leq o_g(z)$, per ogni $z \in Z_f^*$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Se $g \in (f)$, allora $g = fh$, $h \in \mathbf{E}$, e quindi $Z_g^* = Z_{fh}^* = Z_f^* \cup Z_h^* \supseteq Z_f^*$; inoltre, se $z \in Z_f^*$, $o_f(z) \leq o_{fh}(z) = o_g(z)$.
($\Leftarrow$): Per la proposizione 2.4.10, esiste $h \in \mathbf{E}$, tale che $Z_h^* = Z_g^* - Z_f^*$, con $o_h(z) = o_g(z) - o_f(z)$, per ogni $z \in Z_h^*$. Quindi, essendo la fattorizzazione unica a meno di elementi invertibili, otteniamo che $hf \sim g$, ovvero $g \in (f)$.

□

Proposizione 3.2.3. ***E** è un MCD-dominio.*

Dimostrazione. Segue facilmente per la proposizione 3.2.2; infatti, prese comunque $f, g \in \mathbf{E}$, non entrambe nulle, si ha che $MCD(f, g) = d$, dove, per la proposizione 2.4.10, d è una funzione intera avente $Z_d^* = Z_f^* \cap Z_g^*$ e per ogni $z \in Z_d$, $o_z(d) = min\{o_z(f), o_z(g)\}$ □

Segue facilmente la seguente proposizione:

Proposizione 3.2.4. ***E*** *è completamente integralmente chiuso.*

Dimostrazione. Sia $h \in M(\mathbb{C})$ un elemento quasi intero su $\mathbf{E}$. Allora per la proposizione 1.2.2 esiste in $\mathbf{E}$ un elemento $d \neq 0$, tale che per ogni intero positivo n, $dh^n \in \mathbf{E}$. Diciamo che $h = f/g$, con $f, g \in \mathbf{E}$, e possiamo supporre che $\text{MCD}(f, g) = 1$. Vogliamo provare che g è invertibile in $\mathbf{E}$. Se g fosse un elemento non invertibile in $\mathbf{E}$, ; allora g non dividerebbe f (e quindi g^n non dividerebbe f^n, per ogni $n \geq 1$), ed otterremmo che g^n dividerebbe d, ovvero $d \in (g^n)$, e quindi, per la proposizione 3.2.2, $Z^*_{g^n} \subseteq Z^*_d$ e $o_z(g^n) \leq o_z(d)$, per ogni $z \in Z^*_{g^n}$. Inoltre Z_g sarebbe non vuoto, e preso, allora, uno $z_0 \in Z^*_g$, otteniamo che, per ogni intero positivo n, $z_0 \in Z^*_{g^n}$ ed in particolare $z_0 \in Z^*_d$, con $o_{z_0}(g^n) \leq o_{z_0}(d)$. Ma $o_{z_0}(g^n) = n o_{z_0}(g) \leq o_{z_0}(d)$, per ogni n positivo, e questo non è possibile a meno che $o_{z_0}(g) = 0$, cioè, a meno che g sia invertibile in z_0, che è assurdo. Allora $h \in \mathbf{E}$, per cui $\mathbf{E}$ è completamente integralmente chiuso. □

Continuiamo ad analizzare la struttura degli ideali di $\mathbf{E}$. Il prossimo passo è quello di dimostrare che $\mathbf{E}$ è un dominio di Bézout.

Teorema 3.2.5. *Per ogni $f, g \in$* ***E****, non entrambe nulle, sia $d = MCD(f, g)$. Allora esistono $\lambda, \mu \in$* ***E*** *tali che $d = \lambda f + \mu g$, cioè* ***E*** *è un dominio di Bézout. Quindi ogni ideale proprio I di* ***E*** *finitamente generato è fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che f e g non abbiano zeri in comune, ovvero che $\text{MCD}(f, g) = 1$. Allora

$$\frac{1}{fg} = F$$

è una funzione meromorfa del campo complesso, i cui poli sono gli zeri di f e di g; il teorema di Mittag-Leffler ci assicura che

$$F = h_1 + h_2$$

dove h_1 e h_2 possiedono come poli gli zeri di f e di g, rispettivamente, e l'ordine di tali poli coincide con l'ordine degli zeri corrispondenti. Da qui deduciamo, salvo singolarità eliminabili, che fh_1 e gh_2 sono funzioni intere, per cui

$$1 = (fh_1)g + (gh_2)f.$$

Nel caso generale in cui $Z_f \cap Z_g \neq \emptyset$, sia $d = MCD(f,g)$; dalla prima parte della dimostrazione segue che esistono $a_1, b_1 \in \mathbf{E}$ tali che $1 = a_1(f/d) + b_1(f/d)$, da cui $d = a_1 f + b_1 g$. □

Helmer diede anche un esempio di ideale fisso non finitamente generato:

Esempio: ([13], teorema 8)

- Si consideri l'ideale S generato dalle seguenti funzioni intere:

$$f_0(z) = \sin z,\ \ f_1(z) = \sin \frac{1}{2} z, \ldots,\ \ f_n(z) = \sin \frac{1}{2^n} z, \ldots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  È ovvio che 0 è uno zero comune a tutte le funzioni f_n, quindi $S \subseteq (id_{\mathbb{C}})$, ma $S \neq (id_{\mathbb{C}})$. Infatti, $id_{\mathbb{C}}$ non è un elemento di S, perché se lo fosse esisterebbe un $m \geq 0$ tale che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, si avrebbe

$$z = h_0(z) f_0(z) + h_1(z) f_1(z) + \cdots + h_m(z) f_m(z), \text{ con } h_i \in \mathbf{E}.$$

  Ma essendo $Z_{f_n} = \{2^n k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, dovrebbe verificarsi che $Z_{id_{\mathbb{C}}} \supseteq \{2^m k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, che è assurdo. Allora se S fosse principale, un suo generatore dovrebbe essere una funzione f, tale che $f(z) = zg(z)$, con $g \in \mathbf{E}$, non invertibile in $\mathbf{E}$ e tale che $g(0) \neq 0$, essendo 0 uno zero semplice di ogni f_n. Ma anche questo caso è impossibile, perché se ogni $f_n \in (f)$, allora per la proposizione 3.2.2 $Z_f^* \subseteq Z_{f_n}^*$, per ogni n, cioè $Z_f^* \subseteq \bigcap_n Z_{f_n}^* = \{0\}$, cioè g dovrebbe essere invertibile in $\mathbf{E}$.

Osservazione 3.2.6. *Il fatto che esistano ideali non finitamente generati implica, oltre che* $\mathbf{E}$ non *è un PID, anche che* $\mathbf{E}$ non *è Noetheriano.*

Analizziamo ora la struttura degli ideali liberi. Innanzi tutto verifichiamo l'esistenza di ideali liberi:

Esempio: ([14], esempio pag. 181)

- Sia $\{z_n\}$ una successione di numeri complessi tali che $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Sia $\{S_N\} = \{z_N, z_{N+1}, \ldots\}$. Costruiamo, per ogni numero naturale N una funzione intera F_N, tale che $Z_{F_N} = S_N$ (proposizione 2.4.10). Sia $I = (F_N)_{N\geq 1}$. Ovviamente I è un ideale libero.

Corollario 3.2.7. *Nessun ideale libero I di R è finitamente generato, e nessuna funzione polinomiale appartiene ad un ideale libero.*

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{E}$ è un dominio di Bézout, ogni numero finito di elementi di I ha zeri comuni, quindi I non può essere finitamente generato. Supponiamo ora che I contenga una funzione polinomiale h. Assumiamo che $z_1, z_2, \ldots, z_t$ siano gli zeri distinti di h; poiché $\bigcap_{f\in I} Z_f = \emptyset$, esistono $f_1, f_2, \ldots, f_t \in I$ tali che $f_i(z_i) \neq 0$. Sia $I_0 = (h, f_1, f_2, \ldots, f_t)$. Allora, $\bigcap_{f\in I_0} Z_f = \emptyset$, che è un assurdo, dato che non esistono ideali liberi finitamente generati. $\square$

Inoltre, è facile mostrare che *ogni ideale divisoriale di $\mathbf{E}$ è principale*: infatti, se $I \subset \mathbf{E}$ è libero (e quindi non principale), allora $I^{-1} = \mathbf{E}$, per cui I non è divisoriale (dato che $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$), mentre se $I \subset \mathbf{E}$ è un ideale fisso, allora, per la proposizione 2.4.10 esiste una funzione $g \in \mathbf{E}$ tale che

$$\begin{aligned} Z_g^* &= \textstyle\bigcap_{h\in I} Z_h^* \text{ e} \\ o_z(g) &= \min\{o_z(f) : f \in I\} \quad \text{per ogni } z \in Z_g^* \end{aligned}$$

e, per costruzione, $I \subseteq (g)$; inoltre, $g \in (I^{-1})^{-1}$ (perché un elemento $\eta \in M(\mathbb{C})$, diciamo $\eta = h/t$ e possiamo supporre $\mathrm{MCD}(h,t) = 1$, appartiene a $I^{-1} \iff (h/t)f \in \mathbf{E}$, per ogni $f \in I \iff t$ divide f per ogni $f \in I$, e quindi, per costruzione, t divide g, perciò $g\eta \in \mathbf{E}$ per ogni $\eta \in I^{-1}$ e, siccome $(I^{-1})^{-1} = \{\theta \in M(\mathbb{C}) : \theta I^{-1} \subseteq \mathbf{E}\}$, $g \in (I^{-1})^{-1}$) quindi se I è divisoriale, $I = (g)$ è principale. Sia ora J è un ideale divisoriale di $\mathbf{E}$, allora $J = Id^{-1}$, per qualche elemento $d \in \mathbf{E}$, e per qualche ideale $I \subset \mathbf{E}$, ovvero $I = Jd$, ma $I_v = (Jd)_v = dJ_v = Jd = I$, cioè, per quanto appena detto I è principale, diciamo $I = Ef$, e quindi $J = Efd^{-1}$ è esso stesso principale. In altre parole,

$\mathbf{E}$ è quello che Bourbaki definisce un dominio **pseudo-principale**[5].

Dopo aver esibito alcune proprietà generali degli ideali, indaghiamo gli ideali primi e massimali dell'anello $\mathbf{E}$. Mostreremo che ogni ideale, non nullo, primo e fisso è massimale; tuttavia, daremo esempi di primi non massimali, e termineremo il capitolo determinando la dimensione (di Krull) di $\mathbf{E}$.

Teorema 3.2.8. *Ogni ideale massimale fisso di* $\boldsymbol{E}$ *è della forma*

$$I(z_0) = \{f \in \boldsymbol{E} : f(z_0) = 0\}, \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

Inoltre, il campo residuo di ogni ideale massimale fisso è isomorfo a $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sia z_0 un elemento di $\mathbb{C}$. Chiaramente $I(z_0)$ è un ideale fisso di $\mathbf{E}$. Inoltre l'applicazione $f(z) \to f(z_0)$ è chiaramente un omomorfismo di $\mathbf{E}$ su $\mathbb{C}$, che ha $I(z_0)$ per nucleo. Quindi $I(z_0)$ è massimale. Viceversa, se I è un ideale fisso di $\mathbf{E}$, e se $\bigcap_{f \in I} Z_f$ contenesse due punti z_1, z_2, non necessariamente distinti, allora I sarebbe contenuto propriamente in $I(z_1)$ o $I(z_2)$. □

Si consideri la funzione intera t_a, tale che $t_a(z) = z - a$, con $a \in \mathbb{C}$. L'ideale (t_a) è un ideale massimale, infatti, (t_a)=$\{f \in \mathbf{E} : f(a) = 0\}$.

Inoltre (t_a) *non contiene strettamente nessun ideale primo proprio*: infatti, sia P un ideale primo, $P \neq (0)$, $P \subset (t_a)$, e si consideri $0 \neq f \in P$; allora $f(z) = (z-a)^m g(z)$, con $g(a) \neq 0$, quindi, $g \notin (t_a)$, ovvero, $g \notin P$; ed essendo P primo, si ha $t_a^m \in P$, da cui $t_a \in P$, cioè $(t_a) = P$. Viceversa, *ogni ideale primo finitamente generato è del tipo* (t_{z_0}), *con* $z_0 \in \mathbb{C}$: se, infatti, (f) è un ideale primo proprio, allora f non è identicamente nulla; supponiamo che z_0 e z_1 siano due suoi zeri distinti. Possiamo scrivere $f = gh$, con $g(z_0) \neq 0$ e $h(z_1) \neq 0$, ma $h \notin (f)$ e $g \notin (f)$, contraddicendo la definizione di ideale primo. Si deduce che $f = t_{z_0}^n$, allora $t_{z_0} \in (f)$, ovvero $(t_{z_0}) = (f)$.

La struttura degli ideali liberi è, invece, più complessa, in particolare per gli ideali massimali liberi abbiamo il seguente

Teorema 3.2.9. *Se* M *è un ideale massimale libero di* $\boldsymbol{E}$*, allora* $\boldsymbol{E}/M$ *contiene un sottocampo isomorfo a* $\mathbb{C}(Z)$*, dove* Z *è una indeterminata su* $\mathbb{C}$

[5] [4], esercizio 21 pag 551.

Dimostrazione. Definiamo $\phi : \mathbb{C}[Z] \to \mathbf{E}/M$, con $\phi(f) = f + M$. ϕ è un omomorfismo d'anelli, ed è iniettivo per il corollario 3.2.7. $\square$

Introduciamo ora una nuova notazione ([15], definizione 2):

Definizione 3.2.10. *Sia $0 \neq f \in \mathbf{E}$, con $Z_f^* = \{z_n\}$. Sia $\{r_n\}$ la successione delle molteplicità associata. Poniamo $m(f) := \sup\{r_n\}$.*

Teorema 3.2.11. *Se M è un ideale massimale di $\mathbf{E}$, allora esiste un elemento $g \in M$, tale che $m(g) = 1$.*

Dimostrazione. Sia M un ideale massimale di $\mathbf{E}$, e sia $0 \neq f \in M$. Per la proposizione 2.4.10 esiste un elemento $g \in \mathbf{E}$ tale che $Z_f^* = Z_g^*$ ed $m(g) = 1$. Quindi $Z_g = Z_g^*$. Vogliamo mostrare che $g \in M$. Se, per assurdo, $g \notin M$, $(M, g) = \mathbf{E}$; cosicché $1 = h + gs$, con $h \in M$, e $s \in \mathbf{E}$. Poiché $\mathbf{E}$ è un BD, $MCD(h, f) = (d) \subseteq M$ e, quindi, $Z_h \cap Z_f \neq \emptyset$. Allora anche $Z_h \cap Z_g \neq \emptyset$, che è una contraddizione. $\square$

A questo punto, è naturale chiedersi se ogni ideale primo è massimale, ed in caso di risposta negativa, studiare la dimensione (di Krull) dell'anello $\mathbf{E}$.

Esempio: (Kaplansky)

- Sia $S = \{f \in \mathbf{E} : m(f) < \infty\}$. Chiaramente, S è un insieme moltiplicativamente chiuso, saturo (cioè, $fh \in S \Rightarrow f, h \in S$) e non contenente lo 0. Sia $g \in \mathbf{E} - S$, allora g è contenuto in un primo P, tale che $P \cap S = \emptyset$ (basta considerare l'insieme $\{I \text{ ideali di } \mathbf{E} : g \in I,\ I \cap S = \emptyset\}$; tale insieme non è vuoto perché $g \in (g)$ e $(g) \cap S = \emptyset$. Presa una catena $\{I_\lambda\}$, $\bigcup I_\lambda$ è un maggiorante, per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale P, che è un ideale primo: infatti, se si suppone che $ab \in P$, ma $a, b \notin P$, si ha che $(a, P) \cap S \neq \emptyset$ e $(b, P) \cap S \neq \emptyset$, quindi $s = \lambda a + x$, $s' = \mu b + y$, con $x, y \in P$; moltiplicando membro a membro, $ss' = \lambda a \mu b + \lambda a y + x \mu b + xy \in P$, che è assurdo.) Allora, per il teorema 3.2.11, ogni ideale massimale contiene un elemento f tale che $m(f) = 1$, P non può essere massimale.

Diamo ora una caratterizzazione degli ideali primi non massimali:

Teorema 3.2.12. *Sia P un ideale primo di $\mathbf{E}$ non nullo.*
P non è massimale $\iff m(f) = \infty, \forall f \in P$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$): questa implicazione è immediata per il teorema 3.2.11.

($\Rightarrow$): supponiamo che P sia un ideale primo, non nullo e non massimale di $\mathbf{E}$, e supponiamo che esista $f \in P$ tale che $m(f) < \infty$. Vogliamo mostrare, allora, che esiste $g \in P$, con $m(g) = 1$. Infatti se tale g non esistesse, possiamo trovare una funzione $0 \neq f_1 \in P$ tale che $m(f_1) > 1$ e $m(f_1)$ sia minimo. Sia $h \in \mathbf{E}$ con $Z_h^* = Z_{f_1}^*$ e $m(h) = 1$; sappiamo che $f_1 = hh_1$, con $h_1 \in \mathbf{E}$. Poiché $h \notin P$ e P è un ideale primo, si ha $h_1 \in P$. Per la minimalità di $m(f_1)$, $m(h_1) \geq m(f_1)$; abbiamo trovato una contraddizione, giacchè $Z_{h_1}^* \subseteq Z_{f_1}^* = Z_h^*$ e $f_1 = hh_1$. Quindi, esiste $g \in P$ con $m(g) = 1$. Sia ora M un ideale massimale di $\mathbf{E}$ tale $P \subset M$, e sia $h \in M - P$. Essendo $\mathbf{E}$ un BD, possiamo trovare $k \in M$, $k =$MCD(g, h). Quindi, $g = g_1 k$, per cui $g_1 \in P$, o $k \in P$. Ma, siccome $m(g) = 1$, $Z(g_1) \cap Z_k = \emptyset$, e quindi $(g_1, k) = \mathbf{E}$, da cui $g_1 \notin P$. Allora $k \in P$, cosicché $h \in P$, che è una contraddizione. $\square$

Teorema 3.2.13. *Se M è un ideale massimale di $\mathbf{E}$, allora $M \neq M^2$.*

Dimostrazione. Dal teorema 3.2.11, esiste un elemento $g \in M$ con $m(g) = 1$. Vogliamo mostrare che $g \notin M^2$. Infatti, se $g \in M^2$, allora $g = \sum_{i=1}^{n} f_i h_i$, con $f_i, h_i \in M$, per ogni i. Essendo $\mathbf{E}$ un BD, possiamo scrivere $g = fh$, con $f, h \in M$; però $Z_f \cap Z_h \neq \emptyset$, che contraddice il fatto che $m(g) = 1$. $\square$

Teorema 3.2.14. *Sia M un ideale libero di $\mathbf{E}$. M è massimale $\iff Z(M)$ soddisfa la seguente condizione: se $D = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_j \in \mathbb{C}$, è un sottoinsieme discreto e infinito tale che $D \cap Z(M) \neq \emptyset$, per ogni $f \in M$, allora $D \in Z(M)$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$): Assumiamo che M non sia un ideale massimale di $\mathbf{E}$. Sia N un ideale che contiene propriamente M. Siccome N è un ideale libero, N non contiene polinomi; perciò, se $g \in N$, Z_g^* è un insieme infinito e discreto. Così, $Z_g^* \cap Z_f \neq \emptyset$, per ogni $f \in N$, quindi per ogni $f \in M$. Dunque, $g \in M$, cioè, M è massimale.

($\Rightarrow$): Assumiamo che M sia un ideale massimale libero di $\mathbf{E}$. Supponiamo che esista un insieme D infinito e discreto, ma non verificante la tesi, e sia $g \in \mathbf{E}$ tale che $Z_g = D$. Allora, $M \subset (M, g) \subset \mathbf{E}$, perché $Z(M) \neq Z(M, g)$ e $1 \notin (M, g)$, e ciò contraddice la massimalità di M. $\square$

Corollario 3.2.15. *Siano I un ideale libero di $\mathbf{E}$ ed $f \in \mathbf{E}$ tale che $m(f) = 1$. Allora l'ideale $N = (I, f)$ è massimale.*

Dimostrazione. Sia M un massimale contenente N. Se $g \in M$, allora $Z_g^* \cap Z_h \neq \emptyset$, per ogni $h \in N$. Di conseguenza, per il teorema 3.2.14, $g \in N$. $\square$

Teorema 3.2.16. *Ogni ideale primo di $\mathbf{E}$ è contenuto in un unico ideale massimale.*

Dimostrazione. Sia P un ideale primo libero, non massimale. Supponiamo che M_1, M_2 siano due ideali massimali che contengono propriamente P. Possiamo scegliere per il teorema 3.2.11 $f_i \in M_i$, tale che $m(f_i) = 1$, (i=1, 2). Per il corollario 3.2.15, $(P, f_1) = M_1$ e $(P, f_2) = M_2$. Si possono verificare due casi.

Caso 1: Se $Z_{f_1} \cap Z_{f_2} \neq \emptyset$, allora esiste $d \in \mathbf{E}$ tale che $Z_d = Z_{f_1} \cap Z_{f_2}$, e quindi $d =$MCD(f_1, f_2), e $m(d) = 1$. Allora, (P, d) è un ideale massimale di $\mathbf{E}$ per il corollario 3.2.15. Ma siccome $M_1 = (P, f_1) \subseteq (P, d)$ e $M_2 = (P, f_2) \subseteq (P, d)$, si ha $(P, d) = M_1 = M_2$.

Caso 2: Se $Z_{f_1} \cap Z_{f_2} = \emptyset$, sia $g = f_1 f_2$. Allora $m(g) = 1$ e quindi (P, g) è massimale; poiché $(P, g) \subseteq M_1 \cap M_2$, $(P, g) = M_1 = M_2$. $\square$

3.3 La dimensione di E

Ricordiamo che una successione finita e strettamente crescente, $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$, di ideali primi di un anello R si dice una **catena**; la **lunghezza** della catena è n. Si definisce **dimensione (di Krull)** dell'anello R l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le catene di ideali primi di R; essa è un intero ≥ 0, oppure è $+\infty$.

Per determinare la dimensione dell'anello $\mathbf{E}$, diamo un altro esempio di ideale primo proprio non massimale. Prima però ricordiamo una proprietà degli ideali primi minimali:

Lemma 3.3.1. *Siano R un anello e $P \in Spec(R)$. Se P è minimale, allora $\forall x \in P$, $\exists\, a \in R - P$ tale che ax è nilpotente.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista $x \in P$ tale che, per ogni $a \in R - P$, ax non è nilpotente. Consideriamo l'insieme

$$S = \{ax^n : a \in R - P,\, n \geq 1\}.$$

S è moltiplicativamente chiuso; $S \subseteq P$ e $0 \notin S$: infatti se $0 = ax^n$, allora $0 = a^n x^n = (ax)^n$. Sia

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq R : I \subseteq P,\;\; I \cap S = \emptyset\}.$$

$\mathcal{I} \neq \emptyset$, perché $(0) \in \mathcal{I}$; inoltre $(\mathcal{I}, \subseteq)$ è induttivo, cioè ogni catena ammette un maggiorante (data, infatti una catena $\{I_\lambda\}_{\forall \lambda \in \Lambda}$, $\bigcup I_\lambda$ è un ideale contenuto in P e $\bigcup I_\lambda \cap S = \emptyset$). Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale P', ideale di R, tale che $P' \subseteq P$. Dal momento che $P' \cap S = \emptyset$, si ha $P' \subset P$. Basta ora mostrare che P' è primo: se, per assurdo, esistessero $a', b' \in R$ tali che $a', b' \notin P'$ e $a'b' \in P'$, si possono verificare tre casi,

caso 1: se $a', b' \notin P$, allora $a'b' \notin P$, perché P è primo, quindi $a'b' \notin P'$.

Caso 2: se $a' \notin P$ e $b' \in P$, allora $P' \subset (P', b') \subseteq P$, da cui $(P', b') \cap S \neq \emptyset$, ovvero esistono $s \in S$, $p' \in P'$ e $\lambda \in R$, tali che $s = p' + \lambda b' = ax^n$; moltiplicando per a' si ottiene $a's = a'ax^n = a'p' + \lambda a'b' \in S \cap P'$, mentre $a'a \in R - P$, che è assurdo.

Caso 3: se $a', b' \in P$, si ha $P' \subset (P', a') \subseteq P$, quindi $(P', a') \cap S \neq \emptyset$, e si ha $P' \subset (P', b') \subseteq P$, quindi $(P', b') \cap S \neq \emptyset$; quindi esistono $s_1, s_2 \in S$, $q_1, q_2 \in P'$ e $\mu, \lambda \in R$ tali che $s_1 = q_1 + \mu a'$ e $s_2 = q_2 + \lambda b'$. Moltiplicando membro a membro si ottiene

$$s_1 s_2 = (q_1 + \mu a')(q_2 + \lambda b') = q_1(q_2 + \lambda b') + \mu a' q_2 + \mu\lambda a'b' \in P'$$

cioè $ss' \in S \cap P'$, che è assurdo. □

In generale, dato un dominio A ed un ideale $I \subseteq A$, diciamo che $P \in Spec(A)$ è minimale su I se, e soltanto se, P/I è un primo minimale di

A/I (ovvero, non esiste alcun ideale primo P_0 di A tale che $I \subseteq P_0 \subset P$); dalla proposizione precedente ricaviamo quindi che, $\forall x \in P$, esistono un $n \geq 1$ ed $e \in A - P$ tale che, $ex^n \in I$.

Esempio di un ideale primo, non nullo, non massimale: [6]

- Sia $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Sia f_k una funzione intera che possiede zeri di molteplicità n in $z = n$, per $n = k, k+1, \ldots$ Sia $\tilde{f}_k$ una funzione intera che possiede zeri semplici nei punti $z = k+1, k+2, \ldots$ Sia

$$A_1 = (f_1, f_2, \ldots), \qquad A_0 = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots).$$

Ovviamente $A_1 = \bigcup(f_k)$ e $A_0 = \bigcup(\tilde{f}_k)$ sono ideali propri. Sia P_0 un ideale primo minimale su A_0; essendo $A_1 \subset A_0 \Rightarrow A_1 \subset P_0$. Quello che vogliamo dimostrare è che P_0 non è un ideale primo minimale su A_1, il che prova l'esistenza di un ideale primo non nullo strettamente contenuto in P_0, pertanto non massimale. Supponiamo, per assurdo, che P_0 sia un ideale primo minimale su A_1; essendo $\tilde{f}_1 \in P_0$, esistono (per il lemma precedente) un elemento $h \notin P_0$ ed un $r \geq 1$, tali che $\tilde{f}_1^r h \in A_1$ ovvero, per un certo k, si verifica che $h\tilde{f}_1^r = f_k g$, $(g \in \mathbf{E})$. Allora, ogni intero $k_0 > \max\{r, k\}$ è uno zero per h di molteplicità almeno 1, quindi $h \in (\tilde{f}_{k_0})$, cioè $h \in A_0 \subseteq P_0$, assurdo.

Avendo in mente l'esempio precedente, costruiamo una successione di ideali $\{A_r\}$, tali che $A_{r+1} \subset A_r$, per ogni $i \geq 0$:
Per $k, r \in \mathbb{N} - \{0\}$, sia $f_{k,r} \in \mathbf{E}$ tale che

$$\begin{aligned} Z^*_{f_{k,r}} &= \{k, k+1, \ldots\} \\ o_{k+n}(f_{k,r}) &= (k+n)^r, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sia A_r l'ideale di $\mathbf{E}$ definito nel seguente modo

$$A_r = (f_{k,r})_{k=0}^{\infty}.$$

$A_{r+1} \subset A_r$, perché $Z^*_{f_{k,r}} = Z^*_{f_{k,r+1}}$ e $o_{k+n}(f_{k,r}) < o_{k+n}(f_{k,r+1})$ (proposizione 3.2.2). Inoltre (come nell'esempio precedente), per ogni $r \geq 1$ $A_r = \bigcup_{k \geq 0}(f_{k,r})$.

[6] [17], pag. 42.

Sia P_r un ideale primo minimale su A_r, quindi $A_{r+1} \subseteq P_r$, inoltre P_r non è minimale su A_{r+1}: infatti, se lo fosse, considerando l'elemento $f_{1,r} \in P_r$, esisterebbero un elemento $h \notin P_r$ ed un numero naturale $s \geq 1$, tali che $hf_{1,r}^s \in A_{r+1}$, cioè, $hf_{1,r}^s = f_{k,r+1}g$, dove $g \in \mathbf{E}$. Allora, se k_0 è uno zero per $f_{1,r}$ (ed anche per $f_{1,r+1}$) con $k_0 > \max\{s, k\}$, otteniamo che k_0 è anche uno zero per h e che $o_{k_0}(h) \geq k_0^r(k_0 - s)$, ovvero $h \in (f_{k_0,r}) \subseteq A_r$, quindi $h \in P_r$, che è assurdo.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 3.3.2. *$dim(\boldsymbol{E}) = +\infty$.*

3.4 Localizzazioni

Concludiamo il capitolo, dimostrando ulteriori proprietà dell'anello delle funzioni intere, soffermandoci, in particolare sulla seguente proposizione, che utilizzeremo nel prossimo capitolo:

Proposizione 3.4.1. *Per ogni $a \in \mathbb{C}$, sia M_a l'ideale generato dalla funzione polinomiale $t_a : z \to z - a$, . Allora*

$$\boldsymbol{E} = \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \boldsymbol{E}_{M_a}. \tag{3.4.10}$$

Dimostrazione. Banalmente $\mathbf{E} \subseteq \bigcap_{a\in\mathbb{C}} \mathbf{E}_{M_a}$, perché $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}_{M_a}$, $\forall a \in \mathbb{C}$. Sia $u \in \bigcap_{a\in\mathbb{C}} \mathbf{E}_{M_a}$, e si consideri $I = (\mathbf{E} : u\mathbf{E}) = \{c \in \mathbf{E} : cu\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}\}$. Ovviamente $I \nsubseteq M_a$, $\forall a \in \mathbb{C}$ (infatti, se per assurdo $\exists\, a_0 \in \mathbb{C}$ per cui $I \subseteq M_{a_0}$, dato che $u \in \bigcap_{a\in\mathbb{C}} \mathbf{E}_{M_a}$, in particolare $u \in \mathbf{E}_{M_{a_0}}$, diciamo $u = \bar{f}/\bar{g}$, con $\bar{f}, \bar{g} \in \mathbf{E}$ e $\bar{g} \notin M_{a_0}$, cioè $\bar{g}(a_0) \neq 0$. Allora $\bar{g}u = \bar{f} \in \mathbf{E}$; quindi $\bar{g}u\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$, ovvero $\bar{g} \in I \subseteq M_{a_0}$, da cui $\bar{g}(a_0) = 0$, che è assurdo.) Allora scriviamo $u = f/g$, con $f, g \in \mathbf{E}$ e $g \neq 0$, e abbiamo che $I = (f\mathbf{E} : g\mathbf{E})$ è finitamente generato (lemma 1.7.4), quindi $I = (d)$, da cui $I = \mathbf{E}$, ovvero $u \in \mathbf{E}$. □

Osservazione 3.4.2. *Si noti che la (3.4.10) è una S-rappresentazione per $\boldsymbol{E}$, e come tale è unica (teorema 1.7.11).*

Si è osservato che per ogni $a \in \mathbb{C}$ l'ideale M_a è un ideale massimale che non contiene strettamente nessun ideale primo proprio, da cui $\mathbf{E}_{M_a}$ è uno-dimensionale; inoltre, sappiamo che $\mathbf{E}_{M_a}$ è un sovranello di valutazione di $\mathbf{E}$ (perché $\mathbf{E}$ è di Prüfer) e se consideriamo

$$v_a : M(\Omega) - \{0\} \to \mathbb{Z} \qquad \text{tale che} \qquad v_a(\tfrac{f}{g}) = o_a(f) - o_a(g)$$

è una valutazione discreta, che ha E_{M_a} come anello associato alla valutazione. Quindi, ***E*** *è esprimibile come un'intersezione di sovranelli di valutazione discreta.*

Mostriamo adesso che esistono localizzazioni di $\mathbf{E}$ che non sono pseudo-principali, e per fare questo diamo l'esempio di una localizzazione di $\mathbf{E}$ che non è c.i.c (infatti pseudo-principale $\Rightarrow$ c.i.c[7]):

Esempio:

- Sia $S = \{f \in \mathbf{E} : Z_f \text{ è finito}\}$. S è un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathbf{E}$. Facciamo vedere che $\mathbf{E}_S$ non è completamente integralmente chiuso: infatti, sia $g \in \mathbf{E}$ una funzione con $Z_g^* = \{2, 3, 4 \ldots\}$ e $o_{1+k}(g) = k$, per ogni $k \geq 1$. Sia $h \in M(\mathbb{C})$, una funzione meromorfa avente poli in $\{1, 2, 3, \ldots\}$, ognuno di ordine 1. Allora gh^n ha poli in $1, 2, \ldots, n$ di ordine $n, \ldots 2, 1$; cosicché $gh^n \in \mathbf{E}_S$, ma $h \notin E_S$. Per la proposizione 1.2.2 E_S non è completamente integralmente chiuso.

[7][4], esercizio 21 pag 551.

Capitolo 4

Una classe di domini di Prüfer simili all'anello delle funzioni intere: gli E-domini

Abbiamo visto che la struttura algebrica dell'anello $\mathbf{E}$ è completamente determinata dagli insiemi degli zeri delle funzioni di $\mathbf{E}$; in particolare, dato un numero complesso α, abbiamo considerato l'ideale M_α generato dalla funzione polinomiale $t_\alpha : z \to z - \alpha$, e abbiamo provato che

1. Ogni M_α è massimale in $\mathbf{E}$.
2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbf{E}_{M_\alpha}$ è un sovranello di valutazione Noetheriano.
3. $\mathbf{E} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{C}} \mathbf{E}_{M_\alpha}$.

In questo capitolo considereremo una classe di domini di Prüfer che saranno definiti come un'intersezione di anelli di valutazione Noetheriani, in modo che i centri di tali anelli abbiano lo stesso ruolo che gli M_α hanno in $\mathbf{E}$. Vedremo che questi domini, che A. Loper[1] chiama E-domini, hanno molte proprietà in comune con $\mathbf{E}$.

Affronteremo l'argomento nella maniera più generale possibile, cominciando col prendere in considerazione la dissertazione di H. Gunji e D. L.

[1][18], definizione 2.2 pag. 268

McQuillan del 1975 [12], in cui gli autori classificarono l'insieme di tutti i domini di integrità in "D-anelli" e "non-D-anelli": un dominio di integrità D con campo dei quozienti K, è definito essere un **D-anello** se ogni volta che $f(X)$ e $g(X)$ sono polinomi non nulli in $D[X]$ con la proprietà che $f(a)$ divide $g(a)$ per tutti gli $a \in D$, tranne un numero finito, allora $f(X)$ divide $g(X)$ in $K[X]$, mentre un dominio si dice un non-D-anello se, e soltanto se, esso non è un D-anello. Per esempio, $\mathbb{Z}$ è un D-anello, ed in generale, l'anello degli interi algebrici $\mathbb{I}$ di un campo di numeri algebrici $\mathbb{A}$ è un D-anello.[2]

Mentre in [12] l'attenzione è tutta incentrata sui D-anelli, noi approfondiremo il discorso sui non-D-anelli, essendo gli E-domini particolari non-D-anelli di Prüfer. In [12] viene dimostrata la caratterizzazione per i non-D-anelli, ovvero, che un dominio D è un non-D-anello se, e soltanto se, esiste un polinomio non costante $f(X) \in D[X]$ tale che $f(D) \subseteq U_D \cup \{0\}$, dove U_D è il gruppo delle unità di D ([12], corollario 1 pag. 291). Per questo motivo, seguendo Loper, preferiamo dare la definizione di non-D-anello come segue

4.1 Non-D-anelli

Definizione 4.1.1. *Sia D un dominio d'integrità. D sarà chiamato **non-D-anello** se esiste un polinomio non costante $f(X) \in D[X]$ tale che $f(d)$ è invertibile per ogni $d \in D$. Il polinimio $f(X)$ sarà chiamato un **uv-polinomio** (da* unit valued*).*

Esempi:

- Ogni campo non algebricamente chiuso è chiaramente un non-D-anello.
- Se D è un dominio con il radicale di Jacobson non nullo, $J(D)$, allora D è un non-D-anello: infatti, sia $m \in J(D) - \{0\}$, allora $f(X) = mX + 1$ è un uv-polinomio per D. In particolare, ogni dominio locale è un non-D-anello.

[2] [12], corollario 1 pag 293.

- Sia $D = \mathbb{Z}[\{1/p : p \text{ è primo e } p \equiv 1 \pmod 4 \text{ o } p = 2\}]$. Allora $f(X) = X^2 + 1 \in D[X]$ è un uv-polinomio per D, (ciò deriva dalla teoria delle congruenze, ricordando che -1 è un residuo quadratico per il primo 2 e per i primi della forma $4k+1$, ma non per quelli della forma $4k+3$).

Definizione 4.1.2. *Siano D un dominio, $f(X) \in D[X]$ un polinomio non costante e $P \subseteq D$ un ideale primo. Diciamo che P è un **non-D-ideale per** $f(X)$ se $f(X)$ è un uv-polinomio per l'anello locale D_P.*

Proveremo ora una caratterizzazione per i non-D-ideali e a tal fine useremo le seguenti notazioni:

1. D è un dominio con campo dei quozienti K e P è un ideale primo non nullo di D.
2. Con $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ indicheremo sempre un polinomio monico non costante di $D[X]$ di grado n.
3. Poniamo $G(X, Y) = X^n + a_{n-1}X^{n-1}Y + \cdots + a_1XY^{n-1} + a_0Y^n \in D[X, Y]$.

Proposizione 4.1.3. *Sia $P \subseteq D$ un ideale primo non nullo. P è un non-D-ideale per $f(X) \iff G(\alpha, \beta) \in P$ è equivalente a dire che $\alpha, \beta \in P$, per ogni $\alpha, \beta \in D$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$): Supponiamo dapprima che P sia un non-D-ideale per $f(X)$. Chiaramente se $\alpha, \beta \in P$, allora $G(\alpha, \beta) \in P$. Supponiamo che $\alpha, \beta \in D$, $G(\alpha, \beta) \in P$ e che $\beta \notin P$. Allora $\alpha/\beta \in D_P$, e siccome P è un non-D-ideale per $f(X)$, $f(\alpha/\beta) \notin PD_P$; inoltre $G(\alpha, \beta) = \beta^n f(\alpha/\beta) \notin PD_P$, quindi $G(\alpha, \beta) \notin P$; questa è una contraddizione, quindi $\beta \in P$. Essendo $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_0\beta^n = G(\alpha, \beta) \in P$, otteniamo che $\alpha^n \in P$, da cui $\alpha \in P$.

$\Leftarrow$): Supponiamo ora che P non sia un non-D-ideale per $f(X)$. Allora possiamo scegliere un $\alpha/\beta \in D_P$ tale che $f(\alpha/\beta) \in PD_P$. Allora $G(\alpha, \beta) =$

$\beta^n f(\alpha/\beta) \in P$. Quindi, poiché $\beta \notin P$, il fatto che $G(\alpha, \beta) \in P$ non è equivalente ad $\alpha, \beta \in P$. $\square$

Corollario 4.1.4. *Siano $D, P, f(X), G(X,Y)$ come nelle notazioni precedenti. Sia $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \subseteq D$. Definiamo $\beta_1 = \alpha_1$ e per $i > 1$ definiamo $\beta_i = G(\alpha_i, \beta_{i-1})$. Allora $\beta_s \in P \iff \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \subseteq P$.*

Proposizione 4.1.5. *Sia $M \subset D$ un ideale massimale. Allora M è un non-D-ideale per $f(X) \iff f(D) \subseteq D - M$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$): Sia M un ideale massimale di D. Supponiamo che $f(D) \nsubseteq D - M$; allora possiamo trovare un $\alpha \in D$ tale che $f(\alpha) \in M$, allora $\alpha \in D_M$ e $f(\alpha) \in MD_M$, che implica che M non è un non-D-ideale per $f(X)$.

$\Leftarrow$): Ora supponiamo che M non sia un non-D-ideale per $f(X)$. Allora, esiste $\alpha/\beta \in D_M$ tale che $f(\alpha/\beta) \in MD_M$. Poiché $\beta \notin M$ ed M è massimale, possiamo trovare un elemento $\gamma \in D$ tale che $\beta\gamma \equiv 1 \pmod{M}$. Allora $f(\alpha\gamma) \equiv f(\alpha/\beta) \equiv 0 \pmod{MD_M}$, cosicché $f(\alpha\gamma) \in MD_M$ e siccome $\alpha\gamma \in D$, abbiamo che $f(\alpha\gamma) \in M$. Quindi, $f(D) \nsubseteq D - M$. $\square$

Il seguente corollario garantisce l'esistenza di un'abbondanza di non-D-ideali in un dominio con un uv-polinomio monico:

Corollario 4.1.6. *Se $f(X)$ è un uv-polinomio monico per D, allora ogni ideale massimale di D è un non-D-ideale per $f(X)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che M sia un ideale massimale di D. Poiché $f(X)$ è un uv-polinomio per D, $f(D) \subseteq U_D \subseteq D - M$. Quindi, per la proposizione 4.1.5, M è un non-D-ideale per $f(X)$. $\square$

Concludiamo il paragrafo con un risultato che discende immediatamente dalla proposizione 4.1.3 e dal corollario precedente:

Proposizione 4.1.7. *Sia D un non-D-anello con $\alpha, \beta \in D - \{0\}$. Sia M un ideale massimale di D e sia $f(X) \in D[X]$ un uv-polinomio monico per D di grado $n \geq 2$. Allora $\beta^n f(\alpha/\beta) \in M \iff \alpha, \beta \in M$.* $\square$

4.2 Non-D-anelli di Prüfer

In questo paragrafo, studieremo alcune proprietà dei non-D-anelli di Prüfer aventi un uv-polinomio monico, in particolare, mostreremo che tali domini sono caratterizzati dal fatto che sono esprimibili come intersezioni di (non-D)sovranelli di valutazione che condividono uno stesso uv-polinomio monico.

Osserviamo intanto che la prima proprietà di cui gode un non-D-anello di Prüfer D è che tutti i suoi ideali primi, non nulli, sono non-D-ideali:

Proposizione 4.2.1. *Sia D un non-D-anello di Prüfer, sia $f(X) \in D[X]$ un uv-polinomio monico e sia $P \subseteq D$ un ideale primo. Allora $f(X)$ è un uv-polinomio per l'anello locale D_P, cioè, ogni ideale primo $P \subset D$ è un non-D-ideale per D.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(X)$ non sia un uv-polinomio per D_P. Sia $F(X) \in (D/P)[X]$ la riduzione di $f(X)$ modulo P e sia K il campo dei quozienti di D/P. Si vede facilmente che $F(X)$ non ha radici in D/P, ma le ha in K. Poiché $F(X)$ è monico, otteniamo che D/P non è integralmente chiuso. Ma questa è una contraddizione, perché, essendo D un dominio di Prüfer, D/P è ancora un dominio di Prüfer (per la proposizione 1.5.12) e quindi è integralmente chiuso. Allora $f(X)$ deve essere un uv-polinomio per D_P. □

Se D è un dominio di Prüfer e $P \subseteq D$ è un ideale primo, non nullo, sappiamo che D_P è un sovranello di valutazione (di D), quindi ogni dominio di Prüfer può essere espresso in modo naturale come intersezione di sovranelli di valutazione. Iniziamo allora col chiederci cosa si può dire riguardo tali sovranelli quando D è anche un non-D-anello. In particolare, concentriamo la nostra attenzione sulla struttura dei domini di valutazione con un particolare uv-polinomio monico.

Lemma 4.2.2. *Sia V un dominio di valutazione con campo dei quozienti F e ideale massimale M. Sia v la corrispondente valutazione su F. Inoltre, sia $f(X) \in V[X]$ un uv-polinomio monico per V di grado $n \geq 2$ e siano α, β elementi non nulli di V. Allora $v(\beta^n f(\alpha/\beta)) = min\{v(\beta^n), v(\alpha^n)\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che $v(\alpha) \geq v(\beta)$, allora $\alpha/\beta \in V$ e così $f(\alpha/\beta)$ è invertibile in V; da cui $v(\beta^n f(\alpha/\beta)) = v(\beta^n)$. Ora supponiamo che $v(\beta) > v(\alpha)$. Allora $\beta/\alpha \in M$. Sappiamo per la proposizione 4.1.7 che $(\beta/\alpha)^n f(\frac{1}{(\beta/\alpha)}) \in V - M$, perché $1 \notin M$. Quindi, $v((\beta/\alpha)^n f(\frac{1}{(\beta/\alpha)})) = 0$. Essendo $\beta^n f(\alpha/\beta) = \alpha^n[(\beta/\alpha)^n f(\frac{1}{(\beta/\alpha)})]$, segue che $v(\beta^n f(\alpha/\beta)) = v(\alpha^n)$. □

Corollario 4.2.3. *Sia V un dominio di valutazione con campo dei quozienti F e sia v la corrispondente valutazione su F. Sia $f(X) \in V[X]$ un uv-polinomio monico per V di grado $n \geq 2$, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ elementi non nulli di V. Poniamo $\beta_1 = \alpha_1$, e per $1 < i \leq m$ poniamo $\beta_i = \alpha_i^{n^{i-1}} f(\frac{\beta_{i-1}}{\alpha_i^{n^{i-2}}})$. Allora $v(\beta_m) = min\{v(\alpha_1^{n^{m-1}}), v(\alpha_2^{n^{m-1}}), \dots, v(\alpha_m^{n^{m-1}})\}$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal lemma 4.2.2. □

Teorema 4.2.4. *Sia D un non-D-anello di Prüfer con campo dei quozienti K. Sia $f(X) \in D[X]$ un uv-polinomio monico di grado $n \geq 2$. Inoltre, sia I un ideale finitamente generato di D. Allora I^{n^t} è principale per qualche intero t non negativo.*

Dimostrazione. Sia $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ un insieme di generatori di I. Definiamo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ come nel corollario 4.2.3, vogliamo dimostrare che $I^{n^{m-1}}$ è un ideale principale generato da β_m. Dalla definizione dei β_i, segue che $\beta_i \in I^{n^{i-1}}$ e quindi $\beta_m \in I^{n^{m-1}}$. Inoltre, sappiamo che $I^{n^{m-1}}$ è generato dall'insieme $H = \{\alpha_1^{e_1}\alpha_2^{e_2}\cdots\alpha_m^{e_m} : e_i \geq 0$ per ogni i e $e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n^{m-1}\}$. Sia $\alpha = \alpha_1^{e_1}\alpha_2^{e_2}\cdots\alpha_m^{e_m} \in H$. Vogliamo mostrare che $\alpha/\beta_m \in D$; è sufficiente dimostrare che $\alpha/\beta_m \in D_P$ per ogni ideale primo $P \subseteq D$. Sia $P \subseteq D$ un ideale primo; essendo D di Prüfer, D_P è un dominio di valutazione, allora sia v_P la valutazione di K associata a D_P. Basta mostrare che $v_P(\alpha/\beta_m) \geq 0$. Sappiamo dal corollario 4.2.3 che $v_P(\beta_m) = \min\{v_P(\alpha_1^{n^{m-1}}), v_P(\alpha_2^{n^{m-1}}), \dots, v_P(\alpha_m^{n^{m-1}})\}$.
Poiché $e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n^{m-1}$, abbiamo che
$v_P(\alpha) = v_P(\alpha_1^{e_1}\alpha_2^{e_2}\cdots\alpha_m^{e_m}) \geq \min\{v_P(\alpha_1^{n^{m-1}}), v_P(\alpha_2^{n^{m-1}}), \dots, v_P(\alpha_m^{n^{m-1}})\} = v_P(\beta_m)$, e così $v_P(\alpha/\beta_m) \geq 0$. Quindi $\alpha/\beta_m \in D$ e β_m genera I. □

Osservazione 4.2.5. *Si noti che nella dimostrazione del teorema precedente l'ipotesi che D fosse un dominio di Prüfer è stata utilizzata solo per ottenere una rappresentazione di D come un'intersezione di domini di valutazione, tutti che condividono con D lo stesso uv-polinomio monico.*

Questa osservazione ispira il seguente corollario, che fornisce un metodo per costruire non-D-anelli di Prüfer:

Corollario 4.2.6. *Sia T un dominio con campo dei quozienti K. Sia $\{D_i : i \in S\}$ un insieme di sovranelli di valutazione di T. Sia $f(X) \in T[X]$ un uv-polinomio monico di grado ≥ 2 per D_i, per ogni $i \in S$. Sia $R = \bigcap_{i \in S} D_i$. Allora R è un non-D-anello di Prüfer avente $f(X)$ come uv-polinomio monico.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che $f(X)$ è un uv-polinomio monico per R. Sia $\alpha \in R$, allora per ogni $i \in S$, $\alpha \in D_i$ e così $f(\alpha)$ è invertibile in D_i, ovvero, $\frac{1}{f(\alpha)} \in D_i$. Questo implica che $\frac{1}{f(\alpha)} \in \bigcap_{i \in S} D_i = R$, cioè $f(\alpha)$ è invertibile in R. Allora $f(X)$ è uv-polinomio per R, quindi R è un non-D-anello. Inoltre, dal teorema 4.2.4, segue che se I è un ideale di R finitamente generato, allora I^{n^t} è principale, per qualche intero non negativo t. Quindi, ogni ideale di R finitamente generato è invertibile, ovvero R è di Prüfer. $\square$

Osservazione 4.2.7. *Supponiamo che D sia un non-D-anello di Prüfer con un uv-polinomio monico. Non ci sono ragioni per pensare che esista un unico uv-polinomio monico in $D[X]$, o che tutti i gli uv-polinomi monici abbiano lo stesso grado. Questa osservazione suggerisce il prossimo risultato:*

Corollario 4.2.8. *Sia D un non-D-anello di Prüfer e sia d il MCD dell'insieme di tutti gli interi che compaiono come gradi di uv-polinomi monici per D in $D[X]$. Sia I un ideale di D finitamente generato. Allora I^{d^t} è principale, per qualche intero non negativo t. In particolare, se $d = 1$ allora D è un dominio di Bézout.*

Dimostrazione. Ovvia. $\square$

4.3 E-domini

Introduciamo, finalmente, la nozione di E-dominio, data da Loper in [18], e studiamone le proprietà, dimostrando prima di tutto che un E-dominio è un particolare non-D-anello di Prüfer:

Definizione 4.3.1. *Sia D un dominio con campo dei quozienti K. D si dice un* E***-dominio*** *se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *Esiste una collezione di sovranelli di valutazione Noetheriani di D, $W = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Per ogni $\lambda \in \Lambda$, indichiamo con v_λ la valutazione normalizzata su K corrispondente a V_λ, con M_λ l'ideale massimale di V_λ e con $P_\lambda = M_\lambda \cap D$.*

2. $D = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

3. *Esiste un polinomio monico $f(X) \in D[X]$ di grado ≥ 2, che è un uv-polinomio per ogni V_λ.*

4. *Per ogni $\lambda \in \Lambda$ esiste un elemento $d_\lambda \in D$ tale che $v_\lambda(d_\lambda) > 0$ e $v_\alpha(d_\lambda) = 0$, per ogni $\alpha \in \Lambda$ e $\alpha \neq \lambda$.*

In questo paragrafo D *denoterà sempre un E-dominio e assumeremo sempre le notazioni della precedente definizione.* Il nostro obiettivo è quello di studiare gli E-domini così come abbiamo studiato **E**; in accordo con la terminologia di Henriksen (adottata anche da noi nel capitolo 3), Loper classifica gli ideali degli E-domini nel seguente modo:

Definizione 4.3.2. [3] *chiamiamo W l'insieme dei* ***sovranelli di valutazione fissi*** *di D. (mostreremo che W è univocamente determinato!). Chiamiamo gli ideali $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$* ***ideali massimali fissi*** *di D. (giustificheremo tra breve la terminologia). Se I è un ideale di D, diciamo che I è* ***fisso*** *se $I \subseteq P_\lambda$, per qualche ideale massimale fisso P_λ, altrimenti I viene detto* ***libero****.*

Dalle proprietà dei non-D-anelli di Prüfer seguono immediatamente le seguenti proposizioni:

[3] [18], definizione 2.3 pag.269

Proposizione 4.3.3. *Sia D un E-dominio (con le notazioni della definizione 4.3.1). Allora D è un non-D-anello di Prüfer avente $f(X)$ come uv-polinomio.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal corollario 4.2.6. $\square$

Proposizione 4.3.4. *Sia I un ideale finitamente generato di un E-dominio D. Allora I^{n^t} è principale per qualche intero non negativo t, dove n è il grado del polinomio $f(X)$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema 4.2.4. $\square$

Abbiamo bisogno anche dei risultati concernenti la rappresentazione dei domini di Prüfer come intersezione irridondante di sovranelli di valutazione; ricordiamo che una rappresentazione di un dominio A come intersezione di domini di valutazione (diciamo $A = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma$) è irridondante se l'omissione di un dominio di valutazione dall'intersezione cambia il risultato, cioè, $A_\alpha = \bigcap_{\sigma\in\Sigma,\sigma\neq\alpha} V_\sigma \neq A$. Il seguente risultato segue immediatamente dalla condizione 4. della definizione 4.3.1:

Lemma 4.3.5. *$D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ è una S-rappresentazione di D.*

Dimostrazione. Omettiamo dall'intersezione un dominio di valutazione. Sia $D_\alpha = \bigcap_{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq\alpha} V_\lambda$; allora, per la condizione 4. della definizione 4.3.1, esiste un elemento $d_\alpha \in D$, non invertibile in D, tale che $d_\alpha^{-1} \in D_\alpha$. $\square$

Per il corollario 1.7.11, sappiamo che $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ è l'unica S-rappresentazione di D e, per il teorema 1.7.9, gli ideali massimali fissi, $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sono ideali massimali di D. Inoltre, il corollario 1.7.13 mostra che se I è un ideale finitamente generato di D, contenuto solo in un numero finito ideali massimali fissi $P_1, P_2, \dots, P_t$ di D, allora $P_1, P_2, \dots, P_t$ sono gli unici ideali massimali di D che lo contengono.

Abbiamo mostrato che gli ideali massimali fissi di $\mathbf{E}$ sono tutti principali e che gli ideali liberi non sono finitamente generati: sembra naturale chiedersi se gli ideali fissi e liberi di un E-dominio D hanno proprietà corrispondenti:

Teorema 4.3.6. *Ogni ideale massimale fisso di un E-dominio D è finitamente generato.*

Dimostrazione. Sia P_λ un ideale massimale fisso di D. Usiamo la condizione 4. della definizione 4.3.1 per trovare un elemento $d_\lambda \in P_\lambda$, tale che P_λ sia l'unico ideale massiamle fisso di D che lo contiene. Inoltre, abbiamo appena osservato che P_λ è allora l'unico ideale massimale di D che contiene d_λ. Poiché P_λ si estende all'ideale principale M_λ in V_λ, per il lemma 37.3 di [10], abbiamo che P_λ è finitamente generato. □

Analizziamo ora la struttura degli ideali liberi di D:

Teorema 4.3.7. *Nessun ideale libero di un E-dominio D è finitamente generato.*

Dimostrazione. Supponiamo che I sia un ideale di D finitamente generato. La proposizione 4.3.4 implica che I^m è principale, per qualche intero positivo m. Supponiamo che $I^m = (d)$. Poiché d non è invertibile in D, esso deve appartenere a qualche ideale massimale fisso; quindi, I è contenuto in un ideale massimale fisso e così è esso stesso fisso. □

In **E** l'insieme degli ideali principali frazionari coincide con l'insieme di tutti gli ideali divisoriali (ricordiamo che un ideale è divisoriale se è l'intersezione di tutti gli ideali frazionari principali che lo contengono); ciò ispira il seguente risultato:

Teorema 4.3.8. *Se I è un ideale divisoriale di un E-dominio D, allora I può essere espresso in modo unico come un'intersezione (finita o infinita) di potenze di ideali massimali fissi. Viceversa, ogni intersezione non nulla di potenze di ideali massimali fissi di D è divisoriale.*

Dimostrazione. La dimostrazione della prima parte del teorema sarà suddivisa in quattro passi: prima dimostreremo che ogni ideale frazionario principale può essere espresso come un'intersezione di potenze di ideali massimali fissi; poi proveremo lo stesso risultato per ogni ideale finitamente generato ed ancora per ogni ideale divisoriale; infine, mostreremo l'unicità di tale rappresentazione.

Primo passo: assumiamo che dD sia un ideale principale non nullo di D. Sia $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda_1 \subseteq \Lambda\}$ l'insieme di tutti gli ideali massimali fissi in cui d è un elemento non invertibile e per ogni $\lambda \in \Lambda_1$ poniamo $e_\lambda = v_\lambda(d)$. Sia

$I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1} P_\lambda^{e_\lambda}$. Vogliamo mostrare che $dD = I$. Chiaramente $dD \subseteq I$; sia r un elemento di I, allora $v_\lambda(r) \geq v_\lambda(d)$ per ogni $\lambda \in \Lambda_1$ e $v_\lambda(d) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda - \Lambda_1$. Quindi, $r/d \in D$ e $I \subseteq (d)$.

Secondo passo: assumiamo che I sia un ideale finitamente generato di D. Dalla proposizione 4.3.4 ricaviamo che I^m è principale per qualche intero positivo m. Sia $dD = I^m$. Sia $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda_2 \subseteq \Lambda\}$ l'insieme di tutti gli ideali massimali fissi di D che contengono I. Allora, per ogni $\lambda \in \Lambda_2$, poniamo $e_\lambda = \min\{v_\lambda(r) : r \in I\}$. É facile vedere che $me_\lambda = v_\lambda(d)$ per ogni $\lambda \in \Lambda_2$. Sia $J = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_2} P_\lambda^{e_\lambda}$. Vogliamo dimostrare che $I = J$. Ovviamente $I \subseteq J$; sia r un elemento di J, chiaramente $(I, r)^m \subseteq I^m = dD$. Poiché I e (I, r) sono finitamente generati $I = (I, r)$, cioè $r \in I$, cosicché $I = J$.

Terzo passo: assumiamo che I sia un ideale divisoriale di D. Allora I può essere espresso come una intersezione di ideali frazionari principali di D. Sia dD un ideale frazionario principale di D. Poiché D è un Prüfer, $D \cap dD$ è finitamente generato. Quindi, I può essere espresso come una intersezione di ideali finitamente generati di D. Poiché ogni ideale finitamente generato di D può essere espresso come una intersezione di potenze di ideali massimali fissi, segue che I può essere espresso come una intersezione di potenze di ideali massimali fissi di D.

Quarto passo: assumiamo che I sia un ideale divisoriale di D, vogliamo mostrare che la rappresentazione di I (come intersezione di potenze di ideali massimali fissi) è unica. Supponiamo che non lo sia. Senza perdere in generalità, possiamo supporre che esistano due sottoinsiemi S_1 ed S_2 di Λ tali che $S_1 \subseteq S_2$ e che $I = \bigcap_{\lambda \in S_1} P_\lambda^{e_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in S_2} P_\lambda^{f_\lambda}$ con $e_\lambda \leq f_\lambda$ per ogni $\lambda \in S_1$ e o $S_1 \neq S_2$ oppure $e_\lambda < f_\lambda$ per qualche $\lambda \in S_1$. Scegliamo un elemento $\lambda \in S_2$ tale che o $\lambda \notin S_1$ oppure $e_\lambda < f_\lambda$. In entrambi i casi si arriva alla conclusione che $P_\lambda I = I$ ([18], proposizione 2.13 pag 271.). Ciò implica che se $d \in I$, allora $v_\lambda(d) \geq m$ per ogni intero positivo m, e questa è una contraddizione. Quindi la rappresentazione di I come intersezione di potenze di ideali massimali fissi è unica.

Viceversa, sia $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda_3 \subseteq \Lambda\}$ sia l'insieme degli ideali massimali fissi di D, e sia $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_3\}$ un insieme di interi positivi. Sia $J = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_3} P_\lambda^{e_\lambda}$ e supponiamo che J sia non nullo. Il teorema 4.3.6 afferma che ogni ideale massimale fisso di D è finitamente generato. Poiché ogni ideale finitamente generato di un dominio di Prüfer è divisoriale ed ogni intersezione non nulla di ideali divisoriali è ancora divisoriale, ricaviamo che J è divisoriale. $\square$

Per la definizione 4.3.2 un ideale libero è un ideale non nullo che non è fisso, e un ideale fisso è un ideale non nullo che è contenuto in un ideale massimale fisso. Allora, dalla proposizione precedente, segue che ogni ideale libero di un E-dominio non è divisoriale. Chiudiamo il paragrafo ponendoci due domande:

QUESTIONI APERTE :

1. In $\mathbf{E}$ ogni ideale divisoriale è principale; ci poniamo il problema di capire se anche un ideale divisoriale di un E-dominio sia principale o anche invertibile. Prima notiamo che se I è un qualsiasi ideale fisso di $\mathbf{E}$ che non è divisoriale, allora I_v (definito come l'intersezione di tutti gli ideali frazionari principali contenenti I) è divisoriale, e quindi principale. Ciò conduce ad una fattorizzazione naturale di I in un prodotto di un ideale divisoriale (I_v) ed un ideale libero $(I)(I_v)^{-1}$.

   Analogamente, se I è un ideale fisso non divisoriale di un E-dominio, I può essere fattorizzato nel prodotto di un ideale divisoriale fisso e un ideale libero? E, se così, la rappresentazione è unica?

2. In $\mathbf{E}$ ogni ideale principale può essere univocamente identificato con un insieme di potenze di ideali fissi massimali. In generale, se D è un E-dominio di Bézout, ogni ideale massimale fisso è principale e la decomposizione di un ideale divisoriale I di D in ideali primari fissi può essere associata ad un insieme di potenze dei generatori degli ideali massimali fissi. Questo richiama alla mente una versione formale del teorema di fattorizzazione di Weierstrass, per cui ogni funzione intera può essere rappresentata come prodotto (eventualmente infinito) di funzioni esponenziali (elementi unitari) e polinomiali.

   La domanda che ci poniamo è la seguente: se D è un E-dominio di Bézout, esiste un'estensione di D (paragonabile all'estensione delle funzioni polinomiali alle funzioni intere) che sia un E-dominio, che abbia ideali massimali fissi corrispondenti a quelli di D e in cui ogni ideale divisoriale è principale?

Si noti che potrebbero anche non esistere ideali liberi: infatti, se l'intersezione $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ è *localmente finita*[4], allora D è un dominio di Prüfer e di Krull, quindi di Dedekind[5]. In questo caso ogni ideale di D è fisso. Viceversa, se l'intersezione $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ *non è localmente finita*, allora qualche elemento non nullo di D deve appartenere ad infiniti ideali primi. Questo implica che D non è di Dedekind, e quindi D è un Prüfer non Noetheriano[6], da cui l'esistenza di un ideale primo non finitamente generato. Quindi D deve contenere un ideale primo libero, poiché i soli ideali primi fissi sono ideali massimali fissi, che sono tutti finitamente generati. Abbiamo perciò dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.9. *Un E-dominio D contiene un ideale proprio libero $\iff$ l'intersezione $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ non è localmente finita.*

4.4 E-sovranelli di domini Noetheriani

Nel precedente paragrafo non abbiamo dato esempi espliciti di E-domini; cerchiamo adesso di dare un metodo per costruirne: iniziamo con il richiamare la definizione di intersezione debolmente localmente finita ([18], definizione 3.8 pag 276):

Definizione 4.4.1. *Sia T un dominio Noetheriano, sia $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una collezione di sovranelli di valutazione Noetheriani di T. Sia $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ e, per ogni $\lambda \in \Lambda$, sia M_λ l'ideale massimale di V_λ. Si dice che D è una T-**intersezione debolmente localmente finita** se, per ogni $\alpha \in \Lambda$, l'insieme $\{M_\lambda : M_\alpha \cap T \subseteq M_\lambda \cap T\}$ è finito.*

Le seguenti ipotesi saranno valide per tutto il resto del paragrafo:

1. T è un dominio Noetheriano con campo dei quozienti F.
2. $f(X)$ è un polinomio monico in $T[X]$ di grado $n \geq 2$.

[4]Ricordiamo l'intersezione è **localmente finita** se ogni elemento $x \in D$, non nullo, non è invertibile soltanto in un numero finito di V_λ

[5][10], teorema 43.16

[6][10], teorema 37.1

3. $W = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è una collezione di sovranelli di valutazione Noetheriani di T, tali che $f(X)$ è un uv-polinomio per ogni V_λ.

4. $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$.

5. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ diciamo che M_λ è l'ideale massimale di V_λ, $P_\lambda = M_\lambda \cap D$, $J_\lambda = M_\lambda \cap T$ e v_λ è la valutazione normalizzata su F corrispondente a V_λ.

6. L'intersezione $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ è debolmente localmente finita.

Osservazione 4.4.2. *Si osservi che se $J \subseteq T$ è un non-D-ideale (per f) di T, esiste un elemento $\alpha \in J$ tale che se $J_1 \subseteq T$ è un non-D-ideale di T con $\alpha \in J_1$, allora $J \subseteq J_1$: infatti, se $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \subseteq J$ è un sistema di generatori per J, definiamo $\beta_1 = \alpha_1$ e per $i > 1$ definiamo $\beta_i = G(\alpha_i, \beta_{i-1})$. Per il corollario 4.1.4 segue che $J_1 \subseteq T$ è un non-D-ideale per $f(X)$ con $\beta_s \in J_1$, allora $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \subseteq J_1$ e così $J \subseteq J_1$ e poniamo $\alpha = \beta_s$.*

Inoltre, se M_i è l'ideale massimale di V_i, abbiamo visto che M_i è anche un non-D-ideale di V_i, allora $J_i = M_i \cap T$ è un non-D-ideale di T: infatti, se J_i non lo fosse, allora $f(X)$ non sarebbe un uv-polinomio per T_{J_i}. Quindi, esisterebbero $a, b \in T$ con $b \notin J_i$ tale che $f(a/b) \in J_i T_{J_i}$. Ma questo implica che $a/b \in V_i$ con $f(a/b) \in M_i$, per cui M_i non sarebbe un non-D-ideale di V_i.

Proposizione 4.4.3. *Per ogni $\lambda \in \Lambda$ esiste un elemento $d_\lambda \in D$ tale che $v_\lambda(d_\lambda) > 0$ e $v_\alpha(d_\lambda) = 0$ ogni volta che $\alpha \neq \lambda$. In altre parole, D è un E-dominio avente come ideali massimali fissi $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.*

Dimostrazione. [18], proposizione 3.4 pag 275. □

Ricordiamo che la proposizione 4.3.9 afferma che D contiene ideali liberi una volta provato che l'intersezione $D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ non è localmente finita. Ora esaminiamo le relazioni tra gli ideali primi liberi di D e gli ideali primi di T.

Proposizione 4.4.4. *Sia Q un ideale primo e libero di D. Allora la contrazione di Q in T è propriamente contenuta nella contrazione in T di qualche ideale massimale fisso di D.*

Dimostrazione. Primo passo: $Q \cap T \subseteq J_\lambda$, per qualche $\lambda \in \Lambda$. Supponiamo che $Q \cap T \nsubseteq J_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Per la proposizione 4.2.1 ogni ideale primo di D, e quindi Q, è un non-D-ideale e, per l'osservazione precedente, $Q \cap T$ è un non-D-ideale di T. Usiamo quanto detto nell'osservazione anche per scegliere un elemento $r_\lambda \in Q \cap T$ tale che se Q_1 è un non-D-ideale di T ed r_λ, allora $Q \subseteq Q_1$. L'osservazione precedente e la proposizione 4.2.1, inoltre, implicano che J_λ è un non-D-ideale per ogni $\lambda \in \Lambda$. Quindi, per la nostra supposizione, $r_\lambda \notin J_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ciò implica che r_λ non è contenuto in alcun ideale massimale fisso di D, e perciò deve essere invertibile in D, che è una contraddizione.

Secondo passo: $Q \cap T \neq J_\lambda$. Supponiamo che $Q \cap T = J_\lambda$ per qualche λ. Allora, come prima, scegliamo un elemento $r_\lambda \in J_\lambda$ tale che se Q_1 è un non-D-ideale di T ed $r_\lambda \in Q_1$, allora $J_\lambda \subseteq Q_1$. Poiché l'intersezione $D = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ è debolmente localmente finita, $J_\lambda \subseteq M_\alpha \cap T$ solo per un numero finito di $\alpha \in \Lambda$, sia $\{M_1, M_2, \ldots, M_t\}$ tale insieme finito. Sia $P_i = M_i \cap D$ per $1 \leq i \leq t$. Per la prop 1.7.13 abbiamo che $\{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ è precisamente l'insieme di tutti gli ideali massimali di D che contengono r_λ. Allora dire che $r_\lambda \in Q$ implica che $Q \subseteq P_i$ per qualche $1 \leq i \leq t$. Questa è una contraddizione, perché ogni P_i è un ideale massimale fisso e quindi, per definizione, non può contenere un ideale libero. $\square$

Il risultato appena dimostrato stabilisce una forte restrizione su alcuni ideali primi di T, ovvero che essi possono trovarsi sotto ideali primi liberi di D. Verifichiamo allora quali ideali primi di T sono effettivamente contrazioni di ideali primi liberi di D. Dimostriamo prima il seguente lemma:

Lemma 4.4.5. *Sia $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una collezione di non-D-ideali (per f) di T tali che $J = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ sia un ideale primo di T. Allora J è un non-D-ideale (per f) di T.*

Dimostrazione. Siano $d_1, d_2 \in T$ tali che $d_2 \notin J$. Si deve dimostrare che $f(X)$ è un uv-polinomio per T_J, sarà sufficiente dimostrare che $f(d_1/d_2)$ è invertibile in T_J. Poiché $d_2 \notin J$, allora $d_2 \notin J_\lambda$ per qualche $\lambda \in \Lambda$. Siccome $d_1/d_2 \in T_{J_\lambda}$, $f(d_1/d_2)$ è invertibile in T_{J_λ}, da cui segue che $f(d_1/d_2)$ è invertibile in T_J. $\square$

Proposizione 4.4.6. *Se* Λ^* *un sottoinsieme infinito di* Λ *tale che* $J = \bigcap_{\lambda\in\Lambda^*} J_\lambda$ *è un ideale primo di* T*, allora esiste un ideale primo libero* P *di* D *tale che* $P \cap T = J$.

Dimostrazione. Prima notiamo che se P è un ideale primo di D tale che $P \cap T = J$, allora P deve essere libero per l'assunzione di debole locale finitezza. Sia $G^* = \{J_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$. Per l'osservazione 4.4.2 e la proposizione 4.2.1, ogni $J_\lambda \in G^*$ è un non-D-ideale di T, allora per il lemma 4.4.5 J è un non-D-ideale per T. Estendiamo G^* all'insieme $G^{**} = \{J_\omega : \omega \in \Omega\}$ costituito da tutti i non-D-ideali di T che contengono propriamente J. Per ogni $\omega \in \Omega$, applichiamo l'osservazione 4.4.2 per ottenere un elemento $r_\omega \in J_\omega$ tale che ogni non-D-ideale di T che contiene r_ω deve contenere J_ω. Sia $S_1 = \{r_\omega : \omega \in \Omega\}$, sia S_1^* il sistema moltiplicativo in D generato da S_1 e sia $D_1 = (S_1^*)^{-1}D$ la localizzazione di D in S_1^*. Vogliamo mostrare che $JD_1 \neq D_1$. Supponiamo che $JD_1 = D_1$, allora esiste un sottoinsieme finito S_2 di S_1 tale che se S_2^* è il sistema moltiplicativo generato da S_2 e $D_2 = (S_2^*)^{-1}D$, allora $JD_2 = D_2$, e questo è impossibile. Per vedere questo, sia $S_2 = \{r_1, r_2, \ldots, r_t\}$, e sia $r = \prod_{i=1}^t r_i$. Poiché J è un non-D-ideale di T e poiché abbiamo applicato l'osservazione 4.4.2 per scegliere r_ω, allora $r_i \notin J$ per $1 \leq i \leq t$, e così $r \notin J$. Perciò deve esistere un $\alpha \in \Lambda^*$ tale che r è invertibile in V_α, da cui segue che $J_\alpha D_2 \neq D_2$ e siccome $J \subseteq J_\alpha$, abbiamo anche che $JD_2 \neq D_2$. Così $JD_1 \neq D_1$. JD_1 è un ideale proprio di D_1, e quindi deve essere contenuto in un ideale massimale M di D_1. L'osservazione 4.4.2 implica che M è un non-D-ideale di D_1 e la proposizione 4.2.1 implica che M è centrato su non-D-ideale di T. $J \subseteq M \cap T$, ma per la nostra scelta di S_1 forzatamente $J = M \cap T$. Sia $P = M \cap D$. □

Alla luce di quanto detto nella proposizione precedente, abbiamo un modo per identificare gli ideali primi liberi di un E-dominio; rimangono tuttavia sollevate alcune questioni: concludiamo anche questo paragrafo ponendo alcuni quesiti

QUESTIONI APERTE :

1. Gli ideali primi liberi descritti nella proposizione 4.4.6 sono tutti ideali massimali liberi?

2. Tutti gli ideali massimali liberi di D sono del tipo descritto nella proposizione 4.4.6?

3. Esiste un ideale primo libero di D che non è del tipo descritto nella proposizione 4.4.6?

Riportiamo ora un esempio esplicito, illustrato da Loper, di un E-dominio costruito col metodo appena descritto:

Esempio: ([18], esempio 4.3 pag. 281)

- Sia $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ un insieme di numeri primi distinti. Sia $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio monico, non costante, irriducibile che non ha radici in $\mathbb{Z}$ modulo qualsiasi primo p_i. Sia $(\mathbb{Q}^*_{p_i}, +, \cdot)$ l'anello degli interi p-adici ($\forall i \geq 1$). Allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}^+$, scegliamo un intero p_i-adico α_i (ognuno trascendente su $\mathbb{Q}$)[7]; e poniamo

$$V_{\alpha_i,p_i} = \{f(X)/g(X) : f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X] \text{ e } f(\alpha_i)/g(\alpha_i) \in \mathbb{Q}^*_{p_i}\}$$

$$M_{\alpha_i,p_i} = \{f(X)/g(X) : f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X] \text{ e } f(\alpha_i)/g(\alpha_i) \in p_i\mathbb{Q}^*_{p_i}\}.$$

  Si può dimostrare che i V_{α_i,p_i} sono sovranelli di valutazione discreta di $\mathbb{Z}[X]$, con ideali massimali M_{α_i,p_i}.

  Sia ora
$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{\alpha_i,p_i}.$$

  D soddisfa le condizioni 1-6 di pag. 79 (per ogni i, sia v_i la valutazione su $\mathbb{Q}(X)$ corrispondente a V_{α_i,p_i}; allora, $v_i(p_i) > 0$ e $v_j(p_i) = 0$ se $i \neq j$), avente $f(X)$ come uv-polinomio, quindi, D è un E-dominio con ideali massimali fissi
$$\{P_{\alpha_i,p_i} = M_{\alpha_i} \cap D \mid i \geq 1\}.$$

[7]Per le proprietà dei numeri p-adici che utilizzeremo nell'esempio, faremo riferimento a J.-L. Chabert, *Un anneaux de Prüfer*, J. Algebra 107 (1987), 1-16.

Osserviamo che D non è di Dedekind, perché l'intersezione non è localmente finita: infatti, X è non invertibile in ogni M_{α_i,p_i}, inoltre $M_{\alpha_i,p_i} \cap \mathbb{Z}[X] = (X, p_i)$, e poiché $\bigcap_{i=1}^{\infty}(X, p_i) = (X)$, D possiede un ideale primo libero P tale che $P \cap \mathbb{Z}[X] = (X)$ (proposizione 4.4.6).

Bibliografia

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, (1979).

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduzione all'algebra commutativa*, Feltrinelli, Milano, (1981).

[3] N. Bourbaki, *Algebra*, Springer, Berlin, (1990).

[4] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Herman-Addison Wesley, Paris, France, (1972).

[5] L. Chierchia, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Aracne, (1997).

[6] E. Enochs, *A note on the dimension of the ring of entire functions*, Collect. Math. 20 (1969), 3.

[7] M. Fontana, J. A. Huckaba, I. J. Papick, *Prüfer Domains*, Marcel Dekker, New York (1997)

[8] A. R. Fuster, *Estudio de los ideales del anillo de las funciones enteras*, Collect. Math. 17 (1965), 105-134.

[9] A. R. Fuster, *Nota corrigiendo una demostración en el trabajo: Estudio de los ideales del anillo de las funciones enteras*, Collect. Math. 17 (1965), 297.

[10] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, New York, (1972).

[11] R. Gilmer, W. Heinzer, *Irredundant intersections of valuation rings*, Math. Z. 103 (1968), 306-317.

[12] H. Gunji, D. L. McQuillan *On rings with a certains divisibility property*, Michigan Math. J. 22 (1974), 289-299.

[13] O. Helmer, *Divisibility properties of integral functions*, Duke Math. J. 6 (1940), 345-356.

[14] M. Henriksen, *On the ideal structure of the ring of entire functions*, Pacific J. Math. 2 (1952), 179-184.

[15] M. Henriksen, *On the prime ideals of the ring of entire functions*, Pacific J. Math. 3 (1953), 711-720.

[16] I. Kaplanski, *Commutative Rings*, Ed. rivisitata, Univ. of Chicago Press, Chicago, (1974).

[17] M. Laplaza, *Nota sobre los ideales del anillo de las funciones enteras*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 31 (1971), 34-45.

[18] K. A. Loper, *A class of Prüfer domains that are similar to the ring of entire functions*, Rocky Mountain J. Math. 28 (1998), 267-285.

[19] K. A. Loper, *On Prüfer non-D-ring*, J. Pure Appl. Algebra 96 (1994), 271-278.

[20] K. A. Loper, *On Rings whitout a certain divisibility property*, J. Number theory 28 (1988), 132-144.

[21] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York 1966.

[22] E. Sernesi, *Appunti del corso di Istituzioni di Geometria Superiore*, a.a. 2000/2001 - 1 modulo (GE5).

Ringraziamenti

I miei ringraziamenti vanno alla professoressa F. Girolami, per avermi guidato in questi mesi di lungo lavoro e per la sua continua disponibilità a chiarirmi dubbi; a mia madre, a mio padre e a mia sorella per avermi appoggiato e sostenuto in tutte le mie scelte; a tutti i miei amici, vecchi e nuovi, in particolare ringrazio Roberto, Alfonso e Saretta, per avermi sopportato tutto l'anno (e non solo!).