

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di
Roberta Carrozzo

**Varietà Toriche e
Fattorizzazione di Mappe Birazionali
(Sintesi)**

Relatore Prof. Angelo Felice Lopez

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002

Ottobre 2002

In questa tesi sono ampiamente descritte le varietà toriche e sono evidenziati i forti legami tra la geometria torica e la geometria algebrica. Negli ultimi 30 anni lo studio delle varietà toriche ha interessato i matematici per svariati motivi.

Primo fra tutti la possibilità di presentare in modo chiaro ed esauriente un esempio di varietà algebrica che avesse equazioni algebriche facilmente ottenibili, morfismi ben definiti, un sottinsieme aperto denso $T = (\mathbb{C}^*)^n$, detto toro, che agisce sulla varietà mediante una naturale azione, esempi concreti come lo spazio proiettivo complesso \mathbb{P}^n e importanti proprietà combinatorie. Basterebbero queste ragioni per spiegare l'attenzione verso questo tema, ma si può affermare che l'importanza delle varietà toriche si è rivelata, recentemente, nel fatto che sono servite per lo studio di alcuni problemi riguardanti varietà algebriche qualsiasi.

È stato necessario per poter comprendere i testi riguardanti le varietà toriche, conoscere prima le varietà algebriche. I libri a cui abbiamo fatto principalmente riferimento sono il libro di Ewald (Cf. [1]), quello di Oda (Cf. [3]) e gli appunti della scuola di Fourier di Cox e Barthel (Cf. [6], [7]). Abbiamo incontrato alcune difficoltà, come quella di dover necessariamente acquisire diversi concetti di geometria convessa per poter comprendere la definizione di varietà torica.

Inoltre è stato difficoltoso rendere compatibili i concetti espressi nei libri e negli articoli esaminati, dal momento che ogni autore ha privilegiato differenti aspetti, affrontando, talvolta, anche gli stessi in modo diverso. Quindi il nostro scopo è stato quello di unificare il tutto per avere una conoscenza più chiara e più completa dell'argomento.

Nella prima parte, dedicata alla geometria convessa, è stato definito **cono poliedrale convesso** in \mathbb{R}^n l'insieme della forma

$$\sigma = Cone(S) = \left\{ \sum_{x \in S} \lambda_x x \mid \lambda_x \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

dove $S \subset \mathbb{R}^n$ è finito;

a questo σ è stato associato il suo **cono duale**

$$\sigma^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma\},$$

dove $(\mathbb{R}^n)^*$ è lo spazio duale di \mathbb{R}^n .

Queste due definizioni sono state messe in relazione mediante il Teorema di Dualità secondo il quale $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$, e mediante il Teorema di Farkas grazie al quale sappiamo che il cono duale σ^\vee è anch'esso un cono poliedrale convesso.

Per fornire un'idea ancora più chiara di cosa sia un cono poliedrale convesso, abbiamo provato che può essere descritto in due modi equivalenti: come combinazione lineare non negativa di un numero finito di generatori e come intersezione di un numero finito di semispazi chiusi.

Come esempio consideriamo σ uguale al $Cone(e_1+e_2, e_2)$; dalla definizione di cono duale, otteniamo che σ^\vee è $Cone(e_1^\vee, e_2^\vee - e_1^\vee)$ e che il loro disegno è :

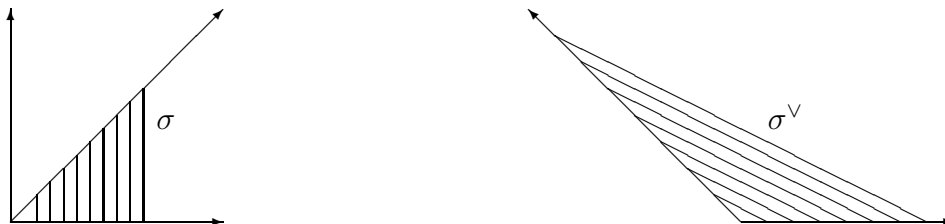


Figura 1:

È stata perfezionata la definizione di cono poliedrale convesso chiamandolo **fortemente convesso** se $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$, **razionale** se i suoi generatori sono contenuti nel reticolo $N \cong \mathbb{Z}^n$ e **regolare** se è poliedrale razionale fortemente convesso e se il suo sistema di generatori costituisce parte di una \mathbb{Z} -base di N .

Indicando con M il reticolo duale di N , ad ogni cono poliedrale convesso razionale σ è stato associato un monoide rispetto alla addizione

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M = \{u \in M \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma\},$$

che è anche finitamente generato.

A questo punto abbiamo definito una \mathbb{C} -algebra $A_\sigma := \mathbb{C}[S_\sigma]$ come l'insieme delle mappe $\chi : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$, che mandano $u \rightarrow \chi(u)$ e tale che $\chi(u) = 0$ eccetto per un numero finito di $u \in S_\sigma$.

L'esempio più semplice è il cono nullo $o = \{0\}$ che ha come duale $M_{\mathbb{R}}$ e come monoide M . Indicando con (e_1, \dots, e_n) una base di N e con (e_1^*, \dots, e_n^*) la base duale di M , gli elementi $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$ generano $M = S_o$ come un semigrupp; così, ponendo $z_i = \chi^{e_i^*}$, abbiamo

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}] := A_o = \mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}],$$

detta l'algebra dei *polinomi di Laurent*.

Quello che abbiamo ottenuto per il cono nullo è importante per tutti i coni poliedrali razionali fortemente convessi; infatti il semigrupp S_σ è un

sotto-semigruppato di S_o essendo il cono nullo una faccia di ogni σ fortemente convesso e quindi A_σ è una sottoalgebra di A_o . In particolare abbiamo osservato che A_σ è l'anello delle coordinate di una varietà affine normale ed abbiamo attribuito alla varietà affine

$$X_\sigma := \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \text{Specm}(A_\sigma)$$

il nome di **varietà torica affine** associata a σ .

Un esempio è il toro n-dimensionale complesso algebrico $X_o = T = (\mathbb{C}^*)^n$.

La varietà torica affine X_σ può comunque essere realizzata come una varietà algebrica affine, espressa da un numero finito di equazioni algebriche, nel seguente modo:

sia $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ un sistema di generatori del semigruppato S_σ e poniamo:

$$u_i := z^{a_i} = z_1^{a_{i1}} \dots z_n^{a_{in}} \in \mathbb{C}[z, z^{-1}],$$

per $i = 1, \dots, k$. Allora, sapendo che A_σ è generata da $\{\chi^{a_i}\}$ e che $z_i = \chi^{e_i} = \chi_i$, si ha $A_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$ e, considerando le indeterminate ξ_1, \dots, ξ_k , si può vedere che $X_\sigma = V(I)$, dove I è l'ideale generato da un numero finito di binomi della forma $\xi^\nu - \xi^\mu$, con $\nu \cdot A = \mu \cdot A$, dove $\nu \cdot A := \sum_{i=1}^k \nu_i a_i$. In questo modo, possiamo rappresentare X_σ come $V(I)$ sottovarietà di \mathbb{C}^k .

A questo punto abbiamo arricchito il ritratto delle varietà toriche con nuove definizioni e nuove proprietà.

In primo luogo sono stati descritti i morfismi tra varietà toriche affini, chiamando $\phi := \Phi|_{X_\sigma}$ **morfismo torico affine** se $\Phi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^m$ è una mappa monomiale, X_σ è contenuta in \mathbb{C}^k , $X_{\sigma'}$ è contenuta in \mathbb{C}^m e $\Phi(X_\sigma) \subset X_{\sigma'}$.

Questi morfismi sono stati utilizzati nella procedura di incollamento. Per spiegare tale procedimento è necessario ricordare due definizioni: quella di faccia e quella di ventaglio. Si definisce **faccia** di un cono poliedrale convesso σ l'insieme $\tau = H_u \cap \sigma = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}$ al variare di u in $\sigma^\vee - \{0\}$. Si definisce **ventaglio** un insieme finito non vuoto Σ di coni poliedrali razionali fortemente convessi in $N_{\mathbb{R}}$ tale che ciascuna faccia di un cono in Σ appartiene a Σ e l'intersezione di due qualsiasi coni di Σ è una faccia di ciascuno di essi.

Il metodo di incollamento è il seguente:

partendo da una faccia τ di σ , possiamo identificare X_τ con il sottinsieme aperto di X_σ dato da

$$X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}.$$

Indicando con $\tau := \sigma \cap \sigma'$, la faccia comune a due coni σ e σ' appartenenti a un ventaglio Σ e scegliendo un appropriato sistema di coordinate v_1, \dots, v_l

per $X_{\sigma'}$, si ha l'isomorfismo torico affine:

$$\psi_{\sigma, \sigma'} : X_{\sigma} \setminus \{u_k = 0\} \rightarrow X_{\sigma'} \setminus \{v_l = 0\}$$

corrispondente alla trasformazione delle coordinate di X_{τ}

$$(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \mapsto (v_1, \dots, v_l, v_{l+1}),$$

che abbiamo chiamato **mappa di incollamento** di X_{σ} e $X_{\sigma'}$ lungo X_{τ} .

Con questa definizione, nella unione disgiunta $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_{\sigma}$, identifichiamo due punti $x \in X_{\sigma}$ e $x' \in X_{\sigma'}$ che sono mappati l'uno nell'altro dalla mappa di incollamento $\psi_{\sigma, \sigma'}$. L'insieme di punti $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_{\sigma}$ con tale identificazione è chiamato la **varietà torica X_{Σ} determinata da Σ** .

Tra gli esempi di varietà toriche ricordiamo la retta proiettiva \mathbb{P}^1 che è la varietà torica X_{Σ} con $\Sigma := \{e_1, -e_1, \{0\}\}$:

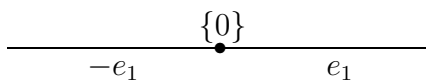


Figura 2:

e il piano proiettivo complesso \mathbb{P}^2 che è la varietà torica $X_{\Sigma'}$ con $\Sigma' = \{\sigma_o, \sigma_1, \sigma_2, e_1, e_2, -e_1 - e_2, \{0\}\}$, dove $\sigma_o = Cone(e_1, e_2)$, $\sigma_1 = Cone(e_2, -e_1 - e_2)$ e $\sigma_2 = Cone(e_1, -e_1 - e_2)$:

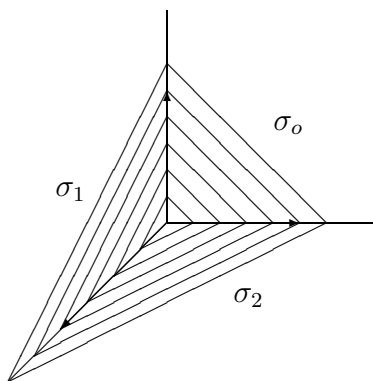


Figura 3:

Un altro aspetto che abbiamo sottolineato è la naturale azione del toro $T = (\mathbb{C}^*)^n$ sulle varietà toriche affini X_σ e la sua compatibilità con le mappa di incollamento che produce una naturale azione sulle varietà toriche X_Σ .

Finalmente siamo giunti alla definizione di morfismo torico come morfismo indotto da una mappa lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$. Infatti L produce in modo naturale, una mappa

$$\Psi : X_\Sigma \longrightarrow X_{\Sigma'}$$

la cui restrizione a una qualsiasi varietà torica affine X_σ di X_Σ , $\Psi_\sigma := \Psi|_{X_\sigma}$, è un morfismo torico affine

$$\Psi_\sigma : X_\sigma \longrightarrow X_{\sigma'}.$$

Chiamiamo $\Psi =: \bar{L}$ un **morfismo torico**.

In realtà sono stati fondamentali particolari morfismi torici conosciuti con il nome di scoppamenti; anche per la loro definizione abbiamo avuto bisogno di alcuni risultati di geometria convessa, riguardanti i ventagli, tradotti in seguito nel linguaggio delle varietà toriche. Abbiamo utilizzato i ventagli regolari, cioè quelli costituiti da coni regolari e a cui sono associate le varietà toriche regolari.

Assegnato un ventaglio Σ e un cono $\sigma \in \Sigma$ abbiamo definito due sottosiemens di Σ :

- La **stella di σ in Σ** :

$$St(\sigma, \Sigma) := \{\sigma' \in \Sigma \mid \sigma \subset \sigma'\}.$$

- La **stella chiusa di σ in Σ** :

$$\overline{St}(\sigma, \Sigma) := \{\sigma'' \in \Sigma \mid \sigma'' \subset \sigma' \in St(\sigma, \Sigma)\}.$$

Inoltre abbiamo chiamato la **congiunzione di σ e Σ'** :

$$\sigma \cdot \Sigma' := \{\sigma \cdot \sigma' \mid \sigma' \in \Sigma'\}.$$

Quindi, prendendo $\sigma \in \Sigma$ e p punto interno di σ , abbiamo dato alla transizione

$$\Sigma \longrightarrow (\Sigma \setminus St(\sigma, \Sigma)) \cup p \cdot (\overline{St}(\sigma, \Sigma) \setminus St(\sigma, \Sigma)) := s(p; \sigma)\Sigma$$

il nome di **suddivisione stellare** di Σ in direzione p e all'operazione inversa $s^{-1}(p; \sigma)$ definita da $s^{-1}(p; \sigma)(s(p; \sigma)\Sigma) = \Sigma$ quello di **suddivisione stellare inversa**.

Le suddivisioni prese in esame sono state quelle regolari, cioè quelle che preservano la regolarità e che sono caratterizzate da una particolare direzione p ; infatti se $\sigma = Cone(x_1, \dots, x_k)$, allora $s(p; \sigma)$ è regolare se e solo se $p = x_1 + \dots + x_k$.

Abbiamo codificato queste definizioni nel linguaggio torico e abbiamo definito gli scoppiamenti:

sia Σ un ventaglio regolare, e sia $s(p; \sigma)$ una suddivisione stellare regolare di Σ . Allora, il morfismo torico

$$\Psi_\sigma : X_{s(p; \sigma)\Sigma} \longrightarrow X_\Sigma$$

indotto dalla mappa identità I , $\Psi_\sigma = \bar{I}$, è chiamato uno **scoppiamento inverso** di $X_{s(p; \sigma)\Sigma}$. L'operazione inversa Ψ_σ^{-1} è chiamata **scoppiamento** di X_Σ .

Abbiamo visto che considerando la sottovarietà torica invariante X_{Σ_0} di X_Σ (definizioni 2.7.1, 3.3.2), definita dalla stella $\Sigma_0 := st(\sigma; \Sigma)$ di σ in Σ , si ha che ogni punto x di X_{Σ_0} è rimpiazzato con lo scoppiamento Ψ^{-1} da uno spazio proiettivo $(k - 1)$ -dimensionale e che lo scoppiamento inverso Ψ è un morfismo torico biiettivo fuori da $\Psi^{-1}(X_{\Sigma_0})$.

Come esempio, sia $\sigma := Cone(e_1 - e_2, e_2)$ un cono di qualche ventaglio regolare Σ in \mathbb{R}^2 . Si consideri la suddivisione stellare regolare di Σ in direzione p $s(p; \sigma)\Sigma$. Si sa che $p = e_1 - e_2 + e_2 = e_1$ e che quindi la suddivisione è $s(e_1; \sigma)$. Mediante tale suddivisione, σ si scompone in $\sigma_1 = Cone(e_1 - e_2, e_1)$ e $\sigma_2 = Cone(e_1, e_2)$. Facendo i calcoli si trova: $\sigma^\vee = Cone(e_1, e_1 + e_2)$, $\sigma_1^\vee = Cone(e_1 + e_2, -e_2)$, $\sigma_2^\vee = Cone(e_1, e_2)$ come nella figura:



Figura 4:

Siano $u_1 := z^{e_1} = z_1$, $u_2 := z^{e_1+e_2} = z_1 z_2$, $u'_1 := z^{-e_2} = z_2^{-1}$, $u'_2 := z^{e_1+e_2} = z_1 z_2 (= u_2)$, $u''_1 := z^{e_1} = z_1 (= u_1)$, $u''_2 := z^{e_2} = z_2$. I due piani affini

$X_{\sigma_1} = \{(u'_1, u'_2)\}$ e $X_{\sigma_2} = \{(u''_1, u''_2)\}$ sono mappati da Ψ nel piano affine $X_\sigma = \{(u_1, u_2)\}$:

$$\begin{aligned} X_{\sigma_1} &\longrightarrow X_\sigma \\ (u'_1, u'_2) &\longmapsto (u'_1 u'_2, u'_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\sigma_2} &\longrightarrow X_\sigma \\ (u''_1, u''_2) &\longmapsto (u''_1, u''_1 u''_2). \end{aligned}$$

Notiamo che per $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$, lo scoppimento è biiettivo.

Per dare un'idea chiara della forte corrispondenza tra geometria convessa e geometria algebrica che fin qui abbiamo sottolineato, presentiamo nella pagina seguente una tabella in cui ad ogni termine di geometria convessa corrisponde un elemento di geometria algebrica.

Geometria Convessa	Geometria Algebrica
σ cono	X_σ varietà torica affine
σ cono regolare	X_σ varietà torica affine regolare
τ faccia	X_τ sottovarietà torica
o cono nullo	$X_o = T = (\mathbb{C}^*)^n$ Toro
Σ ventaglio	X_Σ Varietà torica
Σ ventaglio regolare	X_Σ Varietà torica regolare
$\Sigma \rightarrow \Sigma'$ mappa di ventagli	$\psi : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ morfismo torico
suddivisioni stellari regolari	scoppimenti

Tabella 1: Vocabolario Algebrico-Convesso

Osserviamo che, nonostante l'importanza di questi tre capitoli fin qui riassunti, è fondamentale proseguire nella lettura del capitolo quarto e del quinto per conoscere gli aspetti più interessanti dell'argomento e i risultati recenti della ricerca.

Nel quarto capitolo abbiamo affrontato il problema della risoluzione delle singolarità delle varietà toriche, sottolineando come questo tema abbia suscitato forte interesse, probabilmente perchè le varietà regolari possiedono in generale proprietà più semplici di quelle singolari. Zariski e Hironaka hanno studiato il problema per le varietà algebriche con un lavoro che è risultato lungo e complesso. Nel caso torico, invece, si è riuscito a dimostrare un

teorema valido in ogni dimensione, secondo il quale ogni varietà torica X_Σ con delle singolarità possiede una risoluzione ψ .

Nel quinto capitolo abbiamo dimostrato che ogni varietà torica di dimensione due regolare e completa, può essere trasformata, mediante scoppamenti inversi, nel piano proiettivo complesso \mathbb{P}^2 oppure in una superficie di Hirzebruch H_k , per $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$, che ricordiamo essere definita dall'equazione $x_o^k y_o = x_1^k y_1$ e con ventaglio associato Σ_k che ha come coni 1-dimensionali $\{e_1, e_2, -e_1, -e_2 + ke_1\}$.

Altra questione fondamentale che abbiamo chiarito, dopo la lettura di diversi articoli recenti, è la fattorizzazione delle mappe birazionali. Abbiamo provato che, assegnati due ventagli Σ e Σ' regolari e completi in \mathbb{R}^2 , esistono delle suddivisioni stellari regolari $s_1, \dots, s_p, s'_1, \dots, s'_q$ tali che

$$\Sigma \xrightarrow{s_1} \dots \xrightarrow{s_p} \Sigma'' \xleftarrow{s'_q} \dots \xleftarrow{s'_1} \Sigma'.$$

In seguito, questo teorema è stato esteso anche ai ventagli tridimensionali con la **congettura di Oda forte e debole**: la prima è l'estensione ai ventagli tridimensionali del risultato precedente, la seconda afferma che due ventagli qualsiasi completi, regolari e tridimensionali possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante una catena finita di operazioni stellari regolari o di loro inverse.

La congettura di Oda è stata tradotta nel linguaggio delle varietà toriche, passando dai ventagli regolari e completi di \mathbb{R}^2 alle varietà toriche due-dimensionali regolari e complete e dalle suddivisioni stellari regolari agli scoppamenti.

La congettura di Oda ha un analogo in dimensione n : la **congettura di fattorizzazione**. La questione fondamentale della geometria birazionale è cercare di capire fino a che punto questa congettura può essere estesa a dimensione più alta. Ricordiamo le due versioni:

Congettura di Fattorizzazione debole

Ogni mappa birazionale propria e equivariante $f : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ tra due varietà toriche regolari, può essere fattorizzata come

$$X_\Sigma = X_o \xrightarrow{f_o} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = X_{\Sigma'}$$

dove ciascuna X_i è una varietà torica regolare e ciascuna f_i è uno scoppamento o scoppamento inverso con centro regolare che è chiusura di un'orbita.

Congettura di Fattorizzazione forte

Ogni mappa birazionale propria e equivariante $f : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma'}$ tra due varietà

toriche regolari, può essere fattorizzata come $X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma''} \leftarrow X_{\Sigma'}$, in cui le frecce rappresentano una sequenza di scoppimenti con centri regolari che sono chiusure di orbite.

Miyake e Oda trattarono il problema nel 1978 nel libro "Lectures on Torus Embeddings and Applications" dove hanno presentato una dimostrazione combinatoria del teorema per superfici toriche. Per questo, da allora, si è cominciato a parlare di congettura di Oda. In seguito, Danilov nel 1983, Cf. [19], ha dimostrato la versione debole per le varietà toriche 3-dimensionali e Ewald nel 1987, Cf. [20], ha completato la sua dimostrazione.

La versione debole in dimensione arbitraria per il caso torico è stata provata da Włodarczyk nel 1991, Cf. [21].

Nel 1996, è stato scritto da Morelli un importante articolo "The birational geometry of toric varieties". Qui Morelli ha provato la versione debole sempre per varietà toriche di dimensione generica, presentando un procedimento di desingularizzazione, e si è occupato anche della versione forte deducendo che quest'ultima è vera in tutte le dimensioni. Dopo la sua pubblicazione, sono stati scoperti alcuni errori riguardanti la desingularizzazione e altri relativi al processo dimostrativo secondo il quale la fattorizzazione debole implica la fattorizzazione forte. Lo stesso Morelli successivamente ha pubblicato un articolo nel quale ha cercato di correggere i suoi errori, Cf. [12], ma sono stati principalmente Abramovich, Matsuki e Rashid a fornire, alla fine degli anni novanta, una presentazione esauriente per la dimostrazione del caso debole, Cf. [13]. Sfortunatamente, come ha notato Matsuki, Cf. [22], la fattorizzazione forte è ancora un problema aperto anche in dimensione 3.

Abbiamo anche accennato ai risultati riguardanti le varietà toriche di Fano, attribuibili a Sato e Casagrande, Cf. [15].

Ricordiamo che proprio in questi ultimi due anni, si è cercato di estendere la congettura di fattorizzazione alle varietà algebriche e sono state pubblicate due dimostrazioni indipendenti della versione debole: una da Włodarczyk, Cf. [24], e una da Abramovich-Karu-Matsuki-Włodarczyk, Cf. [14]. Ricordiamo tale congettura:

Congettura di Fattorizzazione Debole

Sia $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ una mappa birazionale tra varietà algebriche complete e regolari X_1 e X_2 su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica zero, e sia $U \subset X_1$ un sottinsieme aperto dove ϕ è un isomorfismo. Allora ϕ può essere fattorizzato in una sequenza di scoppimenti e scoppimenti inversi con centri irriducibili e regolari disgiunti da U , cioè, vale a dire, che esiste

una sequenza di mappe birazionali tra varietà algebriche complete e regolari

$$X_1 = V_0 \xrightarrow{\phi_1} V_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_i} V_i \xrightarrow{\phi_{i+1}} V_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+2}} \dots \xrightarrow{\phi_{l-1}} V_{l-1} \xrightarrow{\phi_l} V_l = X_2$$

dove

1. $\phi = \phi_l \circ \phi_{l-1} \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1$,
2. ϕ_i sono isomorfismi su U , e
3. $\phi_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ oppure $\phi_i^{-1} : V_{i+1} \rightarrow V_i$ è un morfismo ottenuto da scoppiamenti con centro regolare irriducibile disgiunto da U .

Si deve sottolineare che, comunque, anche nel caso delle varietà algebriche, la versione forte rimane ancora improvatata.

Nell'ultimo capitolo abbiamo brevemente mostrato come la teoria delle varietà toriche possa essere messa anche in relazione con la logica. Per questo, senza troppi dettagli, abbiamo accennato al lavoro di Daniele Mundici, sottolineando la significatività logica della congettura forte di Oda e la possibilità di passare dalla suddivisione stellare ad una operazione logica sufficiente a decidere se una formula è una tautologia, ossia se corrisponde a una funzione che vale costantemente 1 sui generatori primitivi e che quindi risulta sempre vera indipendentemente dai valori assunti dalle sue variabili.

Bibliografia

- [1] Gunter Ewald. *Combinatorial Convexity And Algebraic Geometry*. Springer.
- [2] William Fulton. *Introduction To Toric Varieties*. Annals of Mathematics Studies Princeton University Press.
- [3] Tadao Oda. *Convex Bodies And Algebraic Geometry*. Springer-Verlag.
- [4] Tadao Oda. *Lectures On Torus Embeddings And Applications*. Tata Institute of Fundamental Research (Bombay 1978).
- [5] Shigeru Iitaka. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag.
- [6] David A. Cox. *Lecture 1: Affine Varieties, Cones, And Lattices*. Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties.
- [7] Gottfried Barthel. *Lecture 2: Affine Toric Varieties*. Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties.
- [8] David A. Cox. *Lecture 3: Projective Varieties And Abstract Varieties*. Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties.
- [9] Gottfried Barthel. *Lecture 4: General Toric Varieties*. Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties.
- [10] Gottfried Barthel. *Lecture 6: Completeness And Properness*. Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties.
- [11] Robert Morelli. *The Birational Geometry Of Toric Varieties*. J.Algebraic Geometry 5 (1996),751-782.
- [12] Robert Morelli. *Correction To The Birational Geometry Of Toric Varieties*. Homepage at The University of Utah (1997), 767-770.

- [13] Dan Abramovich, Kenji Matsuki and Sulima Rashid. *A Note On The Factorization Theorem Of Toric Birational Maps After Morelli And Its Toroidal Extension*. Tohoku Math. J. 51 (1999), 489-537.
- [14] Dan Abramovich, Kalle Karu, Kenji Matsuki, And Jaroslaw Wlodarczyk. *Torification And Factorization Of Birational Maps*. Preprint, 1999; Math. AG/9904135.
- [15] Cinzia Casagrande. *On The Birational Geometry Of Toric Fano 4-Folds*. C.R.Acad.Sci: Paris Sér.I Math.332 (2001), 1093-1098; Math. AG/0104210.
- [16] Vincenzo Marra, Daniele Mundici. *Combinatorial Fans, Lattice-Ordered Groups, And Their Neighbours: A Short Excursion*. Seminaire Lotharingien de Combinatoire 47 (2002), Article B47f.
- [17] Daniele Mundici. *Lukasiewicz Normal Forms And Toric Desingularizations*. In Proceedings Logic Colloquium 1993, Keele. Oxford University Press 1996.
- [18] Daniele Mundici, Giovanni Panti. *Twenty Questions With Many-Valued Answers*. Models, algebras, and proofs (Bogotá, 1995), 295-313.
- [19] V.I. Danilov. *Birational Geometry Of Toric 3-Folds*. Math. USSR-Izv. 21(1983), 269-280.
- [20] Gunter Ewald. *Blow-ups Of Smooth Toric 3-Varieties*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57 (1987) 193-201.
- [21] Jaroslaw Wlodarczyk. *Decomposition Of Birational Toric Maps In Blows-ups And Blow-down. A Proof Of The Weak Oda Conjecture*. Transactions of the AMS 349, 1997, 373-411.
- [22] Kenji Matsuki. *Correction: A Note On The Factorization Theorem Of Toric Birational Maps After Morelli And Its Toroidal Extension*. Tohoku Math. J. 52(2000), 629-631.
- [23] R.T.Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press, 1970.
- [24] Jaroslaw Wlodarczyk. *Combinatorial Structures On Toroidal Varieties And A Proof Of The Weak Factorization Theorem*. Preprint Math.AG/9904076.