



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Sintesi

della Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

L'equazione di diffusione di Feller: applicazioni e trattamento numerico

Relatore

Prof. Renato Spigler

Candidato

Emanuela Cacio

Anno Accademico 2007-2008

Maggio 2009

Classificazione AMS: 35K65, 65N06; 60J60

Parole chiave: equazioni paraboliche singolari e degeneri, teoria di Feller,
classificazione dei punti al bordo, schemi alle differenze,
precondizionamento

Lo scopo di questa tesi è descrivere dei metodi numerici adeguati per la risoluzione di una classe di problemi parabolici unidimensionali che presentano singolarità e/o degenerazioni al bordo (sulla frontiera).

Il titolo scelto per questa tesi richiama quello scelto per il libro di Lehnigk [16] nel quale tuttavia non sono trattati tutti i casi degeneri che si incontrano nelle applicazioni. Un titolo forse più adeguato sarebbe stato “Applicazioni e trattamento numerico di equazioni di diffusione degeneri”.

Lo studio è stato rivolto in particolare ad una coppia di equazioni alle derivate parziali paraboliche lineari unidimensionali a coefficienti variabili, ma indipendenti dal tempo t , della forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in (r_1, r_2), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)v) - \frac{\partial}{\partial x}(b(x)v), \quad x \in (r_1, r_2), \quad t > 0, \quad (2)$$

con $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $-\infty \leq r_1 < x < r_2 \leq +\infty$, dove la (2) rappresenta l'equazione formalmente aggiunta della (1).

Le equazioni (1), (2), chiamate rispettivamente equazione di Kolmogorov all'indietro e in avanti, possono essere viste anche in termini di processi stocastici. In questo lavoro però non sono stati analizzati gli aspetti probabilistici dei processi di diffusione ma piuttosto ci siamo interessati alla soluzione numerica dei problemi degeneri e/o singolari descritti dalla (1) e (2).

Gli spazi funzionali appropriati in cui definire le soluzioni di tali problemi sono suggeriti dal fatto che nella teoria delle diffusioni, vista in termini di processi stocastici, la (2) descrive l'evoluzione nel tempo della densità di probabilità della posizione di una particella, il cui integrale deve essere perciò finito, mentre la (1) è soddisfatta dalla probabilità di transizione come funzione della posizione iniziale. Questo porta a considerare la (2) nello spazio delle funzioni integrabili, $L^1(r_1, r_2)$, mentre la soluzione della (1) va vista nello spazio delle funzioni continue, $C^0[r_1, r_2]$.

Abbiamo assunto $a'(x)$, $b(x)$ continui ma non necessariamente limitati nell'intervallo (r_1, r_2) . Il coefficiente di diffusione $a(x)$ è inoltre strettamente positivo in

(r_1, r_2) con la possibilità che uno o entrambi i coefficienti $a(x)$, $b(x)$ tendano a zero o diventino illimitati per $x \rightarrow r_1^+$ e/o $x \rightarrow r_2^-$. Si osservi che il dominio spaziale può essere esso stesso illimitato. Tali problemi sono chiamati singolari o degeneri e sono l'oggetto principale di questa tesi. Più precisamente

Definizione 1. *Problemi del tipo (1), (2) sono detti **singolari** se almeno uno dei coefficienti tende all'infinito per $x \rightarrow r_j$ $j = 1, 2$. Il dominio spaziale può essere esso stesso illimitato. Sono chiamati invece problemi **degeneri** se il coefficiente $a(x)$ tende a zero per $x \rightarrow r_j$, $j = 1, 2$. In questo caso l'equazione cambia natura diventando formalmente iperbolica sul bordo.*

Il calcolo numerico delle soluzioni di tali problemi non è banale a causa delle degenerazioni e/o singolarità, e non è completo finché non viene specificato se opportune condizioni al bordo devono essere imposte e, nel caso di una risposta affermativa, quali condizioni esse siano.

Per tali problemi, in generale, non è possibile prescrivere condizioni al contorno indipendentemente dal comportamento di $a(x)$ e $b(x)$ vicino al bordo. Tali condizioni laterali possono essere invece imposte nel caso di bordi 'regolari' (secondo la classificazione di Feller), dove per $x \rightarrow r_j, j = 1, 2$, i limiti esistono automaticamente per tutte le soluzioni.

William Feller, seguendo la linea suggerita da Einar Hille [13], si è occupato di classificare la natura dei punti di frontiera, r_1, r_2 , dalla quale, insieme al tipo di dati imposti su essi, dipende l'unicità o meno della soluzione. Tale classificazione deriva dallo studio delle equazioni paraboliche attraverso semigrupp di trasformazioni.

Definizione 2. *Definendo la funzione*

$$W(x) := \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{b(s)}{a(s)} ds \right\}, \quad (3)$$

che rappresenta il Wronskiano, definito a meno della costante moltiplicativa $W(x_0)$, dell'equazione ordinaria associata alla (1),

$$a(x)y'' + b(x)y' = 0,$$

dove $x_0 \in (r_1, r_2)$, i punti al bordo sono classificati da Feller come segue:

- il bordo r_j è **regolare** se

$$W(x) \in L^1(x_0, r_j) \quad e \quad a^{-1}(x)W^{-1}(x) \in L^1(x_0, r_j);$$
- il bordo r_j è **di uscita** se

$$a^{-1}(x)W^{-1}(x) \notin L^1(x_0, r_j) \quad e \quad W(x) \int_{x_0}^x a^{-1}(s)W^{-1}(s)ds \in L^1(x_0, r_j);$$
- il bordo r_j è **di entrata** se

$$a^{-1}(x)W^{-1}(x) \in L^1(x_0, r_j) \quad e \quad a^{-1}(x)W^{-1}(x) \int_{x_0}^x W(s)ds \in L^1(x_0, r_j);$$
- il bordo r_j è **naturale** in tutti gli altri casi.

Definizione 3. Introducendo la funzione

$$s(x) := \frac{1}{a(x)} \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{b(r)}{a(r)} dr \right\}, \quad x_0 \in (r_1, r_2), \quad (4)$$

definiamo **flusso** dell'equazione (1) la funzione

$$f(x, t) := s(x)a(x)u_x = W^{-1}(x)u_x.$$

Un'ulteriore classificazione dei punti al bordo può essere fatta in ambito probabilistico studiando l'equazione parabolica in termini di processi stocastici, in punti accessibili e non accessibili:

Definizione 4. Il punto di frontiera r_j è **accessibile** se esiste una probabilità non nulla che la traiettoria di una data particella, partendo da un punto interno al dominio di definizione (r_1, r_2) , raggiunga il bordo r_j in un tempo finito. Diversamente il punto r_j si dirà **non accessibile**.

In accordo con la teoria di Feller, i bordi *di uscita* e quelli *regolari* sono punti accessibili, mentre i bordi *di entrata* e quelli *naturali* sono non accessibili: un processo diffusivo può sia entrare che uscire da un bordo regolare; se consideriamo un bordo r_j di uscita, partendo da r_j è impossibile raggiungere un punto interno $b < r_j$ al dominio, non importa quanto b sia vicino al bordo. Questo è equivalente a

dire che, una volta che il bordo è raggiunto, il processo termina e nessuna traiettoria può ripartire da r_j , per cui la particella viene completamente assorbita in un tempo finito (barriera assorbente). Un bordo di entrata non può essere raggiunto da un punto interno al dominio, ovvero la particella ritorna istantaneamente alla sua posizione iniziale e il processo continua per sempre (barriera riflettente), ma è possibile supporre che il processo abbia inizio da qui; nessun processo può mai partire nè raggiungere in tempo finito un bordo naturale, perciò il valore al bordo è irrilevante per il processo. La condizione al bordo più idonea che deve essere imposta nel caso di bordo naturale è perciò quella di flusso nullo (barriera riflettente).

La classificazione dei bordi permette quindi di determinare quali condizioni laterali è possibile imporre nei vari casi per le equazioni di Kolmogorov in avanti e all'indietro. Feller ha stabilito inoltre quando esiste o meno una soluzione unica e quando le condizioni laterali sono necessarie per averla.

Seguendo la classificazione dei bordi di Feller distinguiamo i seguenti casi:

- a) *Due bordi naturali.* In questo caso il problema ai valori iniziali sia per (1) che per (2) è univocamente determinato, rispettivamente negli spazi $C^0[r_1, r_2]$ e $L^1(r_1, r_2)$, senza che condizioni al bordo debbano essere imposte. Feller ha dimostrato inoltre che la soluzione in tal caso ha flusso nullo ai bordi, perciò tali condizioni al contorno possono essere prescritte. L'unicità della soluzione del problema ai valori iniziali in $(-\infty, +\infty)$ per questo caso era già stata dimostrata da Hille in [13].
- b) *Un bordo di uscita e uno naturale.* Sia r_1 naturale e r_2 di uscita (o viceversa). Allora il problema ai valori iniziali associato alla (1) ha infinite soluzioni, mentre quello per la (2) ha soluzione univocamente determinata. L'unica soluzione della (2), che soddisfa la condizione $aWv \rightarrow 0$ per $x \rightarrow r_2$, è generata senza l'imposizione di condizioni laterali; queste invece sono richieste per avere unicità della (1). Le soluzioni della (1) sono caratterizzate dalla condizione al bordo $u(r_2, t) = 0$ (bordo assorbente).

c) *Un bordo di entrata e uno naturale.* Sia r_1 naturale e r_2 di entrata (o viceversa).

Allora il problema ai valori iniziali associato alla (2) ha infinite soluzioni, mentre quello per la (1) è univocamente determinato. L'unica soluzione della (1), che soddisfa la condizione $W^{-1}u_x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow r_2$, è generata senza l'imposizione di condizioni laterali; queste invece sono richieste per avere l'unicità della (2). Le soluzioni della (2) sono caratterizzate dalla condizione al bordo $(a(x)v(x,t))_x - b(x)v(x,t)|_{x=r_2} = 0$ (bordo riflettente).

d) *Due bordi regolari.* Quando uno o entrambi i bordi sono regolari, entrambe le equazioni (1) e (2) hanno infinite soluzioni. Solo prescrivendo dei dati al bordo la soluzione di entrambi i problemi è univocamente determinata.

La soluzione della (1) soddisfa condizioni al bordo della forma

$$q_j \lim_{x \rightarrow r_j} u(x, t) + p_j (-1)^j \lim_{x \rightarrow r_j} W^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

mentre quella della (2) soddisfa la condizione

$$q_j \lim_{x \rightarrow r_j} W(x) a(x) v(x, t) + p_j (-1)^j \lim_{x \rightarrow r_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (a(x) v(x, t)) - b(x) v(x, t) \right\} = 0,$$

per certe costanti p_j, q_j .

e) *Caso generale.* Se nessun bordo è naturale esistono due cause di non unicità e dovranno essere imposte due condizioni al bordo.

Notiamo quindi che l'equazione (1) e la sua aggiunta formale (2), poiché sono definite su spazi funzionali diversi, non presentano le proprietà di regolarità.

Proposizione 1. *Se entrambi i bordi sono riflettenti, ovvero se entrambe le condizioni laterali corrispondono a quelle di Neumann nel caso di bordi regolari, allora la soluzione del processo diffusivo descritto dalla (1), che esiste ed è unica, assume un profilo costante nel tempo quando $t \rightarrow +\infty$.*

Abbiamo applicato la teoria di Feller a dei casi concreti, che si incontrano in aree diverse:

- Nella matematica finanziaria, per descrivere l'evoluzione del prezzo $u(S, t)$ di un contratto di un'opzione europea,

$$u_t = S^2 u_{SS} - (aS - b)u_S, \quad 0 < S < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

dove $a, b > 0$ sono due costanti assegnate, basato sul “sottostante” S , che è interpretato come un processo stocastico $S(t, W)$ di mean-reversion, soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dS = \alpha(L - S)dt + \sigma SdW.$$

Qui L è la “media a lungo termine”, ovvero il prezzo attorno al quale S tende a stabilizzarsi per tempi lunghi, α e γ sono costanti strettamente positive che rappresentano rispettivamente la velocità di mean-reversion e la volatilità del processo, e W è il moto browniano standard.

- Nella teoria della propagazione ondosa in un mezzo aleatorio dissipativo, per descrivere l'evoluzione dei momenti del coefficiente di riflessione complesso,

$$u_t = \frac{1}{4}(1 - \rho^2)^2 u_{\rho\rho} + \left[\frac{1}{4\rho}(1 - \rho^2)^2 - \frac{1}{2} \alpha\rho \right] u_\rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad t > 0, \quad (6)$$

dove $\alpha > 0$ è il parametro di perdita; la variabile t in questo caso non rappresenta il tempo ma piuttosto lo spessore della lastra occupato dal mezzo aleatorio.

- Nella teoria della propagazione ondosa in un mezzo aleatorio non dissipativo,

$$u_t = (1 - \rho^2)^2 u_{\rho\rho} + \left[\frac{1}{\rho}(1 - \rho^2)^2 \right] u_\rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad t > 0, \quad (7)$$

la cui soluzione in forma esplicita è riportata nel lavoro di Papanicolaou [19],

$$u(\rho, t) = \frac{2\rho e^{-t/16}}{\sqrt{2\pi}(t/4)^{\frac{3}{2}}(1 - \rho^2)^2} \int_{\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}}^{+\infty} \frac{se^{-(s^2/t)}}{\sqrt{\cosh(s) - \cosh\left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right)}} ds, \quad (8)$$

che però risulta essere non meno difficile da utilizzare in pratica, anche da un punto di vista numerico, a causa delle singolarità nell'integrale.

- Nella biologia, per descrivere l'evoluzione di una grande popolazione di individui indipendenti il cui tasso di riproduzione non dipende dalla grandezza della popolazione,

$$v_t = (axv)_{xx} - ((bx + c)v)_x, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (9)$$

dove $a > 0, b$ e c sono costanti assegnate.

Di ognuna di queste equazioni abbiamo classificato la natura dei punti al bordo. Per l'equazione (5), degenera in $S = 0$ e singolare in $S = +\infty$, entrambi i bordi risultano essere punti naturali, per cui il problema ai valori iniziali ha un'unica soluzione senza che si debba imporre alcuna condizione laterale. Ovviamente però, in generale, per potere implementare degli schemi numerici, delle condizioni si devono imporre. Le condizioni al bordo più naturali sono quelle di flusso nullo

$$\lim_{S \rightarrow r_j} f(S) = \lim_{S \rightarrow r_j} \left(\frac{S_0}{S} \right)^a \exp \left[-b \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0} \right) \right] \cdot u_S = 0.$$

Per il bordo $r_1 = 0$ abbiamo ritrovato la condizione di flusso nullo applicando la teoria di Feller all'equazione trasformata soddisfatta dalla derivata prima, u_S : derivando la (5) rispetto ad S , ponendo prima $v := u_S$ e successivamente $w := ve^{at}$ per eliminare il termine potenziale, abbiamo ricavato che i punti al bordo dell'equazione soddisfatta da w sono entrambi naturali, per cui la soluzione esiste ed è unica nella classe delle funzioni continue nell'insieme chiuso $[r_1, r_2]$, e perciò la w , e di conseguenza la u_S , è limitata nell'intorno destro di 0. Poiché il coefficiente della derivata prima nell'espressione del flusso tende a zero per $S \rightarrow 0$ e u_S è limitata, ne segue che il flusso f è nullo.

L'equazione (6) è degenera in $\rho = 1$ e singolare in $\rho = 0$. Abbiamo eliminato la singolarità con il cambio di variabile $x = \rho^2$. La nuova equazione così ottenuta

$$u_t = x(1-x)^2 u_{xx} + [(1-x)^2 - \alpha x] u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

è degenera in entrambi gli estremi. Per entrambe le equazioni il bordo rispettivamente $\rho = 0$ o $x = 0$ risulta essere naturale, mentre rispettivamente $\rho = 1$ o $x = 1$

è di entrata. La classificazione di Feller è infatti invariante per trasformazioni. Anche in questo caso la soluzione del problema è unica e le condizioni al bordo usate per implementare il programma sono, come suggerito dalla teoria, quelle di flusso nullo.

Per l'equazione (7), degenerare in $\rho = 1$ e singolare in $\rho = 0$, il punto 1 è naturale, mentre 0 è di entrata. Abbiamo osservato che, quando $\rho \rightarrow 1^-$, l'equazione si riduce a $u_t = 0$, potendosi dimostrare che u_ρ e $u_{\rho\rho}$ sono entrambe limitate. Poiché $\rho = 1$ è un punto naturale, la condizione al bordo più appropriata è quella di flusso nullo: $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} f(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \rho u_\rho = 0$. Necessariamente quindi si ha $u_\rho|_{\rho=1} = 0$, ovvero la u_ρ è limitata al bordo. La condizione laterale in $\rho = 1$ è perciò $u(1, t) = \text{cost}$. Integrando direttamente $u_t = 0$, con l'aiuto del dato iniziale $u(\rho, 0) = \rho^{2N}$ in $\rho = 1$, abbiamo ottenuto $u(1, t) = u(1, 0) = u(\rho, 0)|_{\rho=1} = 1$. Si osservi che sia la (6) che la (7) sono simmetriche rispetto all'origine per cui $u_\rho|_{\rho=0} = 0$ ed è pertanto lecito usare la condizione laterale di flusso nullo in $\rho = 0$.

L'equazione (8) è degenerare in $x = 0$ e singolare in $x = +\infty$. Mentre il bordo $x = +\infty$ è naturale e quindi non necessita di condizioni laterali, il coefficiente di diffusione, annullandosi in $x = 0$, ha l'effetto di cambiare il carattere dell'equazione a seconda che sia $c \leq 0$, $0 < c < a$, oppure $c > a$. Il bordo $x = 0$ infatti è regolare se $0 < c < a$, di uscita se $c \leq 0$ e di entrata per $c > a$. Con la classificazione dei punti al bordo per l'equazione (8) abbiamo ritrovato delle proprietà della soluzione già indicate da Feller nel suo articolo [8].

Il principale metodo numerico utilizzato è uno schema alle differenze finite *implicito*, opportunamente *precondizionato*, a coefficienti variabili, con differenze in avanti nel tempo e centrate nello spazio (il metodo di Crank-Nicolson), definito su una opportuna griglia con un opportuno trattamento al contorno.

Per precondizionare il sistema relativo al problema della propagazione di un'onda piana in un mezzo aleatorio è stata utilizzata la fattorizzazione incompleta di Choleski, ovvero un precondizionatore $P^{-1} := U^{-1}L^{-1}$, dove LU è la fattorizzazione della matrice A del sistema $Ax = b$ (il termine 'incompleta' si riferisce al

fatto che, poiché L^{-1} e U^{-1} in generale non risultano essere sparse, si pone uguale a zero ogni termine fuori dalle tre diagonali principali). Per il modello finanziario è stato utilizzato invece il preconditionatore P^{-1} , dove $P := \text{diag}(A)$.

Lo schema numerico sfrutta il fatto che un'equazione alle derivate parziali della forma (1) può sempre essere scritta in forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[B(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{s(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (r_1, r_2), \quad (10)$$

dove $s(x)$ è definita nella (4). A sua volta la (10), con un opportuno cambio di variabili, può essere riscritta nella forma conservativa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[c(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad \text{dove} \quad c(y) := \frac{B(x(y))}{A(x(y))}, \quad (11)$$

da cui abbiamo ricavato, utilizzando il metodo dell'energia, delle stime per dimostrare la *stabilità incondizionata* del metodo di tipo Crank-Nicolson usato.

Abbiamo introdotto la griglia

$$x_j := r_1 + \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \Delta x := \frac{r_2 - r_1}{N}, \quad (12)$$

con N intero positivo e Δx passo di discretizzazione spaziale, in modo tale che

$$x_1 = r_1 + \frac{\Delta x}{2}, \quad x_N = r_2 - \frac{\Delta x}{2},$$

ovvero i nodi risultano essere tutti interni al dominio di definizione. L'approssimazione numerica della soluzione $u(x_j, t_n) := u(j\Delta x, n\Delta t)$, dove Δt è il passo di discretizzazione temporale, è stata indicata con u_j^n . La discretizzazione di (10) con un'accuratezza del secondo ordine nel tempo e nello spazio è data da

$$s_j(u_j^{n+1} - u_j^n) = \mu \left[\beta_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - \beta_{j-\frac{1}{2}}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \beta_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \beta_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) \right], \quad (13)$$

dove $j = 2, 3, \dots, N-1$, $n = 1, 2, \dots, M$ e si è posto $\mu := \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Si noti che $x_{\frac{3}{2}} = r_1 + \Delta x$ e $x_{N-\frac{1}{2}} = r_2 - \Delta x$; nessuna quantità è stata quindi valutata nei

punti al bordo singolari $x = r_1$, $x = r_2$. Le condizioni al bordo di flusso nullo, $s(x)a(x)u_x = 0$, sono state discretizzate nel modo seguente:

$$s_1(u_1^{n+1} - u_1^n) = \mu[\beta_{\frac{3}{2}}(u_2^{n+1} - u_1^{n+1}) + \beta_{\frac{3}{2}}(u_2^n - u_1^n)] \quad \text{per } j = 1, \quad (14)$$

$$s_N(u_N^{n+1} - u_N^n) = \mu[-\beta_{N-\frac{1}{2}}(u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}) - \beta_{N-\frac{1}{2}}(u_N^n - u_{N-1}^n)] \quad \text{per } j = N. \quad (15)$$

Le equazioni (13)-(15) rappresentano un sistema di N equazioni lineari in N incognite. Introducendo la matrice diagonale S ,

$$S := \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_N),$$

e la matrice simmetrica tridiagonale B ,

$$B := \begin{pmatrix} \beta_{\frac{3}{2}} & -\beta_{\frac{3}{2}} & 0 & \dots & & & 0 \\ -\beta_{\frac{3}{2}} & \beta_{\frac{3}{2}} + \beta_{\frac{5}{2}} & -\beta_{\frac{5}{2}} & 0 & & & \\ 0 & -\beta_{\frac{5}{2}} & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & & \beta_{N-\frac{3}{2}} + \beta_{N-\frac{1}{2}} & -\beta_{N-\frac{1}{2}} & \\ 0 & & & 0 & -\beta_{N-\frac{1}{2}} & \beta_{N-\frac{1}{2}} & \end{pmatrix},$$

il sistema può quindi essere scritto come

$$(S + \mu B)U^{n+1} = (S - \mu B)U^n. \quad (16)$$

Proposizione 2. *La soluzione numerica ottenuta con il metodo tipo Crank-Nicolson sopra descritto, con condizioni al bordo di flusso nullo, converge incondizionatamente ad un profilo costante quando $t \rightarrow +\infty$, come enunciato nella Proposizione 1.*

Con lo schema di Crank-Nicolson abbiamo risolto il problema relativo alla matematica finanziaria e quello della propagazione ondosa, sia nel caso dissipativo che in quello senza perdita di energia. Per quest'ultima equazione però abbiamo

implementato per il bordo $\rho = 0$ la condizione di flusso nullo, mentre per il bordo $\rho = 1$ la condizione $u(1, t) = 1$ è stata implementata come

$$s_N(u_N^{n+1} - u_N^n) = \mu[\beta_{N+\frac{1}{2}}(1 - u_N^{n+1}) - \beta_{N-\frac{1}{2}}(u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}) + \beta_{N+\frac{1}{2}}(1 - u_N^{n+1}) - \beta_{N-\frac{1}{2}}(u_N^n - u_{N-1}^n)] \text{ per } j = N. \quad (17)$$

La matrice B associata è perciò

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{\frac{3}{2}} & -\beta_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_{\frac{3}{2}} & \beta_{\frac{3}{2}} + \beta_{\frac{5}{2}} & -\beta_{\frac{5}{2}} & 0 & \\ 0 & -\beta_{\frac{5}{2}} & \ddots & & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \beta_{N-\frac{3}{2}} + \beta_{N-\frac{1}{2}} & -\beta_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & & 0 & -\beta_{N-\frac{1}{2}} & \beta_{N-\frac{1}{2}} + \beta_{N+\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

e il sistema da risolvere diventa

$$(S + \mu B)U^{n+1} = (S - \mu B)U^n + C, \quad (18)$$

dove $C := (0, \dots, 0, 2\mu\beta_{N+\frac{1}{2}})^T$ è il vettore dei termini noti, tutti nulli tranne quello calcolato nel nodo N -esimo.

Tutti i programmi sono stati scritti in MATLAB. Esattamente come dimostrato nella teoria, i grafici (vedi Figg. 1,2,3) hanno indicato che le soluzioni delle equazioni (5), (6) e (7), avendo in entrambi i bordi delle barriere riflettenti, si stabilizzano nel tempo formando un profilo costante.

Dopo aver ricavato l'equazione soddisfatta dal flusso $v := a(x)s(x)u_x$, di cui conoscevamo il dato iniziale e le condizioni al bordo da imporre, si è utilizzato un ulteriore programma, sempre basato sullo schema di Crank-Nicolson, per mostrare l'andamento del flusso relativo al caso del mezzo aleatorio dissipativo al fine di verificare la monotonia della soluzione nell'intorno del bordo $x = 1$. Infatti, dato che il prodotto $a(x)s(x)$ è definito positivo all'interno del dominio, il segno del flusso v fornisce indicazioni sul segno di u_x e quindi sulla monotonia della funzione $u(x, t)$.

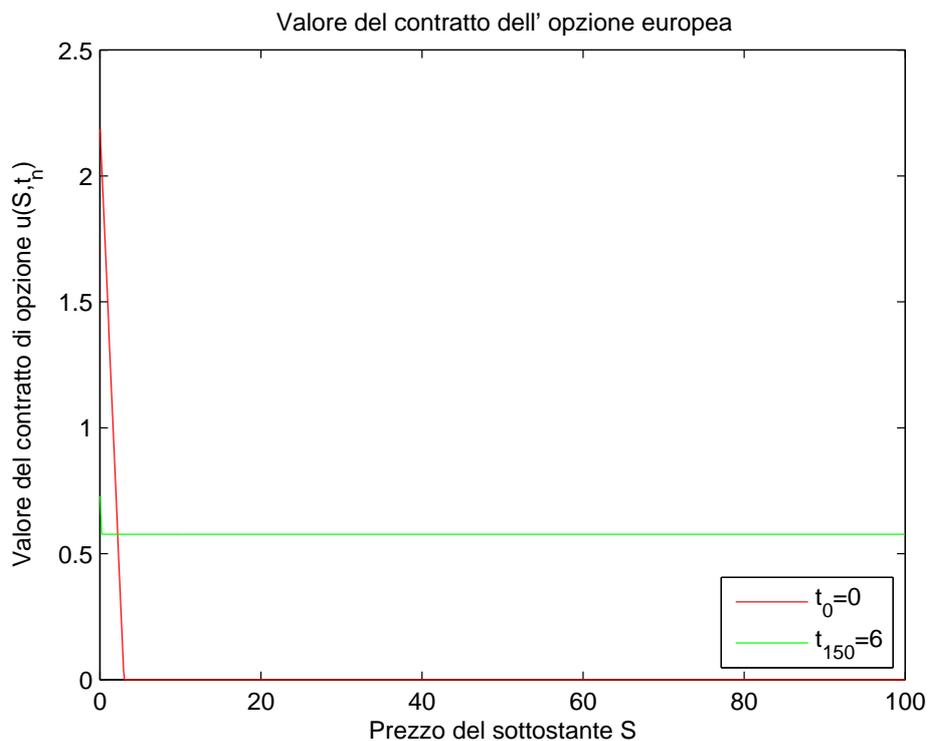


Figura 1: Valore del contratto di un'opzione europea al tempo iniziale e alla maturità $T = 6$ mesi per prezzi del sottostante $x \in [0, 100]$, calcolato utilizzando il metodo alle differenze finite di Crank-Nicolson con $N = 1000$. Dalla figura si nota che in un intorno destro di $x = 0$ la soluzione decresce a zero mentre per x grande il prezzo dell'opzione si stabilizza. Questo fenomeno è compatibile con il modello finanziario che stiamo analizzando: in un processo di mean-reversion il prezzo del sottostante x si stabilizza per tempi lunghi attorno ad un valore medio, e di conseguenza anche il valore dell'opzione tenderà ad assumere valori costanti.

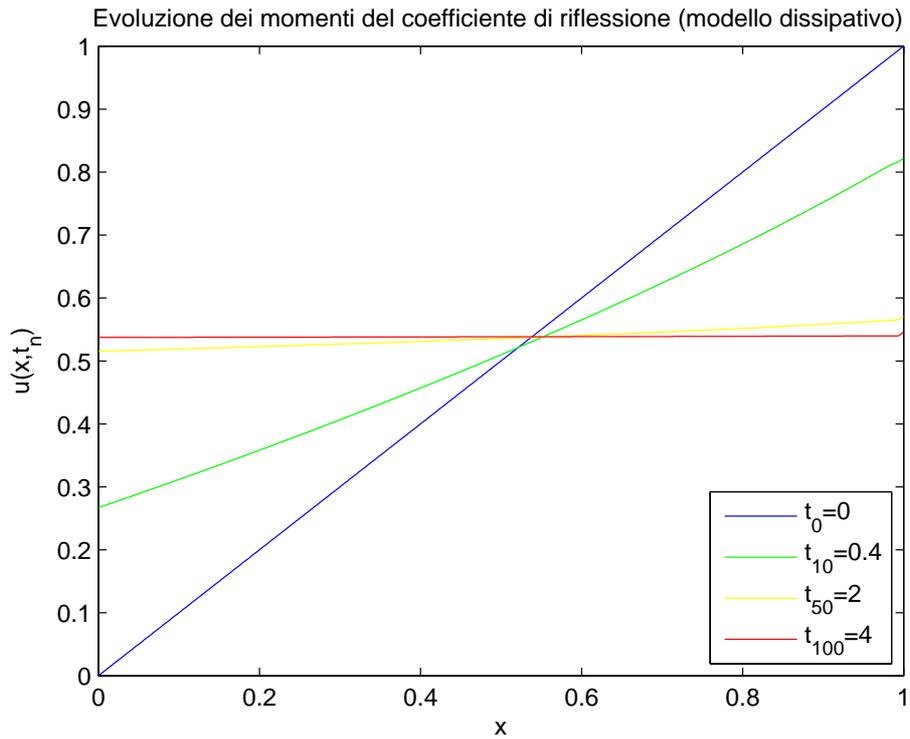


Figura 2: Evoluzione nel tempo dei momenti del coefficiente di riflessione complesso nel caso dissipativo con $\gamma = 1$, $\alpha = 0.5$, $N=1000$. Come si vede nella figura, la soluzione decresce nel tempo tendendo a raggiungere un profilo stazionario, esattamente come previsto dalla teoria. Per t grandi, quindi, esisterà un valore stazionario corrispondente alla soluzione dell'equazione ordinaria $u_t = 0$. Si noti il comportamento monotono nell'intorno sinistro di $x = 1$, che è stato confermato calcolando il segno di u_x , risolvendo l'equazione soddisfatta dal flusso.

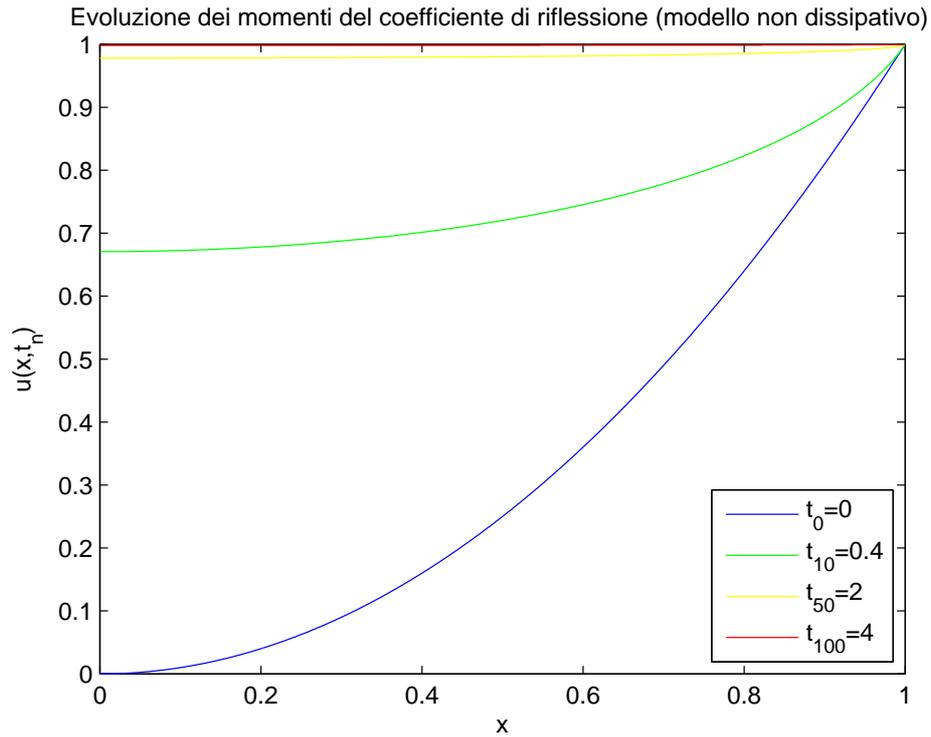


Figura 3: Evoluzione nel tempo dei momenti del coefficiente di riflessione complesso con dato iniziale $u(x, 0) = x^2$ ($\gamma = 1$) e $N=1500$ nel caso di un'onda che si propaga in un mezzo aleatorio non dissipativo. La figura mostra come la soluzione per tempi lunghi raggiunge un profilo stazionario. Anche in questo caso troveremo quindi un valore stazionario della $u(\rho, t)$ per t grandi, corrispondente alla soluzione dell'equazione ordinaria $u_t = 0$.

Un altro approccio, proposto in [2] per risolvere numericamente l'equazione singolare (5), è rappresentato da un metodo semi-spettrale che approssima la soluzione analitica del problema mediante uno sviluppo in serie di polinomi ortogonali. La classe usata è quella dei polinomi di Laguerre, suggerita dal fatto che, ponendo

$$x := \frac{b}{S}, \quad (19)$$

l'equazione (5) si trasforma in

$$u_t = x^2 u_{xx} + x(a + 2 - x)u_x, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (20)$$

dove $a > 0$ è una costante assegnata, che scritta in forma autoaggiunta diventa

$$u_t = \frac{1}{w(x)} [x^2 w(x) u_x]_x =: \mathcal{A}u, \quad (21)$$

dove $w(x) := x^a e^{-x}$ è la funzione peso dei polinomi di Laguerre. I punti al bordo si scambiano fra loro, cioè lo zero nella (5) diventa l'infinito nella (20) e viceversa. La natura dei due punti resta invece la stessa, ovvero entrambi i bordi sono ancora naturali. L'equazione (20) si può scrivere come un'equazione differenziale astratta, $\dot{x}(t) = Ax(t)$, nella quale l'operatore \mathcal{A} , è stato espresso in termini di polinomi di Laguerre e nasconde la parte spaziale. Dato che la matrice A associata all'operatore genera un semigruppato contrattivo, la soluzione è data da

$$x(t) = e^{tA} x_0, \quad (22)$$

dove x_0 è il dato iniziale. Il metodo numerico procede nel modo seguente: prima di tutto si calcolano i coefficienti dello sviluppo del dato iniziale in serie di polinomi di Laguerre; l' n -esimo coefficiente, $x_0(n)$, dato da

$$x_0(n) = \int_0^{+\infty} u_0(x) P_n(x) w(x) dx,$$

dove $P_n(x)$ è l' n -esimo polinomio di Laguerre ortonormalizzato e l'integrale è calcolato utilizzando una formula ricorsiva. Poi si considera il sistema N -dimensionale troncato $x^{(N)}(t) = e^{tA_N} x_0$, e infine si calcola il valore del contratto di opzione

come combinazione dei primi N polinomi di Laguerre,

$$u(S, t) = \sum_{n=0}^N x_n^{(N)}(t) P_n \left(\frac{b}{S} \right), \quad (23)$$

dove $x_n^{(N)}(t)$ è l' n -esimo coefficiente del vettore $x^{(N)}(t)$.

Tale metodo tuttavia è risultato poco efficiente perché nell'intorno destro del punto $S = 0$, al tempo finale, la soluzione oscilla illimitatamente, contrariamente a quanto affermato dalla teoria di Feller secondo la quale invece la soluzione è (unica e) continua nella chiusura del dominio spaziale. Utilizzando invece lo schema alle differenze finite di Crank-Nicolson sviluppato in questa tesi, tali oscillazioni non compaiono. Il significato del risultato ottenuto da Bos, Ware e Pavlov è anche giudicato privo di senso dal punto di vista del modello finanziario.

Riassumendo, possiamo concludere che molti problemi concreti, come l'evoluzione nel tempo del prezzo di un contratto di opzione europeo, o quello della crescita di una popolazione, si possono descrivere mediante equazioni paraboliche singolari e/o degeneri che presentano patologie che si possono studiare a partire dalla teoria sviluppata da W. Feller. Questa teoria è stata la base necessaria per classificare i punti al bordo e permettere un adeguato trattamento numerico.

Lo studio è stato rivolto solo al caso unidimensionale ma si può pensare di utilizzare la teoria di Feller in *due o più dimensioni* al fine di mettere a punto schemi numerici adeguati. Ovviamente in questo caso l'analisi risulterebbe essere più complessa poiché, ad esempio, in un dominio rettangolare del piano, le degenerazioni e/o le singolarità potrebbero comparire in più punti di uno o più lati, o potrebbe anche essere diversa la natura dei vari punti e in particolare potrebbe essere necessario imporre certe condizioni in alcuni punti del dominio e non in altri.

Nello spirito della teoria di Feller si può pensare anche di risolvere *sistemi* in una dimensione spaziale, lineari e omogenei. Un caso che si potrebbe affrontare forse più facilmente è quello dei sistemi triangolarmente accoppiati.

Uno studio analitico su esistenza e unicità delle soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche degeneri in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, limitato e connesso, è stato condotto recentemente da M.A. Pozio, F. Punzo e A. Tesi [21]. In tale articolo si descrive quando debbano essere imposte delle condizioni al contorno ma non quali, per cui il problema numerico, che necessita di dati al bordo per poter implementare un algoritmo, non viene affatto affrontato.

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, New York (1965).
- [2] L.P. Bos, A.F. Ware, B.S. Pavlov, *On a semi-spectral method for pricing an option on a mean-reverting asset*, Quantitative Finance, Vol. **2** (2002), 337-345.
- [3] M. Campiti, G. Metafune, *Ventcel's boundary conditions and analytic semigroups*, Arch. Math. **70** (1998), 377-390.
- [4] S.E. Cohn, R. Spigler, *A numerical method for a class of diffusion equations degenerate at the boundaries*, Manoscritto (2006).
- [5] F. Colombo, R. Monte, V. Vespri, *On some equations about european option pricing*, Syst. Modell. Optim. (1997), 33-41.
- [6] K. J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Vol. **194** Grad. Texts in Math., Springer, New York (1999).
- [7] W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semi-group of transformations*, Ann. of Math. **55** (1952), 468-519.
- [8] W. Feller, *Two singular diffusion problems*, Ann. of Math. **54** (1951), 173-182.
- [9] W. Feller, *Diffusion processes in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. **77**, No. 1 (1954), 1-31.

- [10] W. Feller, *Diffusion problems in genetics*, Second Symposium on Probability and Statistics, Berkeley (1951), 227-246.
- [11] G.E. Forsythe, W.R. Wasow, *Finite-difference methods for partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York (1960).
- [12] F. Gozzi, R. Monte, V. Vespri, *Generation of analytic semigroups for degenerate elliptic operators arising in financial mathematics*, Diff. Integr. Equat. **15** (2002), 1085-1128.
- [13] E. Hille, *Les Probabilités continues en chaîne*, C.R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 34-35.
- [14] S. Karlin, H. E. Taylor, *A second course in stochastic processes*, Elsevier Science & Technology Books, New York (1981).
- [15] N.N. Lebedev, *Special functions and their applications*, New York (1972).
- [16] S.H. Lehnigk. *The generalized Feller equation and related topics*, Longman Scientific and Technical, New York (1993).
- [17] G. Metafune, *Analyticity for some degenerate one-dimensional evolution equations*, Studia Math. **127** (1998), 251-276.
- [18] A.R. Mitchell, D. Griffiths, *The finite difference method in partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York (1980).
- [19] G. Papanicolaou, *Wave propagation in a one-dimensional random medium*, SIAM Appl. Math. Vol. **21**, No. 1 (1971), 13-18.
- [20] G. Papanicolaou, W. Kohler, *Power reflection from a lossy one-dimensional random medium*, SIAM Appl. Math. Vol. **30**, No. 2 (1976), 263-268.
- [21] M.A. Pozio, F. Punzo, A. Tesei, *Criteria for well-posedness of degenerate elliptic and parabolic problems*, J. Math. Pures Appl. **90** (2008), 353-386.

- [22] R. Spigler, *Numerical Treatment of a boundary-value problem for a certain singular parabolic partial differential equation*, J. Comput. Phys. **74** (1988), 233-243.
- [23] R.D. Richtmyer, K.W. Morton, *Difference methods for initial-value problems*, Wiley-Interscience, New York (1967), 2nd ed.
- [24] V. Vespri, *Local existence, uniqueness and regularity for a class of degenerate parabolic systems arising in biological models*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. **87** (1992).
- [25] P. Wilmott, *Paul Wilmott on quantitative finance*, New York (2000).