Università degli studi di Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in Matematica di

Giorgia Maria Blasi

Metodi di controllo stocastico per la valutazione del prezzo dei contratti di opzione nei mercati incompleti

Relatore
Prof.Sergio Scarlatti

Il Candidato

Il Relatore

Anno Accademico 2000/2001
Novembre 2001

Classificazione AMS: 93E20, 90C39, 49N30

Parole chiave:controllo stocastico, programmazione dinamica, mercati incompleti

Indice

Introduzione

Un contratto di opzione (europea) su azione é un accordo tra due controparti,denominate venditore ed acquirente,che dá all'acquirente, sotto pagamento di un "premio" al venditore, il diritto ma non l'obbligo di acquistare dalla controparte (o di vendere ad essa) ad un certo prezzo predefinito (detto prezzo di esercizio) ad una certa data futura (detta scadenza dell'opzione) il titolo azionario in questione.
Un contratto di opzione é un esempio particolare di ció che, in ambito finanziario, viene comunemente chiamato un prodotto "derivato", cioé un prodotto finanziario il cui valore dipende dal prezzo di un altro bene finanziario (detto "sottostante") come ad esempio un titolo azionario.
Le opzioni sono attivitá finanziarie ad alto rischio. Per l'acquirente sono piú rischiose rispetto all'acquisto dell'azione medesima poiché sono contratti legati ad una scadenza (mentre non lo é il possesso diretto di una azione); per il venditore il rischio é invece un rischio di solvibilitá, a causa dell'eventuale perdita elevata in cui puó incorrere se il contratto si chiude a suo sfavore.
In generale questi strumenti finanziari possono essere usati dai partecipanti al mercato con propositi differenti: o a scopo speculativo nella speranza di realizzare guadagni elevati a partire da capitali relativamente modesti (effetto leva), oppure con propositi "assicurativi", per limitare eventuali rischi di perdita di valore del proprio portafoglio.
Un venditore di opzione é portato, in modo naturale, a seguire una strategia di investimento che lo copra dal rischio precedentemente menzionato.

Disponendo alla stipula del contratto di un capitale iniziale v_0 pari al "premio" ricevuto, puó cercare di costruire, a partire da questo capitale, un portafoglio (detto di replica) che alla scadenza dell'opzione lo metta in condizioni di onorare gli eventuali obblighi di pagamento nei confronti della controparte senza alcuna spesa supplementare.
Se ció gli riesce si dice che la strategia di replica é risultata perfetta o esatta. Black,Scholes (1973)([BLS 73]) e soprattutto Merton (1973)([ME 73]) hanno dimostrato che, sotto opportune ipotesi sul mercato in questione ed ammettendo che sia possibile fare "trading" continuamente in ogni istante di tempo, esiste un unico premio iniziale che non permette arbitraggi (capitolo 1) ed assicura al venditore la possibilitá di una strategia di investimento risultante in una copertura perfetta dal rischio,qualunque sia il prezzo finale del titolo. Tale "premio" C_0 si determina come il valore atteso, scontato al tasso di interesse certo r, del pay-off a scadenza dell'opzione, rispetto ad una misura di probabilitá particolare P^*, detta misura di "probabilitá neutrale al rischio". Per un contratto che dá diritto all'acquisto (denominato "call"), il pay-off a scadenza é:

$$C_N = \max\{S_N - K, 0\} \tag{1}$$

dove K é il prezzo di esercizio e S_N é il prezzo del titolo alla scadenza N.Pertanto:

$$C_0 = e^{-rN}\mathbf{E}^{P^*}[\max\{S_N - K, 0\}]. \tag{2}$$

Da un punto di vista matematico la misura di probabilitá P^* resta individuata come l'unica che rende il processo di prezzo scontato del titolo azionario una martingala (vedi capitolo 1).

É noto che le condizioni poste da Black, Scholes e Merton, sotto le quali é possibile realizzare una copertura perfetta, sono di fatto irrealizzabili: il venditore dovrebbe ribilanciare ad ogni istante il portafoglio da lui detenuto, comprando o vendendo quote del titolo in modo opportuno,ed inoltre dovrebbe poter fare tutto ció senza mai incorrere in alcun costo.
Nella realtá questo é evidentemente impossibile.Il "trading" viene effettuato a tempo discreto e la presenza di costi di transazione spesso non puó essere ignorata.
La conseguenza di tutto ció é che **il mercato finanziario reale non é completo**: non ci si puó coprire completamente dal rischio derivante dalla vendita di un qualunque "contingent-claim", cioé di un prodotto finanziario il cui pay-off é contingente al realizzarsi di un certo evento entro una certa data.
In questa tesi,dal capitolo 2 in poi, verrá assunto che il mercato in considerazione risulti non completo, o come si dice in finanza, sia "**incompleto**".
Nell'ambito della modellistica matematica dei mercati finanziari, la nozione di incompletezza ha una sua specifica caratterizzazione: corrisponde al fatto che il processo di prezzo scontato del titolo azionario risulta essere una martingala rispetto a molteplici misure di probabilitá.
Ne consegue che la determinazione di un "premio" iniziale da pagare per un contingent-claim non é piú univoca, né é piú certo che un tale premio permetta al venditore di coprirsi interamente dal rischio.
Queste difficoltá hanno generato in periodi recenti un'intensa attivitá di ricerca, sia a livello economico finanziario che di modellistica matematica,volta a superarle (si veda ad esempio [MQ 96]).
In questa tesi si perseguirá una metodologia semplice per affrontare il problema della copertura dal rischio nel contesto sopra descritto.
Supponiamo che il venditore di un generico contingent-claim abbia a disposizione un capitale iniziale v_0 e persegua una certa strategia di investimento basata nell'acquisto o vendita di quote del sottostante (congiuntamente al-

la possibilitá di investire e/o disinvestire su un titolo a rendimento certo) a certe date prefissate $t = 0, \ldots , N-1$.Alla scadenza del contratto il suo portafoglio avrá un certo valore monetario V_N mentre dovrá far fronte ad un certo pagamento F a favore della controparte.
L'idea é di quantificare il rischio di questa situazione **misurandolo con lo scarto quadratico medio** tra F e V_N e di cercare di renderlo il piú piccolo possibile perseguendo un'opportuna strategia di investimento $\theta = (\theta_1, \ldots , \theta_{N-1})$.In altri termini, denotando con P la distribuzione di probabilitá del processo di prezzo, si cerca di risolvere il problema:

$$\epsilon^2(v_0) := \inf_{\theta} \mathbf{E}^P[(V_N^{v_0}(\theta) - F)^2] \tag{3}$$

per assegnato v_0, e poi in un passo successivo ottimizzare anche la scelta di v_0.
Questa tecnica di copertura é nota come "mean-variance hedging"([DR 91]) ed é stata in generale studiata a tempo continuo.Nel presente lavoro verrá analizzata a tempo discreto (si vedano in proposito le referenze [SCL 94],[SCW 95] e [BKL 97]).
Le strategie di portafoglio che verranno considerate saranno solo quelle "autofinanzianti", cioé tali che la variazione del valore del portafoglio é dovuta interamente a guadagni o perdite realizzate solo con gli investimenti stessi.
La scelta di quantificare il rischio attraverso lo scarto quadratico medio $\epsilon^2(v_0)$ é dovuta a tre motivi principali.
Il primo é la trattabilitá.Si mostra che il problema di replica proposto, per tale scelta, puó essere risolto, tramite la Programmazione Dinamica (vedi capitolo 3), con un algoritmo ricorsivo efficiente ed esatto.
La seconda ragione é che una funzione di perdita simmetrica, come quella qui considerata, é la scelta piú naturale da fare quando a priori non si conosce se l'opzione verrá acquistata o venduta.

In tal caso l'asimmetria é sconveniente in quanto errori di replica positivi per posizioni lunghe (acquirente) diventano errori di replica negativi per posizioni corte (venditore). Infatti quando un partecipante al mercato chiede ad un broker le quote di opzione presenti nel mercato, non rivela se é un venditore o un acquirente fintanto che non riceve tutte le informazioni sui prezzi di domanda ed offerta.Quindi é interesse del broker minimizzare lo scarto quadratico medio.

La terza motivazione é che, considerando lo scarto quadratico medio rispetto ad una delle molteplici misure di probabilitá menzionate precedentemente, che rendono il processo di prezzo scontato una martingala, il costo ottimo v_0^*, che minimizza l'errore di replica $\epsilon(v_0)$, oltre ad essere il costo minimo per inizializzare la strategia di investimento ottima, puó essere anche interpretato come il prezzo di equilibrio del contingent-claim (si veda a riguardo [BKL 97]).

Se la reale distribuzione di probabilitá P non coincide con una tale misura questo non é vero: differenti investitori con differenti preferenze possono considerare v_0^* un valore troppo basso o addirittura troppo elevato per farsi carico del rischio $\epsilon(v_0^*)$

Il problema proposto in questa tesi é giá stato affrontato da Bertsimas,Kogan e Lo ([BKL 97]) che l'hanno discusso e risolto nell'ambito di un mercato incompleto costituito soltanto da un bond, il cui tasso di interesse é supposto nullo ad ogni tempo e da un titolo azionario, con l'ulteriore ipotesi di base che il processo di prezzo sia Markoviano.

Questa ultima ipotesi permette di ottenere, tramite la Programmazione Dinamica, una procedura numerica implementabile facilmente per determinare esplicitamente la strategia di investimento ottima e l'errore di replica.

Nel presente lavoro da un lato i risultati ottenuti da Bertsimas, Kogan e Lo sono generalizzati al caso in cui il tasso di interesse del bond non sia nullo ma sia una generica funzione (deterministica) del tempo, dall'altro si studia il problema della sensitivitá del rischio (3) rispetto ad una specifica errata della misura di probabilitá P (si veda ad esempio [FR 00] per la stessa problematica ma una differente modellizzazione del rischio), ottenendo al riguardo alcuni primi risultati quantitativi .

Diamo ora qui di seguito una breve descrizione sul contenuto dei capitoli presenti nella tesi.

Nel primo capitolo si danno i concetti e i risultati fondamentali riguardanti i mercati completi, richiamando le definizioni finanziarie di base utili anche per una maggiore comprensione dei capitoli successivi.

Nel capitolo 2 viene affrontato il problema di replica, sopra esposto, in un mercato incompleto sotto l'ipotesi particolare che il processo di prezzo del titolo azionario sia una martingala, giungendo a formule esplicite sia per la strategia ottima di investimento che per il miglior capitale iniziale.Viene inoltre proposto un esempio in cui si applica il problema di replica in un mercato (incompleto) dove il processo di prezzo del titolo azionario segue una particolare dinamica.

Nel terzo capitolo si introducono le nozioni di modello di controllo Markoviano e lo strumento matematico della Programmazione Dinamica, esponedo i risultati principali che verranno poi utilizzati nel quarto capitolo.

Nel capitolo 4 si affronta il problema di replica nei mercati incompleti, sotto ipotesi differenti da quelle del capitolo 2, ottenendo un algoritmo ricorsivo che ci fornisce la strategia ottima e il capitale iniziale ottimo.

Nel capitolo 5 si considera il caso in cui il modello probabilistico per il prezzo non sia correttamente specificato, cioé non si conosca la probabilitá reale dell'andamento del prezzo,ed in cui il venditore del contingent-claim intraprenda quindi una strategia sub-ottimale e non quella ottimale.

Capitolo 1

Modelli di mercato finanziario

In questo capitolo desciveremo un modello generale di mercato finanziario a tempo discreto usando alcune proprieta' fondamentali della teoria dei processi stocastici ed in particolare delle martingale.
Per le varie definizioni ed i risultati presentati ed ulteriori approfondimenti rimandiamo a [EK 99].
Nel seguito considereremo sempre uno spazio di probabilita' filtrato $(\Omega,\mathcal{F}, P,(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ con le seguenti ipotesi semplificatrici:

- Ω finito

- $T = \{0, 1, \dots , N\}$ con N finito.

T rappresenta l'insieme dei tempi in cui é possibile effettuare compravendita (trading) di titoli (ad esempio T puó rappresentare N giornate borsistiche).Poiché lo spazio Ω é supposto finito risulterá che $\mathcal{F}$ coincide con l'insieme delle parti di Ω ed inoltre $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N$ =$\mathcal{F}$.
Supponiamo che il mercato sia costituito da k titoli azionari ed un titolo a rendimento certo (obbligazione o deposito bancario).
Siano $S^0, S^1, \dots , S^k$,$(k + 1)$ processi stocastici definiti sullo spazio di proba-

bilitá filtrato $(\Omega,\mathcal{F}, P,(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$, dove $S^j = \{S^j_t\}_{t\in T}$ é il processo di prezzo del titolo j-mo adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ (vedi Appendice A), cosi per ogni j risulta che S^j_t é $\mathcal{F}_t$-misurabile, cioe' i prezzi dei titoli fino al tempo t sono conosciuti sulla base dell'informazione di mercato al tempo t(incluso).
Assumiamo che tutti i processi di prezzo siano positivi e che il processo S^0 sia il processo di prezzo del titolo senza rischio(bond) con tasso di rendimento r e $S^1, \dots, S^k$ siano i processi di prezzo di k titoli rischiosi.Ovviamente in questo capitolo e nei successivi $k \geq 1$.

Definizione 1.1. *Un* **portafoglio** *al tempo t é un* **vettore aleatorio** *a va lori in $\mathbb{R}^{k+1}$:*

$$\gamma_t = (\gamma^0_t, \dots, \gamma^k_t)$$

Finanziariamente γ^j_t rappresenta la quantita del titolo j-mo che l'investitore possiede al tempo t.Solitamente la specifica di una famiglia di portafogli $(\gamma_t)_{t\in T}$ viene detta **strategia di gestione** *(o semplicemente strategia) e verrá indicata con γ.*

Definizione 1.2. **Il processo di valore** *(associato alla strategia γ) é definito da:*

$$V_0(\gamma) = \gamma_0 \cdot S_0 := x$$

$$V_t(\gamma) = \gamma_t \cdot S_t \quad t = 1, \dots, N \tag{1.1}$$

dove per ogni $t \in T$, $\quad \gamma_t \cdot S_t = \sum_{j=o}^{k} \gamma^j_t S^j_t$ denota il prodotto scalare.Quindi $V_t(\gamma)$ é semplicemente il capitale che l'investitore possiede al tempo t (o *analogamente il capitale investito nei titoli $S^0, \ldots, S^k$ al tempo t).In particolare x rappresenta* **il capitale iniziale** *che permette l'avvio della strategia di gestione.*

Per ogni funzione X definita su T poniamo $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$; ne consegue che per ogni $t = 1, \ldots, N$:

$$\Delta V_t = \gamma_t \cdot S_t - \gamma_{t-1} \cdot S_{t-1} = \gamma_t \cdot S_t - \gamma_t \cdot S_{t-1} + \gamma_t \cdot S_{t-1} - \gamma_{t-1} \cdot S_{t-1} =$$

$$= \gamma_t \cdot \Delta S_t + \Delta \gamma_t \cdot S_{t-1} \tag{1.2}$$

Particolare importanza rivestono quelle strategie di gestione per le quali il termine $\Delta \gamma_t \cdot S_{t-1}$ risulta nullo per ogni $t = 1, \ldots, N$, cioe' tali che:

$$\gamma_t \cdot S_{t-1} = \gamma_{t-1} \cdot S_{t-1} \quad \forall t = 1, \ldots, N$$

Definizione 1.3. *Una strategia di gestione γ é detta* **autofinanziante** *se risulta verificata la seguente condizione:*

$$\Delta V_t(\gamma) = \gamma_t \cdot \Delta S_t \tag{1.3}$$

La condizione precedente formalizza l'idea di una strategia di trading in cui l'acquisto di nuove quote di titoli é finanziata solamente dalla vendita di quote di titoli giá presenti nel portafoglio.Quindi non ci sono prelievi dal portafoglio né nuovi fondi immessi in esso.La variazione del valore $V_t(\gamma)$ é interamente dovuta a guadagni (o perdite) realizzate solo con gli investimenti stessi.

Notiamo anche che, dalla (1.3) segue che se la strategia γ é autofinanziante risulta:

$$V_t(\gamma) = V_{t-1}(\gamma) + \gamma_t \cdot \Delta S_t = V_0(\gamma) + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \cdot \Delta S_j \quad , \forall t = 1, \ldots, N \tag{1.4}$$

Definizione 1.4. *Una strategia autofinanziante, tale che* $V_t(\gamma) \geq 0$ *per ogni* t *si dice* **ammissibile***.*

Indichiamo con $\mathcal{S}_{ad}$ lo spazio delle strategie ammissibili:

$\mathcal{S}_{ad} := \{\gamma : \gamma \text{ autofinanziante e } V_t(\gamma) \geq 0 \quad \forall t \in T\}$

Prima di continuare a descrivere il modello di mercato facciamo alcune precisazioni.Da un punto di vista matematico la strategia di compravendita $\gamma = \{\gamma_t : t \in T\}$ deve essere un **processo aleatorio predicibile** (vedi Appendice A), nel senso che per ogni $t \leq N$ le variabili γ_{t+1} devono risultare $\mathcal{F}_t-$misurabili; infatti una volta che i prezzi dei titoli sono conosciuti al tempo t,l'investitore seleziona il suo portafoglio, ovvero fissa il valore delle componenti di γ_{t+1} e mantiene tale valore per tutto l'intervallo di tempo $[t, t+1)$.
Inoltre assumiamo che il mercato sia privo di frizioni (non ci sono costi di transazione) e che sia permessa la vendita allo scoperto (le variabili γ_t^j possono prendere valori negativi).

Definizione 1.5. *Il prezzo di processo* **scontato** *(o attualizzato) é definito come il vettore:*

$$\overline{S}_t = [\overline{S}_t^0, \ldots, \overline{S}_t^k]$$

con $\overline{S}_t = \frac{\mathrm{S_t}}{\mathrm{S_t^0}}$.
Il fattore $\beta_t = \frac{1}{\mathrm{S_t^0}}$ *é detto* **fattore di sconto** *e indica la somma di denaro da investire al tempo* 0 *in bonds per avere* 1 *unita' al tempo* t.

Tutte le definizioni e le considerazioni su dette sul processo di prezzo si riportano al processo di prezzo scontato, in particolare la condizione di autofinanziamento diventa:

$$\gamma_t \cdot \overline{S}_{t-1} = \gamma_{t-1} \cdot \overline{S}_{t-1} \quad , t = 1, \ldots, N$$

o equivalentemente:

$$\Delta \overline{V}_t(\gamma) = \gamma_t \cdot \Delta \overline{S}_t \quad , t = 1, \ldots, N$$

dove $\overline{X}_t = \beta_t X_t$ per ogni vettore $X_t \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Osservazione 1.1. *Se assumiamo per semplicita' che* $S_0^0 = 1$, *allora il fattore di sconto nel caso di un tasso di interesse* r *costante nel tempo sara' dato da* $\beta_t = \frac{1}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}}$ *e nel caso particolare in cui* $r = 0$ *il processo di prezzo scontato coincide con il processo di prezzo(*$\beta_t = 1 \quad \forall t$*).*

Osservazione 1.2. *Si noti che dato* V_0 *e* $(\gamma^1, \ldots, \gamma^k)$ *possiamo ricavare* γ^0 *dalla condizione di autofinanziamento; infatti, se assumiamo per semplicitá che* $S_t = \overline{S}_t, \quad \forall t \in T$ *(ovvero* $S_t^0 = 1, \forall t \in T$*),allora :*

$V_t(\gamma) = \gamma_t^0 + \gamma_t^1 S_t^1 + \ldots + \gamma_t^k S_t^k \qquad e$

$V_t(\gamma) = V_0 + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \cdot \Delta S_j$

allora:

$\gamma_t^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \cdot \Delta S_j - (\gamma_t^1 S_t^1 + \ldots + \gamma_t^k S_t^k) =$

$V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} (\gamma_j^1 \Delta S_j^1 + \ldots + \gamma_j^k \Delta S_j^K) - (\gamma_t^1 S_{t-1}^1 + \ldots + \gamma_{t-1}^k S_{t-1}^k)$

quindi l'investimento iniziale $V_0(\gamma)$ e il processo predicibile $(\gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^k)_{t \in T}$ determinano univocamente $(\gamma_t^0)_{t \in T}$.

Definizione 1.6. *Una* **strategia di arbitraggio** *é una strategia ammissibile tale che:*

(i) $V_0(\gamma) = 0$

(ii) $V_N(\gamma) \geq 0$ *con probabilitá uno e* $P(V_N(\gamma) > 0) > 0$

Quindi é un operazione finanziaria tale che se il capitale é inizialmente nullo si ha a scadenza con probabilitá positiva un guadagno e con probabilitá nulla una perdita.
Un modello di mercato per cui non esistono strategie di arbitraggio si dice **libero da arbitraggio**.

Definizione 1.7. *Una misura di probabilita' Q é detta una* **misura di martingala equivalente** *per il processo di prezzo S definito sullo spazio di probabilitá filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ se:*

(A): $\quad Q \sim P$ *(Q equivalente a P)*

(B): Il processo di prezzo scontato $\overline{S}$ *é una* $Q-$*martingala per la filtrazione* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$

Osserviamo che essendo Ω finito per ipotesi allora é rappresentabile come:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \tag{1.5}$$

con $P(\omega_i) \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, se n é la cardinalitá di Ω.
Pertanto la condizione (A) della definizione 1.7 equivale a dire che la probabilita'di misura Q ha gli stessi insiemi di misura nulla di P o anche se $i = 1, \ldots, N$ allora $P(\{\omega_i\}) > 0 \Leftrightarrow Q(\{\omega_i\}) > 0$ (e dunque $P(\{\omega_i\}) = 0 \Leftrightarrow Q(\{\omega_i\}) = 0$).
Diamo qui di seguito una definizione utile a semplificare il formalismo usato in questo capitolo.

Definizione 1.8. *Il* **processo di guadagno** *associato alla strategia* γ *é definito come:*

$$G_0(\gamma) = 0$$

e:

$$G_t(\gamma) = \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \cdot \Delta S_j \quad , t = 1, \ldots, N$$

Sotto l'ipotesi di strategia autofinanziante, il processo di valore associato alla strategia γ ha la seguente rappresentazione:

$$V_t(\gamma) = V_0(\gamma) + G_t(\gamma) \quad \forall t \in T$$

Osserviamo inoltre che se Ω ha cardinalitá n allora il processo di valore $\{V_t(\gamma)(\omega) : \omega \in \Omega\}$ e il processo di guadagno $\{G_t(\gamma)(\omega) : \omega \in \Omega\}$ associati ad una strategia generica γ di compravendita, ad ogni fissato $t \in T$, possono essere visti come vettori in $\mathbb{R}^n$.

Ora sia C il cono convesso (vedi Appendice B) formato da tutte le variabili aleatorie ϕ su $(\Omega, \mathcal{F})$ tali che $\phi(\omega) \geq 0$ e tali che $\exists i : \phi(\omega_i) > 0$, cioé :

$$C := \{\phi : \Omega \to \mathbb{R} : \phi(\omega) \geq 0, \exists i : \phi(\omega_i) > 0\}$$

Allora:

Lemma 1.1. *Se il mercato é libero da arbitraggio allora $G_N(\gamma)$ per ogni processo $\mathbb{R}^k$-predicibile γ non appartiene a C.*

Dimostrazione:

Naturalmente proprio per definizione di mercato libero da arbitraggio, per ogni strategia ammissibile γ, si ha che:

se $\quad V_0(\gamma) = 0 \quad$ allora $G_N(\gamma) \notin C$

Ora sia $\gamma = (\gamma^0, \ldots, \gamma^k)$ una strategia ammissibile generica, per l'osservazione 1.2. si ha che la strategia γ é univocamente determinata dal processo predicibile $\tilde{\gamma} = (\gamma^1, \ldots, \gamma^k)$ e da $V_0(\gamma)$.

Cosi dato un $\mathbb{R}^k$-processo predicibile $\tilde{\gamma}$ esiste un'unica strategia ammissibile $\gamma = (\gamma_0, \tilde{\gamma})$ tale che $V_0(\gamma) = 0$.

Quindi se per assurdo $G_N(\gamma) \in C$ si ha banalmente che $G_N(\tilde{\gamma}) \in C$ e quindi poiché:

$$V_N(\gamma) = V_0(\gamma) + G_N(\tilde{\gamma}) = G_N(\tilde{\gamma})$$

$V_N(\gamma)$ é non negativo e strettamente positivo con probabilitá positiva, cioé γ é una strategia di arbitraggio, contro l'ipotesi di mercato libero da arbitraggio.

Il primo risultato fondamentale di questo capitolo é il seguente:

Teorema 1.1. *Esiste almeno una misura di martingala equivalente Q se e solo se il modello di mercato é libero da arbitraggio.*

Dimostrazione:
Supponiamo che il processo di prezzo scontato $\overline{S}$ sia una martingala rispetto alla misura Q e assumiamo per semplicitá che $S_t^0 = 1\$ \quad, \forall t \in T$(vedi osservazione 1.1). Ne segue che, poiche' il processo di valore é dato da:

$$V_t(\gamma) = V_0 + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \cdot \Delta S_j$$

é, a meno di una costante, una trasformata di martingala (vedi Appendice A), quindi é esso stesso una martingala con valore iniziale V_0.
Quindi per le proprieta'delle martingale:

$$\mathbf{E}^Q(V_N(\gamma)) = \mathbf{E}^Q(V_0(\gamma)) = V_0(\gamma)$$

Se per assurdo γ é una strategia di arbitraggio, cioé se $V_0(\gamma) = 0 \quad$ e

$P(V_N(\gamma) > 0) > 0$, risulta $Q(V_N(\gamma) > 0) > 0$ (poiche' la misura Q é equivalente alla misura P) e ne segue che:

$$V_0(\gamma) = \mathbf{E}^Q(V_N(\gamma)) > 0$$

contro l'ipotesi che $V_0(\gamma) = 0$.
Quindi l'esistenza di una misura di martingala implica l'assenza di arbitraggio.
Viceversa si supponga che il modello di mercato finito sia libero da arbitraggio.Si vuole costruire una misura di martingala Q.
Sia :

$$L := \{G_N(\tilde{\gamma}) : \tilde{\gamma} = (\gamma^1, \dots, \gamma^k)\}$$

con $\tilde{\gamma}$ predicibile, allora L é un sottospazio lineare dello spazio vettoriale di tutte le funzioni su Ω a valori reali e $\mathcal{F}$-misurabili.
Per il lemma 1.1 si ha che $L \cap C = \phi$. Sia:

$$K := \{X \in C : \mathbf{E}^P(X) = 1\}$$

K é un compatto ed inoltre poiché $K \subset C$ si ha:

$(\cdot)$ $K \cap L = \emptyset$

$(\cdot)$ K é convesso

Per il teorema di separazione degli insiemi convessi (vedi Appendice B) esiste un fuzionale lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

(a) $\quad f(x) = 0 \quad \forall x \in L$

(b) $\quad f(x) > 0 \quad \forall x \in K$

Inoltre per il teorema di Riesz (vedi Appendice B) esiste un unico vettore $q \in \mathbb{R}^n$ tale che f ha la seguente rappresentazione:

$$f(x) = (x, q) = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sia $p_i := P(\{\omega_i\}) > 0$, allora posto $s_i = (0, \dots, 0, \frac{1}{p_i}, 0, \dots 0)$ al variare di $i = 1, \dots, n$ risulta $\mathbf{E}^P(s_i) = \frac{p_i}{p_i} = 1$, quindi $s_i \in K$ da cui segue che $f(s_i) = \frac{q_i}{p_i} > 0$, cioé $q_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$.
Sia:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i > 0 \quad , p^* = \frac{q}{\alpha}$$

allora risulta $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$.
Ne segue che il vettore p^* induce una misura di probabilitá P^* su $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ponendo $P^*(\{\omega_i\}) = p_i^* > 0$ cosi P^* é una misura equivalente a P.
Se:

$$g(x) = \frac{f(x)}{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

allora:

$$g(x) = (x, p^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ed inoltre da (a):

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in L.$$

Quindi:

$$\mathbf{E}^{P^*}(G_N(\tilde{\gamma})) = (G_N(\tilde{\gamma}), p^*) = 0$$

per ogni $\tilde{\gamma}$ processo predicibile.
Sia γ una strategia ammissibile generata da $\tilde{\gamma}$ e tale che $V_0(\gamma) = 0$ (vedi osservazione 1.2).Allora:

$$\mathbf{E}^{P^*}(V_N(\gamma)) = \mathbf{E}^{P^*}(G_N(\tilde{\gamma})) = 0$$

Poiché (sempre dall'osservazione 1.2) una tale strategia γ puó essere generata da ogni n-dimensionale processo predicibile, in particolare da:

$$(0, \dots, 0, \gamma^i, 0, \dots, 0)$$

dove γ^i é dato per $i \leq n$, allora segue che:

$$\mathbf{E}^{P^*}(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j^i \Delta S_j^i) = 0$$

per ogni processo limitato predicibile $\gamma^i, i = 1, \dots, N$.
Dal teorema $A.2.$ dell'Appendice A segue che P^* é una misura di martingala.

Questo teorema resta utile perche'molto spesso la ricerca di una misura di martingala é piu'conveniente che mostrare direttamente che non ci sono opportunita'di arbitraggio.

Definizione 1.9. *Un* **contingent claim** *di maturita' N é una qualsiasi variabile aleatoria non negativa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che X é $\mathcal{F}_N-$misurabile.*

Un esempio di contingent claim é il seguente:

$$X = max\{S_N - K, 0\}$$

dove K é un prefissato prezzo.Il contingent claim X cosi definito é noto come **opzione call europea con prezzo d'esercizio (o prezzo strike)** K **e scadenza** N.
In generale un contingent claim si dirá di tipo **europeo** se il pay off finale é una funzione soltanto del prezzo spot del bene sottostante alla maturitá (e non anche dei precedenti prezzi).

Definizione 1.10. .
(i): Il contingent claim X é detto essere **replicabile** *(o raggiungibile) se esiste una strategia ammissibile γ che lo replica, cioe' tale che:*

$$V_N(\gamma) = X$$

con probabilitá uno.

(ii): Il mercato si dice **completo** *se ogni contingent claim é replicabile.*

(iii): La strategia γ che replica il contingent claim é detta **strategia di copertura (hedging)**.

D'ora in poi manteniamo sempre l'ipotesi di modello di mercato finito libero da arbitraggio, quindi esiste almeno una misura di martingala equivalente Q tale che il processo di prezzo scontato é una martingala.
In questo modello di mercato affrontiamo il problema di valutare il **prezzo** $\pi(X)$ di un contingent claim X al tempo zero.Chiaramente, poiché $X \geq 0$,deve risultare $\pi(X) \geq 0$ ed inoltre per ragioni ovvie deve valere $\pi(X_1 + X_2) = \pi(X_1) + \pi(X_2)$.
L'idea fondamentale, dovuta a Black,Scholes e Merton, é che in un mercato completo tale prezzo $\pi(X)$ debba uguagliare il valore del capitale iniziale $V_0(\gamma)$ necessario ad inizializzare una strategia ammissibile γ che replichi esattamente X al tempo N.
Poiche' X é replicabile se $V_N(\gamma) = X$ o equivalentemente se $\overline{V}_N(\gamma) = \beta_N X$, segue che se Q é una misura di martingala si avra' che $\overline{V}_t(\gamma)$, a meno di una costante($V_0(\gamma)$), é una trasformata di martingala e dunque una Q-martingala.Allora, $\forall t \in T$:

$$\mathbf{E}^Q(\overline{V}_N(\gamma)|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}^Q(\beta_N X|\mathcal{F}_t) = \overline{V}_t(\gamma)$$

e quindi:

$$V_t(\gamma) = \beta_t^{-1}\mathbf{E}^Q(\beta_N X|\mathcal{F}_t)$$

In particolare:

$$\pi(X) := V_0(\gamma) = \mathbf{E}^Q(\beta_N X|\mathcal{F}_0) = \mathbf{E}^Q(\beta_N X) \qquad (1.6)$$

poiché $\mathcal{F}_0$ é la $\sigma-$algebra banale (contiene solo gli insiemi di $P-$misura zero e uno).
Poiché si ha che ad un tempo $t \in T$ generico il prezzo $\pi(X,t)$ del contingent claim deve essere uguale a $V_t(\gamma)$ (dove γ é la strategia di copertura), allora :

$$\pi(X,t) = \beta_t^{-1}\mathbf{E}^Q(\beta_N X|F_t) \quad \forall t \in T$$

Differenti scelte della misura di probabilita' Q danno in generale luogo a differenti valutazioni del processo $(\pi(X,t))_{t\in T}$ di prezzo del contingent claim.Tale molteplicitá di valutazioni scompare peró se la misura Q é opportunamente scelta:

Lemma 1.2. *Supponiamo che X sia un contingent claim in un modello di mercato libero da arbitraggio e supponiamo che X sia replicabile.Allora tutte le scelte di Q misura di martingala equivalente e differenti scelte di strategie di copertura producono lo stesso processo di prezzo $(\pi(X,t))_{t\in T}$ del contingent claim.*

Dimostrazione:
Poiché per ipotesi il mercato é libero da arbitraggio, per il teorema 1.1 esiste almeno una misura di martingala Q.Si ha anche che X é un contingent claim replicabile, quindi esiste γ strategia di copertura tale che:

$$V_N(\gamma) = X$$

ed inoltre:

$$\pi(X,t) = V_t(\gamma) \quad \forall t \in T$$

Allora:

$$\frac{\pi(X,t)}{S_0(t)} = \beta_N V_t(\gamma) \quad \forall t \in T$$

Ma se Q é una misura di martingala il processo di prezzo é una Q-martingala e cosi anche il processo di valore $V_t(\gamma)$.Quindi $\frac{\pi(X,t)}{S_0(t)}$ é una Q-martingala. Poiché:

$$\pi(X,t) = \beta_t^{-1}\mathbf{E}^Q(\beta_N X|F_t) \quad \forall t \in T$$

segue che:

$$V_t(\gamma) = \beta_t^{-1}\mathbf{E}^Q(\beta_N X|F_t)$$

per ogni scelta di γ strategia di copertura e Q misura di martingala.Questo conclude la dimostrazione del lemma.

Ora esponiamo il secondo risultato fondamentale di questo capitolo che caratterizza i modelli di mercato completo nella classe dei mercati liberi da arbitraggio.

Teorema 1.2. *Un modello di mercato libero da arbitraggio é completo se e solo se esiste un'unica misura di martingala.*

Dimostrazione:
Supponiamo che il mercato sia libero da arbitraggio e completo.Per assurdo

supponiamo che esistano due misure di martingala Q e $\tilde{Q}$, allora:

(i): $\quad Q \sim P \sim \tilde{Q}$
(ii): Il processo di prezzo scontato é sia una Q-martingala che una $\tilde{Q}$-martingala

Allora da (ii) il processo di valore scontato $\overline{V}(\gamma)$ é anche esso una martingala sia rispetto a Q che a $\tilde{Q}$; ne segue:

$$\mathbf{E}^{Q}(\beta_N X) = \mathbf{E}^{\tilde{Q}}(\beta_N X) = V_0(\gamma)$$

in particolare:

$$\mathbf{E}^{Q}(X) = \mathbf{E}^{\tilde{Q}}(X)$$

per ogni X variabile aleatoria non negativa $\mathcal{F}_t$-misurabile, quindi anche per $X = \chi_A$ dove A é un insieme arbitrario in $\mathcal{F}$.Allora:

$$Q(A) = \tilde{Q}(A) \Longrightarrow Q \equiv \tilde{Q}.$$

Viceversa supponiamo che il mercato sia libero da arbitraggio ma non completo.Allora esiste un contingent claim X che non puo'essere replicato da nessuna strategia autofinanziante $\gamma = (\gamma^0, \ldots, \gamma^k)$.
Supponiamo, senza perditá di generalitá, che $\beta_t = 1 \forall t \in T$, cioé che il processo di prezzo e il processo di prezzo scontato coincidano. Sia:

$L := \{c + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \Delta S_j : \gamma \text{ predicibile, } c \in \mathbb{R}\}$

allora L é un sottospazio lineare dello spazio $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ vettoriale di tutte le variabili aleatorie su Ω e poiché Ω é finito L é chiuso.
Supponiamo che $\beta_N X \in L$, cioé $\beta_N X = c + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \Delta S_j$ per qualche processo predevibile γ in $\mathbb{R}^k$, allora X é replicabile dalla strategia γ con valore iniziale $\gamma_0 = c$ contro l'ipotesi di non replicabilitá di X.
Quindi $\beta_N X$ non appartiene ad L, cosi L é un sottospazio proprio di $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ ed essendo chiuso ha un complemento ortogonale non vuoto $L^{\perp}$.
Allora per ogni Q misura di martingala (la cui esistenza é assicurata dall'ipotesi di mercato libero da arbitraggio) esiste una variabile aleatoria $Z \in L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ tale che:

$$\mathbf{E}^Q(YZ) = 0 \quad \forall Y \in L$$

Poiché ogni funzione reale $\mathcal{F}$-misurabile su Ω prende solo un numero finito di valori distinti, $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ é dimensionalmente finito e quindi Z é limitata.
Se $\gamma^i = 0 \quad \forall i \geq 0$ allora $Y = 1$ appartiene ad L ne segue che $\mathbf{E}^Q(Z) = 0$.
Definiamo una $\tilde{Q} \sim Q$ tale che:

$\frac{\tilde{Q}(\omega)}{Q(\omega)} = R(\omega) \qquad$ dove $R(\omega) = 1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty}$

con $\| Z \|_\infty = max\{| Z(\omega) |: \omega \in \Omega\}$. Allora $\tilde{Q}$ é una misura di probabilitá, infatti:

- $\tilde{Q}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

- $\tilde{Q}(\Omega) = \mathbf{E}^Q(R) = 1$ poiché $\mathbf{E}^Q(Z) = 0$

Tuttavia essendo Q una misura di martingala si ha:

$$\mathbf{E}^{Q}(\gamma_j \overline{\Delta S_j}) = 0$$

Ed inoltre $\forall Y \in L, Y = c + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \Delta S_j$ si ha:

$\mathbf{E}^{\tilde{Q}}(Y) = \mathbf{E}^{Q}(RY) = \mathbf{E}^{Q}(Y) + \frac{1}{2\|Z\|_\infty}\mathbf{E}^{Q}(YZ) = c$

ed in particolare se Y é tale da avere $c = 0$ segue che:

$$\mathbf{E}^{\tilde{Q}}(Y) = 0$$

Cosi $\forall \gamma = (\gamma_t^j : t = 1, \dots, N, j = 1, \dots, k)$ predicibile si ha:

$$\mathbf{E}^{\tilde{Q}}(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \overline{\Delta S_j}) = 0$$

Allora usando $\gamma = (0, \dots, \gamma^j, 0, \dots, 0)$ successivamente per $j = 1, \dots, k$ segue che ΔS_j é una $\tilde{Q}$-martingala e quindi S é una $\tilde{Q}$-martingala (vedi Appendice A).
Quindi $\tilde{Q}$ é una misura di martingala distinta da Q, cioé in un mercato incompleto la misura di martingala non é unica.Questo completa la dimostrazione del teorema.

Nota: Per la loro centralitá i teoremi 1.1 e 1.2, provati in precedenza, prendono il nome di **Primo e Secondo teorema fondamentale dell'Asset Pricing** nei mercati completi ([SHY 99]).

Capitolo 2

Mercati incompleti (parte prima): Metodi di Martingala

E' un fatto che a causa di diversi fattori (tra cui la presenza di costi per le transazioni)i mercati finanziari risultino essere incompleti, nel senso che, in generale, non é sempre possibile operare una replica perfetta di strumenti finanziari quali i contingent claim.
Nel capitolo 1 abbiamo visto sotto quali condizioni un mercato libero da arbitraggio risulta completo: per il teorema 1.2 ció equivale all'esistenza ed unicitá di una misura di martingala equivalente.
Pertanto da un punto di vista matematico la situazione di non completezza (in assenza di arbitraggio) equivale al fatto che esiste piú di una misura di martingala equivalente.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, P)$ lo spazio di probabilitá filtrato con $T = \{0, 1, \dots, N\}$ su cui, come nel precedente capitolo, é definito il processo di prezzo ed indichiamo con $\mathcal{M}_e$ l'insieme della misure di martingala equivalenti.Si ha:

Definizione 2.1. *Un modello di mercato libero da arbitraggio si dice* **incompleto** *se risulta* $\mid \mathcal{M}_e \mid > 1$.

Si ricorda che l'esistenza di almeno una misura di martingala é assicurata dall'ipotesi di mercato libero da arbitraggio (vedi teorema 1.1.).

Osservazione 2.1. *Osserviamo che l'insieme $\mathcal{M}_e$ é un insieme convesso (vedi Appendice B).Infatti se Q_1 e Q_2 sono due misure di martingala equivalenti, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_e, \alpha \in (0,1)$, allora la combinazione lineare $\alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2 \in \mathcal{M}_e$.*
Quindi l'esistenza di due o piú misure di martingala equivalenti implica l'esistenza di infinite misure di martingala equivalenti.Ció caratterizza un modello di mercato incompleto come un modello in cui la cardinalitá dell'insieme $\mathcal{M}_e$ é infinita.

Osservazione 2.2. *Si noti che l'insieme $\mathcal{M}_e$ delle misure di martingala equivalenti dipende naturalmente dalla misura di probabilitá P originaria, cioé risulta: $\mathcal{M}_e = \mathcal{M}_e(P)$.*

Dire che $\mid \mathcal{M}_e \mid > 1$ implica che non ogni contingent claim é replicabile, cioé non esiste necessariamente per ogni contingent claim una strategia autofinanziante che lo replichi esattamente alla scadenza.
Nel precedente capitolo si é mostrato che (vedi (1.6)) in un mercato completo la posizione:

$$\pi(X) = V_0(\gamma) = \mathbf{E}^Q(\beta_N X) \qquad (1.6)$$

dove X é un generico contingent claim, γ é una strategia di replica ed $\mathcal{M}_e = \{Q\}$, dá luogo ad un unico prezzo del claim che non consente arbitraggi.
In un mercato incompleto le condizioni su cui si poggia la (1.6) vengono meno e si pone naturalmente la domanda di quanto debba essere il prezzo di un

contingent claim.
A scopo esemplificativo consideriamo un claim non replicabile (per ipotesi esiste) ed un partecipante al mercato che intenda assegnargli "un prezzo di non arbitraggio" mediante la formula di valutazione (1.6).In tal caso dovrá selezionare una delle infinite $Q \in \mathcal{M}_e$ sulla base di un qualche criterio soggettivo (una possibilitá é far uso in questo contesto delle **funzioni di utilitá** , vedi [EK 99]).
Dunque differenti partecipanti al mercato aventi aspettative e/o preferenze non omogenee, possono pervenire a differenti valutazioni del claim.
A parte ció resta il fatto che, comunque, il prezzo praticato, una volta reinvestito come capitale sul mercato, potrá non risultare sufficiente a generare la copertura del claim a scadenza: l'investitore deve farsi carico di un certo rischio.
In questo capitolo si pone l'accento proprio su questo ultimo fatto e si cerca una strategia ottimale di replica che "approssimi" il pay off di un generico contingent claim alla scadenza nella situazione reale di mercato incompleto.
Naturalmente la natura di questa strategia ottimale dipende strettamente da come si misura alla scadenza la discrepanza tra il pay off e la sua approssimazione.
Come nel capitolo 1 il processo di prezzo é rappresentato da $k+1$ processi stocastici $S^0, \ldots, S^k$ definiti sullo spazio di probabilitá filtrato, dove $S^j = (S_t^j)_{t \in T}$ é il processo del titolo j-mo adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.Il titolo S^0 nel seguito non gioca alcun ruolo specifico e puó essere pensato sia come bond che come ulteriore titolo rischioso.
Inoltre in questo capitolo,differentemente dal capitolo 1, dove per convenienza nella formulazione matematica dei risultati lo spazio Ω é stato preso finito, possiamo dispensarci da tale restrizione e considerare Ω **arbitrario**.
Indichiamo con $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ il pay-off finale $\mathcal{F}_N$ -misurabile di un contingent claim generico. In tutto questo capitolo (compresi gli esempi) faremo la seguente importante assunzione:

(M): *Il processo di prezzo sia una martingala rispetto alla misura originale P ed inoltre F e $S_t^i \in L^2(\Omega, P), \forall t \in T$ e $\forall i = 0, \dots, k$.*

Inoltre supponiamo che le strategie permesse siano soltanto quelle appartenenti al seguente spazio:

$$\tilde{\mathcal{S}}_{ad} := \{\gamma : \gamma \text{ autofinanziante e : } \quad \mathbf{E}[(V_N(\gamma))^2] < +\infty\}$$

Nell'approccio che segue si sceglie di misurare la "qualitá" di replica con:

$$J_0(\gamma, x) := \mathbf{E}((V_N(\gamma) - F)^2 | V_0(\gamma) = x) = \mathbf{E}_x((V_N(\gamma) - F)^2) \tag{2.1}$$

dove l'aspettazione é presa rispetto alla misura di probabilitá P (che rappresenta la distribuzione del processo di prezzo), $V_t(\gamma)$ indica il processo di valore associato alla strategia $\gamma \in \tilde{\mathcal{S}}_{ad}$ all'istante t e x é il capitale iniziale.
Il problema di ottimizzazione si formalizza nella seguente maniera:

$$\min_{\{\gamma, x\}} J_0(\gamma, x) \tag{2.2}$$

Faremo vedere che sotto le assunzioni fatte il problema di ottimizzazione (2.2) ammette soluzione.Inoltre si riescono a trovare formule esplicite per la strategia ottimale γ^* e per il capitale iniziale x^* che minimizzano (2.1), cioé tali che:

$$J_0(\gamma^*, x^*) = \min_{\{\gamma, x\}} J_0(\gamma, x)$$

Il risultato é il seguente (si veda [SHY 99], pag. 518 e seguenti):

Teorema 2.1. *Si supponga che il processo di prezzo verifichi l'ipotesi* **(M)** *fatta ad inizio capitolo.*
Allora la strategia di copertura ottimale per il problema (2.2) *é data da :*

$$\gamma_t^{*^i} = \frac{\mathbf{E}(F \cdot \Delta S_t^i | \mathcal{F}_{t-1})}{\mathbf{E}((\Delta S_t^i)^2 | \mathcal{F}_{t-1})} \quad , t \in T \quad , i = 0, \dots , k \tag{2.3}$$

il capitale iniziale:

$$x^* = \mathbf{E}(F) \tag{2.4}$$

ed inoltre si ha:

$$J_0(\gamma^*, x^*) = \mathbf{E}(F - (x^* + (\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=0}^{k} \gamma_{j^*}^i \Delta S_j^i)))^2 \tag{2.5}$$

Dimostrazione:
Dato il processo predicibile $\gamma = (\gamma^0, \dots , \gamma^k)$, si ha che il processo di valore associato alla strategia autofinanziante γ é dato da:

$$V_t(\gamma) = x + \sum_{j=1}^{t} \gamma_j \cdot \Delta S_j =$$

$$= x + \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=0}^{k} \gamma_j^i \Delta S_j^i, \quad \forall t \in T$$

con capitale iniziale x.

Per ipotesi il processo di prezzo é una P-martingala e poiché il processo di valore $V_t(\gamma)$ é una trasformata di martingala (a meno della costante x) é anche esso una P-martingala, cioé si ha:

$$\mathbf{E}(V_N(\gamma)) = V_0(\gamma) = x$$

Per ogni $\xi \in L^2(\Omega, P)$ vale l'identitá:

$$\mathbf{E}(\xi^2) = (\mathbf{E}(\xi))^2 + \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2$$

e quindi per $\xi = V_N(\gamma) - F$ si ottiene:

$$J_N(\gamma, x) = (\mathbf{E}(V_N(\gamma) - F))^2 + \mathbf{E}[V_N(\gamma) - F - \mathbf{E}(V_N(\gamma) - F)]^2 =$$

$$= (x - \mathbf{E}(F))^2 + \mathbf{E}[(V_N(\gamma) - x) - (F - \mathbf{E}(F))]^2 \tag{2.6}$$

Per il momento si supponga che valga la proprietá seguente:

(i): per ogni coppia (γ, x) che verifica l'ipotesi **(M)** fatta e tale che $\mathbf{E}(V_N(\gamma))^2 < +\infty$, esiste una coppia (γ^*, x) tale che:

$$J_0(\gamma, x) \geq J_0(\gamma^*, x)$$

ed inoltre $V_N(\gamma^*) - x$ sia indipendente da x.

Allora sotto l'ipotesi (i), da (2.6) segue che:

$$\inf_x(\inf_\gamma J_0(\gamma, x)) = \inf_x J_0(\gamma^*, x) = \inf_x\{(x-\mathbf{E}(F))^2+\mathbf{E}[(V_N(\gamma)-x)-(F-\mathbf{E}(F))]^2\}$$

con $\mathbf{E}[(V_N(\gamma) - x) - (F - \mathbf{E}(F))]^2$ indipendente da x.
Da cui:

$$x^* = \mathbf{E}(F)$$

Per $i = 0, \dots, k$ poniamo:

$$\gamma_t^{*^i} := \frac{\mathbf{E}(F\Delta S_t^i|\mathcal{F}_{t-1})}{\mathbf{E}((\Delta S_t^i)^2|\mathcal{F}_{t-1})}$$

(ponendo $\frac{0}{0} = 0$).Faremo vedere che tale strategia γ^* é quella per la quale (i) viene verificata.
Si consideri il processo $L^* = (L_t^*)_{t\in T}$ definito come:

$$L_t^* := \mathbf{E}(F - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^* \cdot \Delta S_j|\mathcal{F}_t) - x$$

Dal fatto che $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ e dalle proprietá dell'aspettazione condizionata segue che L_t^* é una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.
Dalla definizione di L_N^* segue che F ha la seguente decomposizione:

$$F = x + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^* \cdot \Delta S_j + L_N^* \qquad (2.7)$$

(nella teoria generale delle martingale a quadrato sommabile questa decomposizione viene detta **decomposizione di Kunita Watanable**).
Usando la definizione di $\gamma_t^{*^i}$ e il fatto che sia $(L_t^*)_{t\in T}$ che $(S_t)_{t\in T}$ sono martingale, si verifica direttamente la seguente proprietá di ortogonalitá:

$$\mathbf{E}(\Delta L_t^*(\gamma_t \cdot \Delta S_t)|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \tag{2.8}$$

Da (2.7) e da (2.8) otteniamo che per ogni coppia (γ, x) :

$$J_0(\gamma, x) = \mathbf{E}(F - (x + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot \Delta S_j))^2 =$$

$$= \mathbf{E}(\sum_{j=1}^{N}(\gamma_j^* - \gamma_j) \cdot \Delta S_j + L_N^*)^2 =$$

$$= \mathbf{E}(\sum_{j=1}^{N}(\gamma_j^* - \gamma_j) \cdot \Delta S_j)^2 + \mathbf{E}(L_N^*)^2 \geq \mathbf{E}(L_N^*)^2 =$$

$$= \mathbf{E}(F_N - (x + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^* \cdot \Delta S_j))^2 =$$

$$= J_0(\gamma^*, x) \geq J_0(\gamma^*, x^*).$$

Ed inoltre la prima disuguaglianza é una uguaglianza per $\gamma = \gamma^*$. Cosi la dimostrazione del teorema é conclusa.

Diamo nel seguito un esempio che permette di visualizzare concretamente il problema di ottimizzazione proposto ed il teorema precedentemente esposto.
Si consideri un mercato (B, S), mercato finanziario formato solamente da un bond e un' azione e si supponga che $N = 1$ (modello di mercato uniperiodale).Denotiamo con $S = (S_0, S_1)$ il processo di prezzo dell'azione e con $B = (B_0, B_1)$ il processo di prezzo del bond.Per semplicitá supponiamo che:

-il tasso di rendimento r del bond sia nullo e che $B_0 = 1$ (dunque $B_1 = 1$)

-$S_0 = 1$

Inoltre si consideri un modello dinamico "trinomiale" per l'evoluzione del prezzo, cioe' sia:

$$S_1 = (1 + \rho)S_0$$

con $\rho \in \{\rho_+, \rho_0, \rho_-\}$,$\rho_- < \rho_0 < \rho_+$, tale che:

$$Prob(S_1 = (1 + \rho_+)S_0) = P(S_1 = (1 + \rho_+)S_0) = p_1$$

$$P(S_1 = (1 + \rho_0)S_0) = p_2$$

$$P(S_1 = (1 + \rho_-)S_0) = p_3$$

con $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$ e $0 \leq p_i \leq 1$ per ogni $i = 1, 2, 3$, dove $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ é la probabilita' che si assegna ai diversi scenari di prezzo.Per semplicitá computazionale fissiamo per ρ i seguenti valori numerici:

$$\rho_+ = \frac{1}{2} \quad , \rho_0 = 0 \quad , \rho_- = -\frac{1}{2}$$

Poiché $S_0 = 1$ risulta:

$$S_1 = (1 + \rho) \quad \Rightarrow \quad S_1 \in \{\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$$

Vediamo a cosa corrisponde l'insieme $\mathcal{M}_e$ delle misure di martingala equivalenti nello spazio tridimensionale (p_1, p_2, p_3).
Se $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ é misura di probabiliá, allora :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad , p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Nello spazio (p_1, p_2, p_3) le precedenti relazioni descrivono un piano "triangolare" T con vertici nei punti $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$.
Affinché $\underline{p}$ sia misura di martingala equivalente si deve avere che il processo di prezzo scontato,che nel nostro caso coincide con il processo di prezzo,sia una martingala rispetto alla misura di probabilitá P,cioé:

$$\mathbf{E}^P(S_1) = S_0$$

e quindi per le ipotesi fatte si deve avere:

$$\mathbf{E}^P(1 + \rho) = 1 \quad \Rightarrow \mathbf{E}^P(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 - \frac{1}{2} \cdot_3 = 0 \quad \Rightarrow p_1 - p_3 = 0$$

Allora $\mathcal{M}_e$ (o meglio la sua immagine nello spazio (p_1, p_2, p_3)) é descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 - p_3 = 0 \\ p_i > 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

quindi $\mathcal{M}_e$ é un segmento che giace nel triangolo T, esclusi i punti estremi $p^0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ e $p^1 = (0, 1, 0)$.
Si noti che si é imposta l'ulteriore condizione:

$$p_i > 0 \quad , i = 1, 2, 3$$

poiché se non é verificata risulta $\mathcal{M}_e(\underline{p}) = \emptyset$.Infatti le misure di probabilitá p^0 e p^1, punti estremi del segmento, sono le uniche misure di martingala con $p_i = 0$ per qualche i, quindi sono misure di martingala ma non sono equivalenti.
Ad esempio le probabilitá equivalenti al punto $p^1 = (0, 0, 1)$ sono della forma $(0, 0, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, ma nessuna di esse é di martingala , cioé $\mathcal{M}_e(p^1) = \{p^1\}$.
Notiamo inoltre che prese due misure di probabilitá generiche $\underline{p}, \underline{\tilde{p}}$ appartenenti all'interno della regione triangolare T riesce:

$$\mathcal{M}_e(\underline{p}) = \mathcal{M}_e(\underline{\tilde{p}}) = \mathcal{M}_e$$

cioé, ricordando l'osservazione 3.2 in questo caso particolare risulta che l'insieme $\mathcal{M}_e$ non dipende dalla misura di probabilitá scelta.
Si ponga $\alpha = p_1 = p_3$ da cui $p_3 = 1 - 2\alpha$, allora imponendo che $p_3 > 0$ riesce che per ogni scelta di $\underline{p}$ tale che:

$$\underline{p} = (\alpha, 1-2\alpha, \alpha) \quad , \alpha \in (0, \frac{1}{2})$$

$\underline{p}$ é una misura di martingala equivalente.
Perció $\mathcal{M}_e$, in accordo con quanto notato in precedenza (osservazione 3.1), é un insieme convesso (segmento), il che prova che questo modello di mercato é incompleto.
L'ipotesi **(M)** pertanto é verificata se e solamente se la misura $\underline{p}$ indotta da P sullo spazio degli stati di S_1 é del tipo $(\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$ per qualche $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.
Ora si consideri il seguente contingent claim:

$$F(S_1) := \max\{S_1 - 1, 0\} = \max\{\rho, 0\}.$$

Il contingent claim F é una opzione call con prezzo strike $K = 1$ e maturitá $N = 1$.
Quindi si consideri il seguente problema:

$$\inf_{(x,\gamma)} J_0(x, \gamma) = \inf_{(x,\gamma)} \mathbf{E}^P[(V_1(\gamma) - F(S_1))^2].$$

con P tale che $\underline{p} = (\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$.
Sia $\gamma_1 = (b_1, \theta_1)$ il portafoglio al tempo $N = 1$,con b_1 e θ_1 le quote, rispettivamente, del bond e del titolo rischioso.
Il valore del portafoglio alla scadenza, poiché $B_1 = B_0 = 1$, é dato da:

$$V_1(\gamma) = V_1(\theta) = x + \theta_1(S_1 - S_0) = x + \theta_1 \Delta S_1.$$

Perció:

$$J_0(x, \theta) = \mathbf{E}^P[(x + \theta_1 \Delta S_1 - max\{\rho, 0\})^2]$$

Sviluppando il quadrato banalmente si vede che $J_0(x, \theta)$ cosi definita é una funzione convessa sia in x che in θ_1, quindi condizione necessaria e sufficiente affinché (x^*, θ_1^*) sia punto di minimo per $J_0(x, \theta)$ é che:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_0(x,\theta)}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial J_0(x,\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \end{cases}$$

da cui le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x - \mathbf{E}^P[F(S_1)] + \theta_1 \mathbf{E}^P[\Delta S_1] = 0 \\ \\ \theta_1 - \frac{\mathbf{E}^P[F(S_1)\Delta s_1]}{\mathbf{E}^P[\Delta S_1^2]} + x\mathbf{E}^{\underline{p}}[\Delta S_1] = 0 \end{cases}$$

Poiché P, ovvero $\underline{p}$, é misura di martingala equivalente risulta che $\mathbf{E}^P[\Delta S_1] = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0$, quindi:

$$\theta_1^* = \frac{\mathbf{E}^P[F(S_1)\Delta S_1]}{\mathbf{E}^P[\Delta S_1^2]} = \frac{\frac{\alpha}{4}}{\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}} = \frac{\alpha}{4}\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

e:

$$x^* = \mathbf{E}^P[F(S_1)] = \frac{\alpha}{2}$$

Andando a sostituire questi valori riesce:

$$J_0(x^*, \theta_1^*) = \mathbf{E}^P[(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\Delta S_1}{2} - \max\{\rho, 0\})^2] = \mathbf{E}^P[\tfrac{\alpha^2}{4} + \tfrac{\Delta S_1^2}{4} + (\max\{\rho, 0\})^2 +$$

$$+ \tfrac{\alpha \Delta S_1}{2} - \alpha \max\{\rho, 0\} - \max\{\rho, 0\}\Delta S_1] = \tfrac{\alpha^2}{4} + \tfrac{\alpha}{8} - \tfrac{\alpha^2}{2} - \tfrac{\alpha}{4} = -\tfrac{\alpha^2}{4} + \tfrac{3}{8}\alpha$$

e poiché $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ si ha che $J_0(x^*, \theta_1^*) > 0$.

Da cui si ricava il rischio minimo definito come:

$$\epsilon^* := \sqrt{-\frac{\alpha^2}{4} + \frac{3}{8}\alpha}.$$

Sia $F = F(S_1) = \{F_1, F_2, F_3\}$ un generico contingent claim.Vediamo quale condizione deve verificare affinché sia un contingent claim replicabile.
Per definizione F é un contingent claim replicabile se esiste una strategia θ di replica tale che:

$$V_1(\theta) = F(S_1)$$

con probabilitá uno, cioé in ogni scenario possibile il valore del portafoglio deve coincidere con il pay off del contingent claim, quindi:

$$\begin{cases} x + \frac{\theta_1}{2} = F_1 \\ \\ x = F_2 \\ \\ x - \frac{\theta_1}{2} = F_3 \end{cases} \tag{2.9}$$

Considerando x e θ come parametri in $\mathbb{R}$ l'equazioni (2.9) sono le equazioni parametriche di un piano π nello spazio tridimensionale (F_1, F_2, F_3) di tutti i contingent claim.Naturalmente, proprio per definizione di contingent claim, si deve considerare la parte di piano π contenuta nella parte di spazio tale che $F_i \geq 0 \quad , i = 1, 2, 3$ e questa regione conterrá tutti i contingent claim replicabili.
Dalle (2.9) si ricava anche la seguente equazione lineare:

$$F_1 - 2F_2 + F_3 = 0 \tag{2.10}$$

che rappresenta l'equazione cartesiana del piano π.
Il prezzo di un contingent claim replicabile ha un valore iniziale indipendente dalla misura di probabilitá $\underline{p} \in \mathcal{M}$ (Lemma 1.2), infatti:

$$F(S_0) = x^* = \mathbf{E}^{\underline{p}}[F(S_1)] = F_1\alpha + F_2(1-2\alpha) + F_3\alpha = (F_1 - 2F_2 + F_3)\alpha + F_2 = F_2$$

poiché essendo F replicabile verifica la (2.10).
Se $G = (G_1, G_2, G_3)$ é un contingent claim non replicabile, la cui esistenza é assicurata dall'incompletezza del mercato, cerchiamo ora il contingent claim replicabile con il prezzo piú "vicino" a quello di G nello spazio $(\mathbb{R}^3, \delta)$, in cui δ é definita come:

$$\delta^2(a, b) = \sum_{i=1}^{3} \nu_i (a_i - b_i)^2 \quad , a, b \in \mathbb{R}^3$$

dove:

$$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \underline{p} = (\alpha, 1 - 2\alpha, \alpha) \quad , \alpha \in (0, \frac{1}{2})$$

Si verifica facilmente che δ cosi definita é una distanza in $\mathbb{R}^3$. Quindi si cerca il contingent claim replicabile $\tilde{G}$ con distanza δ minima da G, cioé il contingent claim $\tilde{G} \in \pi$ tale che:

$$\delta^2(G, \tilde{G}) = \inf_{H \in \pi} \delta^2(G, H) \tag{2.11}$$

Per fare ció basta calcolare la proiezione ortogonale $\tilde{G}$ di G sul piano π dei contingent claim replicabili; infatti proprio per come é costruita la proiezione ortogonale, $\tilde{G}$ sará il contingent claim replicabile con distanza minima da G.

Se si considerano le equazioni parametriche (2.9) di π si vede che i vettori (contingent claim):

$$a_1 = (1,1,1) \quad , a_2 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$$

generano il piano π.
Poiché $\tilde{G}$ deve appartenere al piano π sará del tipo:

$$\tilde{G} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = (\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2, \beta_1, \beta_1 - \frac{1}{2})$$

Per trovare i valori di β_1 e β_2 notiamo che $(G - \tilde{G})$ deve essere ortogonale a π, quindi β_1 e β_2 devono essere soluzioni di:

$$< G - (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2), a_i >= 0 \quad i = 1, 2$$

dove $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ si ha:

$$< x, y >:= \sum_{i=1}^{3} \nu_i x_i y_i \quad , (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \underline{p} = (\alpha, 1 - 2\alpha, \alpha)$$

Svolgendo si ottengono le seguenti relazioni per β_1 e β_2:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{G_1 - G_3}{2} = \beta G_1 + (1 - 2\beta) G_2 + \beta G_3 \\ \\ \beta_2 = G_1 - G_3 \end{cases}$$

da cui:

$$\tilde{G} = (\mathbf{E}^{\underline{p}}[G] + \frac{G_1 - G_3}{2}, \mathbf{E}^{\underline{p}}[G], \mathbf{E}^{\underline{p}}[G] - \frac{G_1 - G_3}{2})$$

ed essendo $\tilde{G}$ replicabile avrá un prezzo iniziale pari a:

$$\tilde{G}(S_0) = \tilde{G}_2 = \mathbf{E}^{\underline{p}}[G]$$

Notiamo che questa é l'interpretazione geometrica del problema di ottimizzazione :

$$\inf_{(x,\theta)} J_0(x,\theta) = \inf_{(x,\theta)} \mathbf{E}^{\underline{p}}[(V_1(\theta) - G)^2].$$

con $\underline{p} \in \mathcal{M}$.Infatti per come é stata definita la distanza δ si ha:

$$\inf_{H \in \pi} \delta^2(G,H) = \inf_{H \in \pi} \mathbf{E}^{\underline{p}}[(H - G)^2]$$

ma se $H \in \pi$ allora esiste una strategia θ di copertura tale che $V_1(\theta) = H$ con probabilitá uno, il che equivale a dire che:

$$\inf_{H \in \pi} \mathbf{E}^{\underline{p}}[(H - G)^2] = \inf_{(x,\theta)} \mathbf{E}^{\underline{p}}[(V_1(\theta) - G)^2]$$

Infatti se consideriamo $G = F := \max\{\rho, 0\}$ allora:

$$\tilde{F} = (\mathbf{E}^{\underline{p}}[F] + \frac{F_1 - F_3}{2}, \mathbf{E}^{\underline{p}}[F], \mathbf{E}^{\underline{p}}[F] - \frac{F_1 - F_3}{2})$$

Il contingent claim $\tilde{F}$ idividua univocamente il capitale iniziale ottimo x^* e la strategia ottima θ^* dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x + \frac{\theta_1}{2} = \tilde{F}_1 \\ \\ x = \tilde{F}_2 \\ \\ x - \frac{\theta_1}{2} = \tilde{F}_3 \end{cases}$$

da cui si ritrovano i risultati giá ottenuti:

$$x^* = \tilde{F}_2 = \mathbf{E}^{\underline{P}}[F] = \frac{\alpha}{2}$$

e:

$$\theta^* = 2(\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2) = F_1 - F_3 = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che a differenza della trattazione del capitolo precedente in cui la ricerca della strategia ottimale era ristretta nella classe delle strategie ammissibili (cioé tali che $V_t(\gamma) \geq 0 \quad \forall t \in T$), qui il processo di valore del portafoglio puó assumere anche valori negativi.
Il problema dell'esistenza di una coppia ottimale (γ^*, x^*) se la misura P non é una misura di martingala verrá trattato nel seguito, usando la teoria della programmazione dinamica esposta nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Controllo Markoviano e Programmazione Dinamica a tempo discreto

In questo capitolo presenteremo le basi della teoria del controllo stocastico a tempo discreto con orizzonte temporale finito.
Per chiarimenti ed approfondimenti si rimanda alle referenze [HLL 96] e[DR 97].
Nel capitolo successivo i risultati qui richiamati verranno utilizzati in ambito finanziario.
Diamo ora alcune definizioni formali necessarie per la modellizzazione del problema.
Un **modello di controllo Markoviano a tempo discreto** $k = 0, 1, \ldots, N$ consiste nella specifica, per ogni k, di una quintupla:

$$(E, A, \{A(x)|x \in E\}, P_k, g_k) \tag{3.1}$$

costituita da:

(a) uno spazio di Borel E, chiamato **spazio degli stati** .

(b) uno spazio di Borel A, chiamato **insieme dei controlli** o **azioni**.

(c) una famiglia $\{A(x)|x \in E\}$ di sottoinsiemi non vuoti misurabili $A(x)$ di A, dove $A(x)$ denota l'insieme dei controlli (o azioni) realizzabili quando il sistema é nello stato $x \in E$ e con la proprieta' che l'insieme:

$$K := \{(x, a)|x \in E, a \in A(x)\}$$

delle coppie stato-azione realizzabili, é un sottospazio misurabile di $E \times A$.

(d) una funzione $P_k(\cdot|\cdot)$ tale che $P_k(\cdot|z)$ é una misura di probabilitá su E per ogni fissato $z \in K$ e $P_k(B|\cdot)$ é una funzione misurabile su K per ogni fissato B appartenente alla $\sigma - algebra$ dei boreliani.P_k é detta **legge di transizione** (o nucleo stocastico) al tempo k.

(e) una funzione misurabile $g_k : K \to \mathbb{R}$ chiamata solitamente **funzione di costo** al tempo k.
Il numero N prende il nome di **orizzonte temporale** e nel seguito verrá sempre supposto finito.

L' interpretazione del formalismo precedente é la seguente.
Il modello (3.1) é la rappresentazione matematica di un sistema aleatorio controllabile che nel caso piú semplice si puó supporre osservato ai tempi $k = 0, 1, \ldots, N$.
Se denotiamo con X_k e W_k, rispettivamente, lo stato e il controllo al tempo k, possiamo descrivere l'evoluzione del sistema come segue.
Se il sistema é nello stato $X_k = x \in E$ al tempo k e se é applicato il controllo $W_k = a \in A(x)$ allora succedono due fatti:

(i): si accumula un costo $g_k(x, a)$

(ii): il sistema si muove allo stato successivo X_{k+1}, che é una variabile aleatoria a valori in E e la distribuzione $P_k(\cdot|x, a)$ del precedente punto (d) é realizzata da:

$$P_k(B|x, a) := Prob(X_{k+1} \in B|X_k = x, W_k = a) \quad , B \subset E. \tag{3.2}$$

Una volta che la transizione nel nuovo stato é avvenuta, é scelto un nuovo controllo e il processo viene ripetuto.

I punti (i) e (ii) costituiscono le caratteristiche centrali di quello che comunemente viene chiamato un **processo di controllo Markoviano (MCP)** a tempo discreto.
La qualifica **"Markoviano"** deriva dal fatto che ad ogni dato istante, il costo e la legge di transizione dipendono solo dallo stato corrente del sistema e dal controllo corrente.
Come vedremo piú avanti il processo (X_k) di per se é una catena di Markov solo sotto certe condizioni.
In molte applicazioni l'evoluzione aleatoria del sistema é specificata tramite un'equazione della forma:

$$X_{k+1} = F(X_k, a_k, \xi_k) \quad k = 0, 1, \ldots, N \tag{3.3}$$

dove $\{\xi_k\}$ é una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con valori in qualche spazio S, una distribuzione comune μ e indipendenti dallo stato iniziale x_0.La successione $\{\xi_k\}$ é chiamata **processo**

di disturbo.
In questo caso la legge di transizione P_k é data da:

$$P_k(B|x,a) = \mu(\{s \in S | F(x,a,s) \in B\}) = \mathbf{E} I_B[F(x,a,\xi)] \tag{3.4}$$

dove il valore atteso é preso rispetto alla distribuzione μ e ξ é una generica variabile aleatoria con distribuzione μ.
Osserviamo che la (3.4) contiene il caso particolare di un sistema di controllo deterministico $x_{k+1} = F(x_k, a_k)$ in cui non c'é incertezza, per cui la legge di transizione diventa:

$$P(B|x,a) = I_B(F(x,a))$$

Definiamo ora il concetto di regola di decisione al tempo k e poi quello di politica.Per ogni fissato $k \geq 0$ poniamo:

$$h_k = (x_0, a_0, \ldots, x_{k-1}, a_{k-1}, x_k)$$

con $(x_i, a_i) \in K$ per $i = 0, \ldots, k-1$ ed $x_k \in E$.Un vettore h_k é detto una **k-storia ammissibile** del processo controllato.Denoteremo con $\mathcal{H}_k$ l'insieme di tutti i possibili vettori di tale tipo.
Una **regola di decisione deterministica** al tempo k é una corrispondenza $d_k : \mathcal{H}_k \to A$ tale che $d_k(h_k) \in A(x_k)$. Se $d_k(h_k)$ dipende da h_k solo attraverso x_k, cioé se $d_k(h_k) = f_k(x_k)$, la regola di decisione é detta **Markoviana deterministica** e la funzione f_k prende il nome di **selettore**.
Piú in generale é possibile considerare regole di decisione aleatorie in cui il controllo da scegliere al tempo k sulla base della k-esima storia h_k é estratto a sorte da una certa distribuzione di probabilitá su $A(x_k)$.

Formalmente una **regola di decisione aleatoria** al tempo k é una corrispondenza $d_k : \mathcal{H}_k \to Pr(A)$,con $h_k \mapsto d_k(\cdot|h_k) \in Pr(A(x_k))$, dove $Pr(Y)$ denota lo spazio delle misure di probabilitá su Y.In particolare $d_k(A(x_k)|h_k) = 1$.
Di nuovo se $d_k(\cdot|h_k)$ dipende da h_k solo attraverso x_k, la regola di decisione viene detta **Markoviana aleatoria**.Ovviamente ogni regola di decisione deterministica al tempo k puó essere vista come una regola di decisione aleatoria che al tempo k ammette come distribuzione di probabilitá su $A(x_k)$ soltanto una certa delta di Dirac.
Definiamo il concetto di politica.Una **politica** o **piano di decisione** é una sequenza $\pi_N = (d_0, ..., d_{N-1})$ di regole di decisioni aleatorie, una per ciascun tempo.Indicheremo con Π l'insieme di tutte le politiche.
Se $\pi_N = (d_0, \ldots, d_{N-1})$ é tale che d_i é Markoviana aleatoria per ogni $i = 0, \ldots, N-1$,la politica é detta **Markoviana aleatoria**.Se $\pi_N = (d_0, \ldots, d_{N-1})$ é tale che d_i é deterministica per ogni $i = 0, \ldots, N-1$ la politica é detta **deterministica**.Se $\pi_N = (d_0, \ldots, d_{N-1})$ é tale che d_i é Markoviana deterministica per ogni $i = 0, \ldots, N-1$ la politica é detta **Markoviana deterministica**.
Denotiamo con Π^{MA}, Π^D e Π^{MD} gli insiemi costituiti dalle politiche sopra specificate, ne consegue che:

$$\Pi^{MD} \subset \Pi^{MA} \subset \Pi \quad , \quad \Pi^{MD} \subset \Pi^D \subset \Pi.$$

A partire da una generica politica $\pi_N \in \Pi$, dalle quintiple $(E, A, \{A(x)|x \in E\}, P_k, g_k), k = 0, \ldots, N$ definite in (3.1) e da una distribuzione di probabilitá iniziale ν su E (che per semplicitá assumeremo essere concentrata in un punto $x \in E$, cioé $\nu(\cdot) = \delta_x(\cdot)$), é possibile costruire in modo canonico uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P_x^\pi)$, con $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ (Boreliani su Ω), e processi aleatori $\{X_k\}$ e $\{W_k\}$ a valori rispettivamente in E ed in A definiti su Ω come processi "coordinati" e rappresentativi della dinamica (P_k) e della politica

π_N.

In concreto, ricordando che per ipotesi l'orizzonte temporale N é finito, si pone:

$$\Omega := K^{N-1} \times E = \{E \times A\}^{N-1} \times E. \tag{3.5}$$

Per semplicitá qui supporremo E ed A finiti (o al piú numerabili) cosicché tale risulta essere anche Ω.

Un elemento $\omega \in \Omega$ consiste in una sequenza alternata di stati e di azioni, cioé:

$$\omega = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{N-1}, x_N).$$

Per tale generico $\omega \in \Omega$ definiamo variabili aleatorie X_k e W_k come:

$$X_k(\omega) = x_k \quad W_k(\omega) = a_k$$

per $k = 0, \dots, N$.

La variabile X_k denota dunque lo stato del sistema al tempo k, mentre W_k denota l'azione (o controllo) intrapreso al tempo k.

Poniamo inoltre:

$$Z_0(\omega) := x_0 \quad , Z_k(\omega) := (x_0, a_0, \dots, x_k), \quad k = 0, \dots, N$$

Dunque la politica $\pi_N = (d_0, \dots, d_{N-1})$ ed i nuclei di transizione (P_k) inducono una misura di probabilitá $P_x^{\pi_N}$ su $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ come segue:

$$P_x^{\pi_N}(X_0 = x_0) := \delta_x(x_0) \tag{3.6}$$

$$P_x^{\pi_N}(W_k = a_k | Z_k = h_k) := d_k(a_k|h_k) \tag{3.7}$$

$$P_x^{\pi_N}(X_{k+1} = x_{k+1} | Z_k = h_k, W_k = a_k) := P_k(x_{k+1}|x_k, a_k) \tag{3.8}$$

il che implica che la probabilitá di un generico $\omega = (x_0, a_0, x_1, \dots, a_{N-1}, x_N) \in \Omega$ é data da:

$$\begin{aligned} P_x^{\pi_N}(\omega) &:= \delta_x(x_0) d_0(a_0|x_0) P_0(x_1|x_0, a_0) d_1(a_1|x_1) \cdots \\ &\cdots d_{N-1}(a_{N-1}|h_{N-1}) P_{N-1}(x_N|x_{N-1}, a_{N-1}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$P_x^{\pi_N}$ viene poi estesa in maniera standard (vedi ad esempio [TE 97]) ad ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ in modo tale che $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P_x^{\pi})$ risulta uno spazio di probabilitá ben definito.

Osserviamo infine che basandosi sulle precedenti definizioni non é difficile provare che, se $\pi_N \in \Pi^{MA}$, il processo indotto (X_k) risulta essere una catena di Markov (vedi [HLL 96]).

Sia R una generica variabile aleatoria a valori reali definita su $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P_x^{\pi})$. Essendo Ω finito possiamo definire l'aspettazione di R rispetto alla politica π nella seguente maniera:

$$\mathbf{E}^{P_x^{\pi_N}}(R) := \sum_{\omega \in \Omega} R(\omega) P_x^{\pi_N}(\omega) \tag{3.10}$$

Se Ω é infinito o numerabile é richiesta la convergenza assoluta della somma.

Nel seguito adotteremo,per semplicitá, la notazione $\mathbf{E}_x^{\pi_N}$ al posto di $\mathbf{E}^{P_x^{\pi_N}}$.

Il problema di ottimalita' che si vuole affrontare in questo capitolo é quello di minimizzare il valore atteso della funzione di costo totale:

$$g_N(X_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(X_k, W_k) \tag{3.11}$$

dove $g_k(X_k, W_k)$ é il costo in cui si incorre al tempo k nello stato X_k se viene presa la decisione W_k e $g_N(X_N)$ é il costo terminale allo stato finale X_N.
La (3.11) presuppone quindi che il costo sia additivo nel tempo.
Nel seguito di questo capitolo, al fine di semplificare la descrizione, assumeremo che i costi $g_k : K \to \mathbb{R}, k = 0, \ldots, N-1$ e $g_N : E \to \mathbb{R}$, siano **funzioni limitate**.
Il problema consiste nel determinare (se esiste) una politica che minimizzi tale costo atteso totale.
Data la politica $\pi_{N-s} := (d_s, \ldots, d_{N-1})$ perseguita a partire dall'istante s ($s \leq N-1$), il costo atteso conoscendo lo stato x al tempo s é dato da:

$$J_s(x, \pi_{N-s}) := \mathbf{E}^{\pi_{N-s}}[g_N(X_N) + \textstyle\sum_{k=s}^{N-1} g_k(X_k, W_k)|X_s = x]$$

$$:= \mathbf{E}_x^{\pi_{N-s}}[g_N(X_N) + \sum_{k=s}^{N-1} g_k(X_k, W_k)] \tag{3.12}$$

In particolare dato lo stato iniziale x si ha:

$$J_0(x, \pi_N) := \mathbf{E}_x^{\pi_N}[g_N(X_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(X_k, W_k)] \tag{3.13}$$

Inoltre si definisce, dato lo stato x al tempo finale N:

$$J_N(x) := g_N(x). \tag{3.14}$$

Posto:

$$J^*(x) := \inf_{\{\pi_N\}} J_0(x, \pi_N) \quad \forall x \in E \tag{3.15}$$

se esiste una politica $\pi_N^* = (d_0^*, \dots, d_{N-1}^*)$ tale che:

$$J_0(x, \pi_N^*) = J^*(x) \tag{3.16}$$

allora tale politica verrá detta **ottimale**.

In molte applicazioni,specialmente di carattere economico, risulta piú conveniente considerare, invece che il costo atteso (3.13), il costo atteso scontato:

$$J_0(x, \pi_N) = \mathbf{E}_x^{\pi_N}[\alpha^N g_N(X_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g_k(X_k, W_k)] \tag{3.17}$$

dove α $(0 < \alpha < 1)$ é detto **fattore di sconto**.

Il teorema che segue é un risultato fondamentale per la risoluzione dei problemi (3.15) e (3.16) ed ha una duplice valenza.Da una parte prova che, se una certa ipotesi é verificata, una politica ottimale esiste sempre e per di piú é Markoviana deterministica; dall'altra fornisce un algoritmo per la determinazione della funzione $J^*(\cdot)$.
L'enunciato che viene dato é relativo ad un problema di minimizzazione, ma

é del tutto evidente che un analogo enunciato vale per problemi di massimizzazione (si veda successivo esempio nel capitolo).

Teorema 3.1. *(della programmazione dinamica)*
Sia E al piú numerabile e siano $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_N$ funzioni su E definite ricorsivamente come:

$$\mathbf{V}_N(x) := g_N(x_N) \tag{3.18a}$$

$$\mathbf{V}_k(x) := \inf_{A(x)} [g_k(x,a)) + \sum_{y \in E} P_k(y|x,a)\mathbf{V}_{k+1}(y)] \tag{3.18b}$$

per $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Supponiamo che valga la seguente ipotesi:

- **(HP)** $\forall x \in E$ *e* $\forall k = 0, \dots, N-1$ *esiste* $a^* = a^*(x,k) \in A(x)$ *tale che:*

$$\mathbf{V}_k(x) = g_k(x,a^*) + \sum_{y \in E} P_k(y|x,a^*)\mathbf{V}_{k+1}(y)$$

In altri termini supponiamo che per ogni stato, ad ogni tempo esista un controllo tale che l'inferiore in (3.18*b*) *risulti raggiunto in corrispondenza ad esso.*
Allora definiti $\forall x \in E$ e $\forall k = 0, \dots, N-1$, selettori $f_k^*(x) := a^*(x,k)$, la politica Markoviana deterministica $\pi_N^* := (f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ é ottimale per il problema in considerazione (3.15), (3.16).

Inoltre la funzione J^* risulta essere uguale a $\mathbf{V}_0$, cioé:

$$\mathbf{V}_0(x) = J^*(x) = J_0(x, \pi_N^*) \quad , \forall x \in E.$$

Dimostrazione:
Sia $\pi_N \in \Pi$ una politica arbitraria.
Posto per convenzione $\pi_0 := \{\emptyset\}$ e $J_N(x, \pi_0) := J_N(x)$, per provare il teorema basterá dimostrare che $\forall x \in E$ e $k = 0, \ldots, N$ risulta:

$$J_k(x, \pi_{N-k}) \geq \mathbf{V}_k(x) \tag{3.19}$$

e se $\pi_{N-k} = \pi_{N-k}^*$ si ha:

$$J_k(x, \pi_{N-k}^*) = \mathbf{V}_k(x) \tag{3.20}$$

In particolare per $k = 0$ risulta:

$$J_0(x, \pi_N) \geq \mathbf{V}_0(x)$$

con:

$$J_0(x, \pi_N^*) = \mathbf{V}_0(x) \quad \forall x \in E$$

da cui la tesi, poiché $J_0(\cdot, \pi_N) \geq \mathbf{V}_0(\cdot)$ per ogni arbitraria politica implica $J^*(\cdot) \geq \mathbf{V}_0(\cdot)$.
Si osserva che (3.19) e (3.20) sono banalmente verificate per $k = N$; infatti

dalla (3.14) e dalla (3.18a) segue che:

$$J_N(x, \pi_0) = \mathbf{V}_N(x) = g_N(x)$$

Assumiamo (ipotesi induttiva) che per qualche $s = N-1, \ldots, 0$ la (3.19) sia verificata per $s+1$, cioé si abbia:

$$J_{s+1}(x, \pi_{N-(s+1)}) \geq \mathbf{V}_{s+1}(x) \quad , x \in E$$

Dalla (3.12) si ottiene allora:

$$J_s(x, \pi_{N-s}) = \mathbf{E}_x^{\pi_{N-s}}[g_s(X_s, W_s) + \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(X_k, W_k) + g_N(X_N)] =$$

$$= \mathbf{E}_x^{d_s}[g_s(X_s, W_s) + \sum_{y \in E} \mathbf{E}_x^{\pi_{N-s}}(\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(X_k, W_k) + g_N(X_N))P_s(y|X_s, W_s)] =$$

$$= \int_{a \in A(x)} [g_s(x, a) + \sum_{y \in E} (J_{s+1}(y, \pi_{N-s-1})P_s(y|x, a))]d_s(da|x) \qquad (3.21)$$

e usando l'ipotesi induttiva:

$$J_s(x, \pi_{N-s}) \geq \int_{a \in A(x)} [g_s(x, a) + \sum_{y \in E} \mathbf{V}_{s+1}(y)P_s(y|x, a))]d_s(da|x) \geq$$

$$\geq \inf_{A(x)} [g_s(x, a) + \sum_{y \in E} \mathbf{V}_{s+1}(y)P_s(y|x, a))] := \mathbf{V}_s(x)$$

Quindi la (3.19) é verificata per ogni $k = 0, \ldots, N$.

Inoltre se é verificata la (3.20) per $k = s + 1$ (ipotesi induttiva), cioé se:

$$J_{s+1}(x, \pi^*_{N-(s+1)}, x) = \mathbf{V}_{s+1}(x) \quad , x \in E$$

allora usando l'ipotesi **(HP)** riesce:

$$\mathbf{V}_s(x) := \inf_{A(x)} [g_s(x, a)) + \sum_{y \in E} P_s(y|x, a) \mathbf{V}_{s+1}(y)] =$$

$$= g_s(x, f^*_s(x)) + \sum_{y \in E} P_s(y|x, f^*_s(x)) \mathbf{V}_{s+1}(y)$$

e usando l'ipotesi induttiva si ottiene:

$$\mathbf{V}_s(x) = g_s(x, f^*_s(x)) + \sum_{y \in E} P_s(y|x, f^*_s(x)) J_{s+1}(y, \pi_{N-(s+1)}) = J_s(x, \pi^*_{N-s})$$

quindi la (3.20) é verificata per ogni $k = 0, \dots, N-1$.Questo conclude la dimostrazione del teorema.

Osservazione 3.1. *L'ipotesi* **(Hp)** *assunta nel teorema della programmazione dinamica é facilmente verificata almeno nei due seguenti casi:*
(a): $A(x)$ *é finito* $\forall x \in E$.
oppure:
(b): $A(x)$ *é compatto* $\forall x \in E$ *e* $\forall x \in E$, $\forall k = 0, \dots, N-1$, *le funzioni*

$g_N(x)$ e $g_k(x,a)$ sono continue su $A(x)$ ed inoltre $P_k(y,x,\cdot)$ é continua su $A(x)$, $\quad \forall x, y \in E$ e $k = 0, \ldots, N-1$ (cosicché, dalla convergenza uniforme, segue che $\sum_{y \in E} P(y|x,\cdot)\mathbf{V}_{k+1}(y)$ é continua su $A(x)$).

Osservazione 3.2. *É possibile estendere i risultati del Teorema 3.1 al caso in cui lo spazio degli stati E risulti continuo.*
Per le ipotesi tecniche aggiuntive necessarie a questa trattazione e per i relativi enunciati si rimanda alla referenza [HLL 96] (cap.3, teorema 3.2.1).

Si deduce facilmente dal teorema della programmazione dinamica il seguente corollario:

Corollario 3.1. *Sotto l'ipotesi del teorema* 3.1*, siano $\mathbf{V}_0, \ldots, \mathbf{V}_N$ definite come in* (3.18*a*) *e* (3.18*b*)*.Allora vale:*

$$\mathbf{V}_k(x) = \inf_{\{\pi_{N-k}\}} J_k(x, \pi_{N-k})$$

Viceversa posto:

$$\mathbf{V}_k(x) := \inf_{\{\pi_{N-k}\}} J_k(x, \pi_{N-k}) \tag{3.22}$$

$\mathbf{V}_k(x), k = 0, \ldots, N$ *verifica le equazioni:*

$$\mathbf{V}_N(x) = g_N(x_N) \tag{3.23a}$$

$$\mathbf{V}_k(x) = \inf_{A(x)} [g_k(x,a)) + \sum_{y \in E} P_k(y|x,a)\mathbf{V}_{k+1}(y)] \tag{3.23b}$$

Dimostrazione:

La prima parte della dimostrazione si deduce banalmente dal teorema 3.1, infatti (3.19) e (3.20) mostrano che $\mathbf{V}_k$ é proprio il costo ottimale da k ad N. Viceversa sia $\pi_{N-k} = (d_k, \ldots, d_{N-1})$ una politica tale che $d_k = f_k$ é un generico selettore e $(d_{k+1}, \ldots, d_{N-1})$ sia una politica ottimale per il problema a partire dall'istante $k+1$.Allora si ottiene dalla (3.21):

$$J_k(\pi_{N-k}, x) = [g_k(x, f_k(x)) + \sum_{y\in E}(J_{s+1}(y, \pi_{N-k-1}P_k(y|x, f_k(x)))] \geq \quad (3.24)$$

$$\geq \min_{A(x)}[g_k(x, a) + \sum_{y\in E}(J_{s+1}(y, \pi_{N-k-1}P_k(y|x, a))]$$

e dalla (3.22) segue che:

$$\mathbf{V}_k(x) \geq \min_{A(x)}[g_k(x, a) + \sum_{y\in E}(J_{s+1}(y, \pi_{N-k-1}P_k(y|x, a))] \quad \forall x \in E \qquad (3.25)$$

Per ottenere la disuguaglianza inversa si osserva che dalla (3.22) e dalla (3.24) segue:

$$\mathbf{V}_k(x) \leq J_k(x, \pi_{N-k}) = [g_k(x, f_k(x)) + \textstyle\sum_{y\in E}(J_{s+1}(y, \pi_{N-k-1}P_k(y|x, f_k(x)))]$$

che implica:

$$\mathbf{V}_k(x) \leq \min_{A(x)}[g_k(x, a) + \sum_{y\in E}(J_{s+1}(y, \pi_{N-k-1}P_k(y|x, a))] \qquad (3.26)$$

con f_k scelto arbitrariamente.Le (3.25), (3.26) provano che le (3.23b) per

$k = 0, \ldots, N-1$ sono verificate e la $(3.23a)$ é banalmente verificata, da cui la tesi.

Le equazioni $(3.23a), (3.23b)$ sono dette **Equazioni di Belmann** e sono le equazioni basilari della programmazione dinamica, mentre la funzione $\mathbf{V}_k(x)$ é comunemente chiamata **funzione valore** al tempo k.
Le equazioni di Belmann implicano un fondamentale principio, detto **principio di ottimalitá di Belmann**, che puó essere espresso nella seguente forma:

Corollario 3.2. *Siano verificate le ipotesi del teor.3.1, quindi esiste una politica ottimale Markoviana deterministica* $\pi_N^* = (f_0^*, \ldots, f_{N-1}^*)$ *tale che:*

$$J^*(x) = J_0(x, \pi_N^*) = \mathbf{V}_0(x) \quad , \forall x \in E$$

Allora la politica $\pi_{N-s}^* = (f_s^*, \ldots, f_{n-1}^*)$ *é ottimale a partire dall'istante s, cioé fissata la politica* π_N^**, se si ha probabilitá positiva di trovarsi al tempo s nello stato y allora* $J_s(y, \pi_{N-s}^*)$ *é il costo ottimale a partire dall'istante s.*

Dimostrazione:
Il corollario 3.1. implica che $\mathbf{V}_s$ é proprio il costo ottimale a partire dal tempo s e per l'ipotesi **(HP)** del teorema 3.1 il minimo in (3.22) é raggiunto, quindi riesce:

$$\mathbf{V}_s(x) = \min_{\pi_{N-s}} J_s(x, \pi_{N-s}) \quad \forall x \in E \quad , s = 0, \ldots, N$$

Supponiamo per assurdo che esiste una politica $\tilde{\pi}_{N-s}$, tale che $\tilde{\pi}_{N-s}$ diversa da π_{N-s}^* e $\tilde{\pi}_{N-s}$ sia ottimale a partire dall'istante s, cioé:

$$J_s(y, \tilde{\pi}_{N-s}) = \mathbf{V}_s(y)$$

con l'ipotesi che $X_s = y$ con probabilitá positiva.
Allora se $\bar{\pi}_N = (f_0^*, \dots, f_{N-s-1}^*, \tilde{\pi}_{N-s})$, usando l'addittivitá del costo totale atteso, si ha:

$$J^*(x) = \mathbf{V}_0(x) = J_0(\pi_N^*, x) > J_0(\bar{\pi}_N, x)$$

contro l'ipotesi di ottimalitá della politica π_N^*, da cui la tesi.

Per esemplificare un classico utilizzo della programmazione dinamica a tempo discreto in ambito economico, illustreremo nel seguito un problema noto come **il problema del consumo-investimento**.

Un "piccolo"investitore (ovvero un agente economico le cui azioni non possono influenzare i prezzi del mercato) deve decidere la migliore strategia di consumo-investimento avendo la possibilitá di investire in:

- un titolo a rendimento certo (bond) con tasso di rendimento fissato r

- un titolo rischioso (stock) che nell'intervallo di tempo $[k-1, k]$ offre un tasso di rendimento aleatorio ξ_k.

Egli ha inoltre a disposizione un orizzonte temporale finito che denoteremo con N.
Siano:

- p_k (rispettivamente $1 - p_k$) la frazione di ricchezza investita nel titolo rischioso (rispettivamente nel titolo a rendimento certo) al tempo k

- c_k l'ammontare della ricchezza consumata fino al tempo k.

Ne consegue che p_k e c_k dovranno verificare i seguenti vincoli:

$$0 \leq p_k \leq 1 \quad 0 \leq c_k \leq X_k$$

dove X_k denota la ricchezza dell'investitore al tempo k.Cosi, il processo di stato economico o di ricchezza $\{X_k\}$ dell'investitore si evolve nel tempo conforme all'equazione:

$$X_{k+1} = F(X_k, a_k, \xi_k) = [(1 - p_k)(1 + r) + p_k \xi_k](X_k - c_k) \quad k = 0, 1, \dots, N$$

dato uno stato iniziale di ricchezza $X_0 = x_0$.
In questo esempio restano fissate in modo naturale le seguenti scelte:

- lo spazio degli stati $E := \mathbb{R}^+$

- l'insieme dei controlli $A := [0, 1] \times \mathbb{R}^+$.

Poiché p_k e c_k devono verificare i vincoli sopra detti, l'insieme dei controlli $a = (p, c)$ realizzabili é:

-$A(x) := [0, 1] \times [0, x]$ quando lo stato (o la ricchezza) é x.

Supponendo che $\{\xi_k\}$ sia una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. con una certa distribuzione μ, la legge di transizione $P_k = P$ per ogni k é determinata

come in (3.4).
Per completare la descrizione di questo modello di controllo Markoviano dobbiamo ancora specificare le funzioni $g_k(x,a)$ in questo caso particolare.Una tipica scelta per le funzioni g_k é considerare "l'utilita' dal consumo"; se $a = (p, c) \in A(x)$:

$$g_k(x,a) := u(c)$$

dove u é una preassegnata funzione di utilita' (cioé una funzione strettamente crescente che descrive il comportamento dell'investitore in condizioni di rischio, si veda ad esempio [EK 99]) e $k = 0, \dots, N$.
Una generica politica di consumo investimento per l'agente economico é, come visto in precedenza, una successione di regole di decisioni aleatorie, $\pi_N = (d_0, \dots, d_N)$, sulla base della quale ad ogni istante k viene effettuata una scelta dei valori p_k e c_k.
Il problema di ottimizzazione in questo caso particolare diventa massimizzare l'utilita'attesa scontata totale rispetto a tutte le politiche di consumo-investimento $\{\pi_N\}$ che verificano i vincoli $0 \leq p_k \leq 1 \quad, 0 \leq c_k \leq X_k$, cioe':

$$J^*(x_0) = \sup_{\{\pi_N\}} \mathbf{E}_{x_0}^{\pi_N}[\sum_{k=0}^{N} \alpha^k u(c_k)]$$

dove $\alpha : \quad 0 < \alpha < 1$ é il fattore di sconto.
Poniamo:

$$\mathbf{V}_N(x_N) := u(c_N) \tag{3.27a}$$

$$\mathbf{V}_k(x_k) := \sup_{\{(c_k,p_k)\}} [u(c_k) + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} P(dy|x_k, c_k, p_k) \mathbf{V}_{k+1}(y)] \tag{3.27b}$$

per $\quad , k = 0, \ldots , N-1$.Osserviamo che $(3.27b)$ é l'analogo di $(3.18b)$ per il caso in questione in cui $E = \mathbb{R}^+$.

Facciamo l'ulteriore ipotesi che la funzione di utilitá sia **derivabile e strettamente convessa**, come nell'ambito economico di solito accade.

Questa condizione equivale a supporre che l'investitore sia avverso al rischio. Sfruttando tale ipotesi non é difficile verificare "a mano" che l'ipotesi **(HP)** del teorema 3.1 resta verificata, cioé che il "sup" in $(3.27b)$ viene raggiunto.In sostanza si tratta di calcolare le derivate prime dell'espressione tra parentesi quadra della $(3.27b)$ e di porle uguali a zero: l'esistenza di un'unica soluzione, che dá luogo ad un massimo, é assicurata dalla concavitá.

Si puó effettuare il calcolo della funzione valore considerando ad esempio tipiche funzioni di utilitá usate in ambito economico.Una di queste é data da:

$$u(x) = x^{1-\beta} \quad , 0 < \beta < 1$$

che e' ovviamente derivabile e strettamente convessa.

In tal caso, dopo dei calcoli un pó laboriosi, si ottengono le seguenti soluzioni ottimali al tempo $k = N - s$, valide per ogni $s = 0, \ldots , N$:

$$c^*_{N-s} = b_{N-s} x_{N-s} \quad , \mathbf{V}_{N-s}(x_{N-s}) = b^{-\beta}_{N-s} (x_{N-s})^{1-\beta}$$

dove $b_{N-s} = \frac{a^s}{1+a+\ldots+a^s}$ (mentre p^*_{N-s} ha forma piú complicata).Si veda in proposito [DR 97]

Capitolo 4

Mercati incompleti (parte seconda): Metodi Markoviani

Nei primi due capitoli si é affrontato per due situazioni di mercato particolari (mercato completo e mercato incompleto in cui la misura di probabilitá originaria P é una misura di martingala), il problema di replicare in modo migliore il pay off di un contingent claim alla scadenza con una strategia dinamica autofinanziante.

Nel primo capitolo si é dimostrato che nella situazione di mercato completo si riesce a replicare esattamente il pay off alla scadenza tramite una strategia autofinanziante, ma le condizioni che garantiscono la completezza del mercato sono condizioni molto idealizzate.

Infatti la situazione reale é una situazione di mercato incompleto e in questo capitolo si affronta il medesimo problema relativamente al caso di un contingent claim europeo.

Per formalizzare consideriamo anche qui uno spazio di probabilitá filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$, con $T = \{0, 1, \dots, N\}$ uno spazio discreto di tempi.

Nel seguito assumeremo sempre Ω **finito** (sebbene sia possibile dispensarci da una tale ipotesi imponendo opportune ipotesi di integrabilitá).

Supponiamo che il mercato sia costituito solo da un titolo rischioso e da un bond.Per semplicitá si assume inizialmente che:

- il tasso di interesse r del titolo non rischioso sia nullo e il prezzo del bond all'istante iniziale sia 1\$, di modo tale che il processo di prezzo del bond sia uguale ad 1\$ $\quad \forall t \in T$(vedi capitolo (2)).
Assumeremo inoltre che non ci siano costi per la transazione.
Denotiamo con:

- $B_t := S_t^0$ il processo di prezzo del bond cosicché per le assunzioni fatte si avrá che $B_0 = B_1 = \ldots = B_{N-1} = 1\$$.

-$S_t := S_t^1$ il processo di prezzo del titolo rischioso, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Nel corso del capitolo l'ipotesi di base sará la seguente:

(MARKOV): $(S_t)_{t \in T}$ é un processo di Markov.

Sia:

$$X_t(\gamma) := (V_t(\gamma), S_t) \quad , t \in T \tag{4.1}$$

la variabile di stato al tempo t, con $V_t(\gamma)$ il processo di valore associato alla strategia $\gamma = ((b_t, \theta_t))_{t \in T}$, con b_t e θ_t le quote detenute dall'investitore al tempo t, rispettivamente, del bond e del titolo rischioso.
Supponiamo che le strategie di compravendita (trading) permesse siano solo quelle appartenenti al seguente spazio:

$$\mathcal{S}_{aut} := \{\gamma : \gamma \text{ autofinanziante}\} \tag{4.2}$$

ovviamente piú grande dello spazio $\mathcal{S}_{ad}$ introdotto nel capitolo 1.
Denotiamo con E lo spazio degli stati del processo (4.1).Si ha:

$$E \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)$$

e il generico valore (o stato) in cui a qualunque tempo il processo $(X_t(\gamma))_{t\in T}$ puó trovarsi é dato da:

$$x = (v, s) \quad , x \in E$$

In particolare il vettore dei dati iniziali sará costituito da:

$$x_0 = (v_0, s_0)$$

dove s_0 é il prezzo spot del titolo rischioso, mentre v_0 rappresenta il **capitale iniziale a disposizione dell'investitore** (venditore del contingent claim).
Osserviamo che l'ipotesi **(MARKOV)** implica che il processo $(X_t(\gamma))_{t\in T}$ risulta essere un processo di Markov controllato (vedi capitolo precedente) con P definita come in (3.2).
Definiamo ora la funzione $f : E \longrightarrow (0, +\infty)$ come:

$$f(x) = f(v, s) := (v - F(s))^2 \tag{4.3}$$

dove $F : (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é una certa preassegnata funzione $\mathcal{F}_N$-misurabile

rappresentante il pay off del contingent claim europeo da approssimare alla scadenza N.
Per ogni $\tau : 0 \leq \tau \leq N$ si consideri il processo o vettore aleatorio:

$$X^{\tau,x_\tau}(\gamma) = (X_\tau(\gamma), \ldots, X_N(\gamma)) \quad , \forall \gamma \in \mathcal{S}_{aut}, \forall x \in E \tag{4.4}$$

tale che:

$$P(X_\tau(\gamma) = x_\tau) = 1 \tag{4.5}$$

cioé al tempo $t = \tau$ il processo $X_t(\gamma)$ si trova nello stato x.
In particolare:

$$X^{0,x_0}(\gamma) \quad , \forall \gamma \in \mathcal{S}_{aut}, \forall x \in E$$

é tale che:

$$P(X_0(\gamma) = x_0) = 1.$$

Poniamo:

$$J_\tau(x_\tau, \gamma) := \mathbf{E}[f(X_N^{\tau,x_\tau}(\gamma))] \quad , \forall \tau \leq N \quad , \forall \gamma \quad , \forall x \in E \tag{4.6}$$

In particolare da (4.6), usando la (4.3), segue che per $\tau = 0$ e $x = x_0 = (v_0, s_0)$ si ha:

$$J_0(x_0, \gamma) = \mathbf{E}[f(X_N^{0,x_0}(\gamma))] := \mathbf{E}_{x_0}[f(V_N(\gamma), S_N)] = \mathbf{E}_{x_0}[(V_N(\gamma) - F(S_N))^2] =$$

$$= \mathbf{E}_{(v_0,s_0)}[(V_N(\gamma) - F(S_N))^2] \tag{4.7}$$

Ad ogni $t \in T$ si conoscono V_t e S_t (ma ovviamente non si conoscono né S_{t+1} né V_{t+1}).Il compito dell'investitore é ribilanciare il propio portafoglio, comprando o vendendo quote del titolo rischioso al prezzo S_t nel modo "migliore possibile", che nel presente contesto é identificato come quello che rende minimo il valore del funzionale (4.7).
Per le assunzioni fatte sul processo di prezzo del bond ($B_t = 1, \forall t \in T$), al tempo $t \in \{1, \ldots, N\}$ si ha:

$$V_t(\gamma) = \theta_t S_t + b_t$$

e dopo aver effettuato il ribilanciamento si avrá che il valore del portafoglio é dato da:

$$\theta_{t+1} S_t + b_{t+1}$$

e l'ipotesi che $\gamma \in \mathcal{S}_{aut}$,dunque γ autofinanziante, implica (vedi capitolo 1):

$$\theta_t S_t + b_t = \theta_{t+1} S_t + b_{t+1}.$$

Da cui:

$$V_t(\gamma) - V_{t-1}(\gamma) = \theta_t S_t + b_t - \theta_{t-1} S_{t-1} - b_{t-1} =$$

$$= \theta_t(S_t - S_{t-1}) + b_t - b_t = \theta_t \Delta S_t \quad , t = 1, \dots , N$$

o anche:

$$V_t(\gamma) = V_t(\theta) = V_{t-1} + \theta_t \Delta S_t \quad , t = 1, \dots , N \tag{4.8}$$

In particolare, dalla (4.8), per $t = 1$ risulta:

$$V_1(\gamma) = V_1(\theta) = v_0 + \theta_1 \Delta S_1$$

e usando ricorsivamente la (4.8) si ottiene che:

$$V_t(\gamma) = V_t(\theta) = V_{t-1}(\theta) + \theta_t \Delta S_t \quad , t = 1, \dots , N \tag{4.9}$$

La (4.9) mette in evidenza che sotto l'ipotesi fatte il valore del portafoglio ad ogni tempo $t \in T$ dipende dalla strategia γ solo attraverso θ.Ció implica che:

$$J_t(x_t, \gamma) = J_t(x_t, \theta) \quad \forall t \in T$$

Definiamo ora la classe dei processi:

$$\tilde{\mathcal{S}}_{aut} := \{\theta : \gamma = (b, \theta) \in \mathcal{S}_{aut}\}$$

Il nostro scopo é risolvere il seguente problema:

$$\inf_{\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_{aut}} J_0(x_0, \theta) = \inf_{\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_{aut}} \mathbf{E}_{(v_0, s_0)}[(V_N(\theta) - F(S_N))^2] \qquad (\mathbf{Min\ 1})$$

con $x_0 = (v_0, s_0)$ inizialmente assegnato.
Un secondo passo consiste poi nel minimizzare anche rispetto alla ricchezza iniziale v_0, cioé:

$$\inf_{v_0}(\inf_{\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_{aut}} J_0(x_0, \theta)) = \inf_{v_0}(\inf_{\theta \in \tilde{\mathcal{S}}_{aut}} \mathbf{E}_{(v_0, s_0)}[(V_N(\theta) - F(S_N))^2]) \qquad (\mathbf{Min\ 2})$$

I problemi di ottimalitá **(Min1)** e **(Min2)** si adattano naturalmente alla teoria della programmazione dinamica affrontata nel capitolo precedente, dove é la legge di un (processo di) controllo in $\tilde{\mathcal{S}}_{aut}$ a dar luogo ad una politica.Infatti usando la definizione alternativa della funzione valore data nel corollario 3.1 (formula (3.22)) si ha:

$$\mathbf{V}_N(x_N) = J_N(x_N, \theta) = \mathbf{E}[f(X_N^{N, x_N}(\theta))] = f(x_N) = (v_N - F(s_N))^2 \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{V}_t(x_t) = \inf_{\theta} J_t(x_t, \theta) = \inf_{A(x_t)} \mathbf{E}_{x_t}[\mathbf{V}_{t+1}(X_{t+1})] \quad , \forall x_t \in A(x_t) \qquad (4.10b)$$

per $t = 0, \dots, N-1$, con $x_t = (v_t, s_t)$ stato al tempo t, $\mathbf{V}_t(x_t)$ funzione valore al tempo t (ovvero il costo ottimale al tempo t) con stato iniziale x_t e $A(x_t)$ l'insieme dei controlli ammissibili quando al tempo t il sistema é nello stato x_t.
In questo contesto rimangono naturalmente definiti lo spazio dei controlli (cioé lo spazio degli stati del processo di controllo θ) e lo spazio dei controlli ammissibili quando il sistema é nello stato $x \in E$, come:

$$A = A(x) = \mathbb{R} \quad , \forall x \in E$$

e le funzioni di costo g_k come:

$$g_k(X_k, \theta_k) = 0 \quad , \forall k = 0, \dots, N-1 \quad g_N(X_N) := (V_N(\theta) - F(S_N))^2$$

Il seguente risultato fondamentale mostra che la strategia ottimale θ^* e la funzione valore $\mathbf{V}_t$ ad ogni tempo t, in questo caso possono essere calcolati esplicitamente, con la particolare caratteristica che $\mathbf{V}_t$ é un polinomio quadratico in v_t (valore del portafoglio al tempo t).
(Si ricorda che la notazione qui usata, come nei capitolo precedenti, per il generico valore assunto dalla variabile aleatoria é la lettera minuscola, mentre la lettera maiuscola sta ad indicare l'aleatorietá della variabile.Questa notazione viene a mancare solamente per la variabile aleatoria $\theta_k, \quad k = 0, \dots, N-1$ che per semplicitá é una lettera minuscola in entrambi i casi).

Teorema 4.1 (BKL 97). .
Sotto le assunzioni fatte precedentemente sul modello di mercato la soluzione del problema di ottimalitá:

$$\inf_{\theta} J_0(x_0, \theta)$$

é caratterizzata dalle seguenti:

(A) La funzione valore $\mathbf{V}_t$ *a partire dall'istante* t *é quadratica in* v_t *(valore assunto dal portafoglio al tempo* t*), ovvero esistono funzioni* $a_t(s_t)$,$b_t(s_t)$ *e* $c_t(s_t)$ *tali che:*

$$\mathbf{V}_t = a_t(s_t)[v_t - b_t(s_t)]^2 + c_t(s_t) \quad , t = 0, \dots, N \tag{4.11}$$

(B) Il controllo ottimale $\theta^*_{t+1} = \theta^*_{t+1}(x_t) = \theta^*_{t+1}(v_t, s_t)$ ad ogni tempo t é lineare in v_t, cioé esistono funzioni $p_t(s_t)$ e $q_t(s_t)$ tali che:

$$\theta^*_{t+1} = p_t(s_t) - v_t q_t(s_t) \quad , t = 0, \dots, N \tag{4.12}$$

(C) Le funzioni $a_t(\cdot), b_t(\cdot), c_t(\cdot), p_t(\cdot)$ e $q_t(\cdot)$ sono definite ricorsivamente come:

$$a_N = a_N(s_N) := 1$$

$$b_N = b_N(s_N) := F(s_N)$$

$$c_N = c_N(s_N) := 0$$

e per $t = N-1, \dots, 0$:

$$p_t(s_t) := (\mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})b_{t+1}(S_{t+1})\Delta S_{t+1}])(\mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})(\Delta S_{t+1})^2])^{-1}$$

$$q_t(s_t) := (\mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})\Delta S_{t+1}])(\mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})(\Delta S_{t+1})^2])^{-1}$$

$$a_t(s_t) := \mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})(1 - q_t(s_t)\Delta S_{t+1}))^2]$$

$$b_t(s_t) := a_t^{-1}(S_t)\mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})(b_{t+1}(S_{t+1}) - p_t(s_t)\Delta S_{t+1})(1 - q_t(s_t)\Delta S_{t+1})]$$

$$c_t(s_t) := \mathbf{E}_{s_t}[c_{t+1}(S_{t+1})] + \mathbf{E}_{s_t}[a_{t+1}(S_{t+1})(b_{t+1}(S_{t+1} - p_t(s_t)\Delta S_{t+1})^2] - a_t(s_t)(b_t(s_t))^2$$

(D) Sotto la strategia ottimale di replica θ^* la funzione valore $\mathbf{V}_0$ come funzione del capitale iniziale v_0 é:

$$\mathbf{V}_0(x_0) = a_0(s_0)[v_0 - b_0(s_0)]^2 + c_0(s_0) \tag{4.13}$$

con $x_0 = (v_0, s_0)$, quindi il capitale iniziale ottimale v_0^* che risolve il problema:

$$\min_{v_0} \mathbf{V}_0(x_0)$$

risulta essere:

$$v_0^* = b_0(s_0)$$

e quindi:

$$\min_{v_0} \mathbf{V}_0(x_0) = c_0(s_0) \tag{4.14}$$

Dimostrazione:
Dalle definizioni di $a_N(s_N), b_N(s_N)$ e $c_N(s_N)$, data:

$$\mathbf{V}_N(x_N) = (v - F(s))^2$$

le (4.11) e (4.12) sono banalmente verificate per $t = N$.
Dimostriamo per induzione che vale per ogni $t \leq N - 1$.
Supponiamo (ipotesi induttiva) che per $t = n + 1$ siano verificate le (4.11) e (4.12).Il corollario 3.1 del capitolo precedente ci assicura la seguente relazione:

$$\mathbf{V}_n(x_n) = \min_{\theta_n} \mathbf{E}_{x_n}[\mathbf{V}_{n+1}(X_{n+1})] \tag{4.15}$$

con $x_n = (v_n, s_n)$ e $X_{n+1} = (V_{n+1}, S_{n+1})$ se é verificata l'ipotesi **(HP)** del teorema della programmazione dinamica, che proveremo in maniera diretta qui di seguito.
(Si ricorda ancora che la notazione $\mathbf{E}_{x_n}[\cdot]$ indica l'aspettazione condizionata al fatto che il sistema al tempo n si trova nello stato $X_n = x_n = (v_n, s_n)$, quindi si avrá che il processo di valore al tempo $t = n$ sará dato da $V_n = v_n$).
Inoltre la strategia θ deve essere autofinanziante, cioé:

$$V_{n+1}(\theta) = V_n(\theta) + \theta_{n+1}\Delta S_{n+1}$$

e l'ipotesi induttiva assicura che:

$$\mathbf{V}_{n+1}(X_{n+1}) = a_{n+1}(S_{n+1})[V_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1})]^2 + c_{n+1}(S_{n+1})$$

Quindi dalla (4.15) segue:

$$\mathbf{V}_n(x_n) = \min_{\theta_n} \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(v_n + \theta_{n+1}\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))^2 + c_{n+1}(S_{n+1})]$$

Dalle definizioni date nel teorema, risulta che le funzioni $a_t(S_t)$ e $c_t(S_t)$ sono funzioni non negative per ogni $t = 0, \dots, N$.
Infatti per $k = N$ si ha $a_N = 1$ dunque $a_N > 0$; se si suppone che per $k = n+1, \quad a_{n+1} \geq 0$ riesce $a_n(s_n) = \mathbf{E}_{s_n}[a_{n+1}(S_{n+1}(1 - q_n(s_n)\Delta S_{n+1})^2] \geq 0$ per la proprietá della monotonia dell'aspettazione, da cui, usando l'induzione, $a_n \geq 0, \quad \forall n = 0, \dots, N-1$.
Analogamente, usando il fatto che $a_t \geq 0$, per ogni $t = 0, \dots, N$, si dimostra che $c_t \geq 0$, per ogni $t = 0, \dots, N$.
La funzione:

$$\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(v_n + \theta_{n+1}\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))^2 + c_{n+1}(S_{n+1})] \qquad (4.16)$$

essendo $a_{n+1} \geq 0$, risulta essere una funzione convessa di θ_{n+1}.
Allora esiste un controllo ottimale θ^*_{n+1} tale che il minimo in (4.16) é raggiunto per $t = n$ (quindi l'ipotesi **(HP)** é automaticamente vera) e per trovare θ^*_{n+1} basta imporre la seguente condizione:

$$\frac{d}{d\theta_{n+1}}\{\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(v_n + \theta_{n+1}\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))^2 + c_{n+1}(S_{n+1}]\} = 0$$

Derivando si ottiene:

$$\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(v_n + \theta_{n+1}\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))\Delta S_{n+1}] =$$

$$= v_n\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})\Delta S_{n+1}] - \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})b_{n+1}(S_{n+1})\Delta S_{n+1}] +$$

$$+\theta_{n+1}\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(\Delta S_{n+1})^2] = 0$$

e quindi il controllo ottimale al tempo $t = n$ é dato da:

$$\theta^*_{n+1} = \frac{\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})b_{n+1}(S_{n+1})\Delta S_{n+1}]}{\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(\Delta S_{n+1})^2]} -$$

$$-v_n\frac{\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})\Delta S_{n+1}]}{\mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(\Delta S_{n+1})^2]} =$$

$$= p_n(s_n) - v_n q_n(s_n)$$

quindi é verificata la (4.12) per $t = n$.Per ottenere la (4.11) basta sostituire la (4.12) nella (4.16), infatti si ottiene:

$$\mathbf{V}_n(x_n) = \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(v_n + (p_n(s_n) - v_n q_n(s_n))\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))^2 +$$

$$+ c_{n+1}(S_{n+1})] =$$

$$= \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(v_n(1 - q_n(s_n)\Delta S_{n+1}) + (p_n(s_n)\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))^2 +$$

$$+ c_{n+1}(S_{n+1})] =$$

$$= v_n^2 \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(1 - q_n(s_n)\Delta S_{n+1})^2] + \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(p_n(s_n)\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))^2] +$$

$$+ 2v_n \mathbf{E}_{x_n}[a_{n+1}(S_{n+1})(1 - q_n(s_n)\Delta S_{n+1})(p_n(s_n)\Delta S_{n+1} - b_{n+1}(S_{n+1}))] + \mathbf{E}[c_{n+1}(S_{n+1})]$$

e usando le definizioni di $a_n(s_n)$, $\quad b_n(s_n)$ e $c_n(s_n)$:

$$\mathbf{V}_n(x_n) = a_n(s_n)(v_n^2 - 2v_n b_n(s_n) + b_n^2(s_n)) + c_n(s_n) = a_n(s_n)(v_n - b_n(s_n))^2$$

$$+c_n(s_n)$$

quindi la (4.11) é verificata per ogni $t = 0, \dots, N$, in particolare per $t = 0$ risulta verificata la (4.13).
Per concludere la dimostrazione, banalmente si nota che il capitale iniziale che minimizza la (4.13) é proprio $v_0^* = b_0(s_0)$, dunque risulta:

$$\min_{v_0} \mathbf{V}_0(x_0) = a_0(s_0)(v_0^* - b_0(s_0))^2 + c_0(s_0) = c_0(s_0)$$

Il teorema é cosi dimostrato.

Dal precedente teorema si deduce che, se si introduce la quantitá che misura il rischio monetario residuo da sopportare, usando la strategia ottimale di replica:

$$\epsilon(v_0) := \sqrt{\inf_{\theta} J_0(x_0, \theta)} \tag{4.17}$$

allora $\epsilon^2(v_0)$ é una parabola con un unico punto di minimo in v_0^*, dove $v_0^* = b_0(s_0)$.Inoltre se si definisce il **minimo errore di replica** ϵ^* come:

$$\epsilon^* := \min_{v_0} \epsilon(v_0). \tag{4.18}$$

allora risulta che:

$$\epsilon^* = \sqrt{c_0(s_0)} \tag{4.19}$$

con $c_0 \geq 0$.
Naturalmente nella situazione di mercato completo, in cui esiste per ogni pay off una strategia ottimale che replica esattamente, riesce $\epsilon^* = 0$.

Corollario 4.1. *Sotto le ipotesi del teorema* 4.1*, se* $N = 1$ *(modello uniperiodale) risulta:*

$$v_0^* = b_0 = \mathbf{E}_{x_0}[F(S_0)] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1]}{Var(\Delta S_1)} Cov(F, \Delta S_1) \tag{4.20}$$

$$\theta_1^*(v_0^*) = \frac{Cov(F, \Delta S_1)}{Var(\Delta S_1)}. \tag{4.21}$$

Dimostrazione:
Dalle formule ottenute nel teorema 4.1 si ha:

$$v_0^* = b_0 = a_0^{-1}(S_0)\mathbf{E}_{x_0}[a_1(S_1)(b_1(S_1) - p_0(s_0)\Delta S_1)(1 - q_0(s_0)\Delta S_1)]$$

Ora, poiché $N = 1$ si ha:

$$a_1(S_1) = 1 \quad , b_1(S_1) = F(S_1)$$

e:

$$q_0 = \frac{\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}, \quad p_0 = \frac{\mathbf{E}_{x_0}[F\Delta S_1]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}.$$

Inoltre:

$a_0 = \mathbf{E}_{x_0}[(1 - q_0\Delta S_1)^2] = \mathbf{E}_{x_0}[(1 - 2q_0\Delta S_1 + q_0^2\Delta S_1^2] =$

$= 1 - 2(\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])(\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2])^{-1}\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1] +$

$+(\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])(\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2])^{-2}\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2] =$

$= 1 - (\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])^2(\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2])^{-1} =$

$= \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2] - (\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])^2}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}.$

Cioé:

$$a_0 = \frac{Var(\Delta S_1)}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]} \tag{4.22}$$

Quindi:

$b_0 = \frac{\mathbf{E}_{x_0}((\Delta S_1)^2]}{Var(\Delta S_1)}[\mathbf{E}_{x_0}[F - q_0 F\Delta S_1 - p_0\Delta S_1 + p_0 q_0(\Delta S_1)^2) =$

$$= \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}{Var(\Delta S_1)}(\mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}+$$

$$+\frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)]\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2) =$$

$$= \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}{Var(\Delta S_1)}(\mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)]) =$$

$$= \mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{Var(\Delta S_1)}{Var(\Delta S_1)}\mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}{Var(\Delta S_1)}[\mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)]) =$$

$$= \mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{1}{Var(\Delta S_1)}(\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)] - \mathbf{E}_{x_0}[F](\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)])^2) =$$

$$= \mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]}{Var(\Delta S_1)}(\mathbf{E}_{x_0}[(F\Delta S_1)] - \mathbf{E}_{x_0}[F]\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)])$$

che implica la (4.20).

Per ottenere la (4.21) basta sostituire la (4.20) nella seguente relazione:

$$\theta_1^* = p_0 - v_0^* q_0$$

Si ottiene:

$$\theta_1^* = \frac{\mathbf{E}_{x_0}[F\Delta S_1]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]} - (\mathbf{E}_{x_0}[F] - \frac{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)]}{Var(\Delta S_1)}Cov(F, \Delta S_1))\frac{\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1]}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}(\mathbf{E}_{x_0}[F\Delta S_1] - \mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1]\mathbf{E}_{x_0}[F] + \frac{(\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])^2}{Var(\Delta S_1)}Cov(F, \Delta S_1)) =$$

$$= \frac{Cov(F,\Delta S_1)}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]}(1 + \frac{(\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])^2}{Var(\Delta S_1)} =$$

$$= \frac{Var(\Delta S_1)+(\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1])^2}{\mathbf{E}_{x_0}[(\Delta S_1)^2]} = \frac{Cov(F,\Delta S_1)}{Var(\Delta S_1)}.$$

quindi la (4.21).

Osservazione 4.1. *Facciamo un'osservazione sul precedente corollario. Per le assunzioni fatte si ha che:*

$$\mathbf{E}_{x_0}[\Delta S_1] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_{x_0}[S_1 - S_0] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_{x_0}[S_1] = S_0$$

cioé se e solo se il processo di prezzo é una martingala rispetto alla misura di probabilitá P.
Quindi usando la (4.20)*,se il processo di prezzo é una P-martingala riesce:*

$$v_0^* = \mathbf{E}_{x_0}[F]$$

cioé si ritrova il risultato ottenuto nel secondo capitolo (teorema 2.1).

Osservazione 4.2. *Notiamo che i problemi* **(Min 1)** *e* **(Min2)** *nel caso $N = 1$ sono equivalenti ad un problema di regressione lineare, problema classico della statistica.*

Questo problema cerca di approssimare una variabile aleatoria H, osservando un certo numero di realizzazioni (osservazioni) di essa, con una certa funzione lineare $f(G) = a + bG$,dove G é un'altra variabile aleatoria; si dice che si cerca di "spiegare" la variabile aleatoria H usando la variabile G tramite la funzione lineare $f(\cdot)$. Poiché:

$$H = a + bG + (H - a - bG)$$

l'errore che si commette approssimando é $(H - a - bG)$.
Supponiamo H e G definiti nel medesimo spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ed entrambe di quadrato integrabile, allora si puó valutare l'errore nella norma $L^2(P)$, cioé cercare a e b che minimizzano:

$$\mathbf{E}^P[(H - a - bG)^2].$$

Quindi i problemi **(Min 1)** *e* **(Min2)** *nel caso $N = 1$ sono equivalenti a quello di cercare di "spiegare" la variabile aleatoria $F(S_1)$ con la variabile aleatoria $(v_0 + \theta_0 \Delta S_1)$ commettendo un certo errore da minimizzare nella norma $L^2(P)$ rispetto a v_0 e θ_0.*

Ora ritorniamo al risultato ottenuto nel teorema 4.1.
Ci si potrebbe aspettare che aumentando il capitale iniziale v_0 il rischio quadratico medio diminuisca, cioé che sia una funzione decrescente di v_0.
La tesi del teorema invece mette in luce chiaramente che $\epsilon^2(v_0)$ é una funzione quadratica di v_0, quindi esiste un unico v_0^* che rende minimo $\epsilon^2(v_0)$ e di conseguenza che fornisce l'errore di replica piú basso in assoluto in senso quadratico medio.

In questo senso v_0^* puó essere visto come il minimo costo per replicare il pay off alla scadenza, cioé quanto richiedere all'acquirente del contingent claim europeo affinché alla scadenza l'errore di replica ϵ^* sia minimo.
Allo stesso tempo, essendo in una situazione di mercato incompleto,v_0^* non puó essere visto come un prezzo.
Infatti, anche se tutti gli investitori possono essere d'accordo che v_0^* é il minimo costo per inizializzare la strategia ottimale di replica θ^*, non tutti possono avere lo stesso "gradimento" del rischio ϵ^*, cioé differenti investitori possono avere differenti preferenze a pagare tale costo per raggiungere l'errore di replica ϵ^*.
E in tal senso v_0^* non puó essere visto come un prezzo in un modello di mercato in equilibrio, in cui i prezzi di tutti i titoli presenti in esso sono determinati dall'uguaglianza tra legge di domanda e quella di offerta.
Tuttavia, se la misura di probabilitá originaria é una misura di martingala equivalente, si dimostra che il capitale iniziale v_0^* associato al problema:

$$\inf_{\theta} \mathbf{E}^Q[|V_N(\theta) - F(S_N)|^2]$$

dove Q é la misura di martingala equivalente, corrisponde proprio al prezzo di equilibrio di un contingent claim con pay off $F(S_N)$.
Come conseguenza l'algoritmo del teorema 4.1 fornisce proprio una strategia ottimale esplicita di replica, inizializzata con il prezzo di equilibrio del contingent claim.
Formalmente, se indichiamo con $H(t, S_t) \quad , t = 0, \ldots , N-1$ un dato processo di prezzo di un generico contingent-claim con pay-off $F(S_N)$ (cioé $H(t, S_t)$ é il prezzo del contingent-claim al tempo t), allora si definisce:

$$H(0, S_0)$$

come il **prezzo di equilibrio** di tale contingent claim.
Enunciamo e dimostriamo quanto detto precedentemente nel seguente teorema.

Teorema 4.2. *Sotto le ipotesi del teorema* 4.1 *il costo minimo* v_0^* *corrispondente al problema:*

$$\inf_\theta \mathbf{E}^Q[|V_N(\theta) - F(S_N)|^2]$$

con Q *misura di martingala equivalente, é il prezzo di equilibrio di un contingent claim con pay off* $F(S_N)$.

Dimostrazione:
Sia $H(t, S_t)$ il processo di prezzo del contingent claim con pay off $F(S_N)$.
Poiché Q é una misura di martingala equivalente, il processo di prezzo scontato di ogni titolo deve essere una Q-martingala.In questo caso il processo di prezzo e il processo di prezzo scontato coincidono ed essendo V_t una trasformata di martingala é esso stesso una Q-martingala.
Quindi si ha:

$$v_0^* = \mathbf{E}^Q[V_N^*]$$

dove V_N^* indica il valore finale del portafoglio associato alla strategia ottimale θ^*.
Inoltre, poiché la strategia θ^* minimizza:

$$\mathbf{E}^Q[|V_N(\theta) - F(S_N)|^2]$$

riesce:

$$\mathbf{E}^Q[|V_N^* - F(S_N)|] = 0$$

il che implica:

$$\mathbf{E}^Q[V_N^*] = \mathbf{E}^Q[F(S_N)].$$

Poiché il processo di prezzo é una Q-martingala, il prezzo di ogni titolo puó essere determinato semplicemente come l'aspettazione del suo pay off valutata rispetto alla misura Q e quindi si avrá:

$$H(0, S_0) = \mathbf{E}^Q[F(S_N)].$$

In conclusione si ha che:

$$v_0^* = \mathbf{E}^Q[V_N^*] = \mathbf{E}^Q[F(S_N)] = H(0, S_0)$$

cioé v_0^* coincide con il prezzo $H(0, S_0)$.

Mettiamoci ora sotto ipotesi piú generali.
Supponiamo sempre che il prezzo iniziale del bond B_0 sia pari ad un dollaro, ma che il tasso di interesse r non sia piú nullo ad ogni tempo, ma sia tale che $r = r(t) = r_t$.
Risulta:

- $B_1 = (1 + r_0)B_0 = (1 + r_0)$

-$B_2(1 + r_1)B_1 = (1 + r_0)(1 + r_1)$

$\dots$

-$B_t = (1 + r_{t-1})B_{t-1} = (1 + r_0) \cdots (1 + r_{t-1})$

$\dots$

-$B_N = (1 + r_{N-1})B_{N-1} = (1 + r_0) \cdots (1 + r_{N-1})$

Ora la relazione che deve verificare il processo di portafoglio $V_t(\gamma)$ affinché $\gamma_t = (b_t, \theta_t)$ sia una strategia autofinanziante risulta essere:

$$V_t = V_{t-1} + b_t \Delta B_t + \theta_t \Delta S_t \quad t = 1, \dots, N \tag{4.23}$$

Si vedrá come i risultati ottenuti precedentemente in questo capitolo per il problema di replica di un contingent claim europeo continuano a valere, con leggere modifiche, anche in questa situazione piú generale.
Prima diamo qui di seguito un risultato che ci sará utile per risolvere il problema proposto.

Lemma 4.1. *Sotto le ipotesi di mercato fatte precedentemente, se* $\gamma_t = (b_t, \theta_t) \in \mathcal{S}_{aut}$ *allora il processo di valore del portafoglio verifica la seguente relazione:*

$$V_t = (1 + r_{t-1})V_{t-1} + B_t \theta_t \Delta \overline{S}_t \quad t = 1, \dots, N \tag{4.24}$$

dove si ricorda che $\Delta \overline{X}_t = \overline{X}_t - \overline{X}_{t-1} = \frac{X_t}{B_t} - \frac{X_{t-1}}{B_{t-1}}$*, per ogni variabile aleatoria*

X *su* Ω.

Dimostrazione:
Per $t = 1$ si ha che il processo di valore scontato é dato da:

$$\overline{V}_1(\gamma) = \frac{1}{(1 + r_0)} V_1(\gamma)$$

da cui:

$$V_1(\gamma) = (1 + r_0)\overline{V}_1(\gamma).$$

Dalla (4.23) segue che:

$$\overline{V}_1(\gamma) = \overline{V}_0 + b_1 \Delta \overline{B}_1 + \theta_1 \Delta \overline{S}_1$$

Poiché $B_0 = 1\$$ riesce $\overline{V}_0 = V_0$ ed inoltre $\Delta \overline{B}_t = \frac{B_t}{B_t} - \frac{B_{t-1}}{B_{t-1}} = 0, \quad \forall t = 1, \ldots, N$, riesce:

$$V_1(\gamma) = (1 + r_0)(V_0 + \theta_1 \Delta \overline{S}_1) = V_0(1 + r_0) + B_0 \theta_1 \Delta \overline{S}_1.$$

quindi la tesi é verificata per $t = 1$.
Supponiamo che la (4.24) sia vera per $t = k - 1$ (ipotesi induttiva) allora é verificata per $t = k$.Infatti:

$$\overline{V}_k(\gamma) = \frac{V_k(\gamma)}{B_k}$$

da cui:

$$V_k(\gamma) = B_k\overline{V}_k(\gamma)$$

Dalla (4.23) e dal fatto che $\Delta\overline{B}_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots N$ risulta:

$$\overline{V}_k(\gamma) = \overline{V}_{k-1}(\gamma) + b_k\Delta\overline{B}_k + \theta_k\Delta\overline{S}_k = \frac{v_{k-1}}{B_{k-1}} + \theta_k\Delta\overline{S}_k.$$

Quindi si ottiene:

$$V_k(\gamma) = \frac{B_k}{B_{k-1}}V_{k-1} + B_k\theta_k\Delta\overline{S}_k =$$

$$= (1 + r_{k-1})V_{k-1} + B_k\theta_{k-1}\Delta\overline{S}_k$$

il che implica che la tesi é vera per ogni $t = 1, \dots, N$.

Il lemma precedente implica che il problema di replica:

$$\inf_{\gamma\in\mathcal{S}_{aut}} J_0(x_0, \gamma) := \inf_{\gamma\in\mathcal{S}_{aut}} \mathbf{E}_{x_0}[(V_N(\gamma) - F(S_N))^2]$$

anche in questo caso (come nel caso in cui $r_t = 0 \quad \forall t \in T$) si riconduce al problema:

$$\inf_{\theta\in\tilde{\mathcal{S}}_{aut}} J_0(x_0, \theta) := \inf_{\theta\in\tilde{\mathcal{S}}_{aut}} \mathbf{E}_{x_0}[(V_N(\theta) - F(S_N))^2].$$

Si ottiene il seguente risultato:

Teorema 4.3. *Sotto le assunzioni fatte precedentemente sul modello di mercato la soluzione del problema di ottimalitá:*

$$\inf_{\theta} J_0(x_0, \theta)$$

é caratterizzata dalle seguenti:

(A)' La funzione valore $\mathbf{V}_t$ *a partire dall'istante* t *é quadratica in* v_t *(valore assunto dal portafoglio al tempo* t*), cioé esistono funzioni* $\tilde{a}_t(s_t)$,$\tilde{b}_t(s_t)$ *e* $\tilde{c}_t(s_t)$ *tali che:*

$$\mathbf{V}_t = \tilde{a}_t(s_t)[v_t(1+r_t) - \tilde{b}_t(s_t)]^2 + \tilde{c}_t(s_t), \quad t = 0, \dots, N \tag{4.25}$$

(B)' Il controllo ottimale $\theta^*_{t+1} = \theta^*_{t+1}(x_t) = \theta^*_{t+1}(v_t, s_t)$ *ad ogni tempo* t *é lineare in* v_t*, cioé esistono funzioni* $\tilde{p}_t(s_t)$ *e* $\tilde{q}_t(s_t)$ *tali che:*

$$\theta^*_{t+1} = \frac{1}{B_{t+1}}[\tilde{p}_t(s_t) - v_t(1+r_t)\tilde{q}_t(s_t)], \quad t = 0, \dots, N \tag{4.26}$$

(C)' Le funzioni $\tilde{a}_t(\cdot)$,$\tilde{b}_t(\cdot)$,$\tilde{c}_t(\cdot)$,$\tilde{p}_t(\cdot)$ *e* $\tilde{q}_t(\cdot)$ *sono definite ricorsivamente come:*

$$\tilde{a}_N = \tilde{a}_N(s_N) := 1$$
$$\tilde{b}_N = \tilde{b}_N(s_N) := F(s_N)$$
$$\tilde{c}_N = \tilde{c}_N(s_N) := 0$$

e per $t = N-1, \dots, 0$*:*

$\tilde{p}_t(s_t) := (1+r_{t+1})^{-1}(\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})\tilde{b}_{t+1}(S_{t+1})\Delta\overline{S}_{t+1}])(\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})(\Delta\overline{S}_{t+1})^2])^{-1}$

$\tilde{q}_t(s_t) := (\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})\Delta\overline{S}_{t+1}])(\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})(\Delta\overline{S}_{t+1})^2])^{-1}$

$\tilde{a}_t(s_K) := (1+r_{t+1})^2\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})(1-\tilde{q}_t(s_t)\Delta\overline{S}_{t+1}))^2]$

$\tilde{b}_t(s_t) := \frac{1}{\tilde{a}_t(S_t)}\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})(\tilde{b}_{t+1}(S_{t+1})-(1+r_{t+1})\tilde{p}_t(s_t)\Delta\overline{S}_{t+1})(1-\tilde{q}_t(s_t)\Delta\overline{S}_{t+1})]$

$\tilde{c}_t(s_t) := \mathbf{E}_{s_t}[\tilde{c}_{t+1}(S_{t+1})]+\mathbf{E}_{s_t}[\tilde{a}_{t+1}(S_{t+1})(\tilde{b}_{t+1}(S_{t+1}-(1+r_{t+1})\tilde{p}_t(s_t)\Delta\overline{S}_{t+1})^2]-$

$-\tilde{a}_t(s_t)(\tilde{b}_t(s_t))^2$

(D)' Sotto la strategia ottimale di replica θ^* la funzione valore $\mathbf{V}_0$ come funzione del capitale iniziale v_0 é:

$$\mathbf{V}_0(x_0) = \tilde{a}_0(\xi_0)[v_0(1+r_0) - \tilde{b}_0(s_0)]^2 + \tilde{c}_0(s_0) \tag{4.27}$$

con $x_0 = (v_0, s_0)$, quindi il capitale iniziale ottimale v_0^* che risolve il problema:

$$\min_{v_0} \mathbf{V}_0(x_0)$$

risulta essere:

$$v_0^* = \frac{1}{(1+r_0)}\tilde{b}_0(s_0)$$

e il minimo errore di replica é:

$$\epsilon^* = \sqrt{\tilde{c}_0(s_0)} \tag{4.28}$$

Dimostrazione:
Per $t = N$,dalle definizioni di $\tilde{a}_N, \tilde{b}_n$ e $\tilde{c}_N$ e dal fatto che naturalmente é posto $r_N = 0$,la (4.25) risulta immediatamente verificata e la (4.25) segue dal fatto che,se $x_N = (v_N, s_N)$ allora:

$$\mathbf{V}_N(x_N) = J_N(x_N, \theta) = \mathbf{E}_{x_N}[|V_N(\theta)) - F(S_N)|^2] = (v_n - F(s_N))^2.$$

Supponiamo che la (4.25) e la (4.26) siano vere per $t = k+1$ (ipotesi induttiva), quindi supponiamo che:

$$\mathbf{V}_{k+1}(x_{k+1}) = \tilde{a}_{k+1}(s_{k+1})[v_{k+1}(1 + r_{k+1}) - \tilde{b}_{k+1}(s_{k+1})]^2 + \tilde{c}_{k+1}(s_{k+1})$$

Poiché l'ipotesi **(HP)** del teorema della programmazione dinamica, come vedremo nel seguito, é verificata, dal corollario 3.1 segue che:

$$\mathbf{V}_k(x_k) = \inf_{\theta} J_k(x_k, \theta) = \inf_{\theta_k} \mathbf{E}_{x_k}[\mathbf{V}_{k+1}(X_{k+1})] \tag{4.29}$$

con $x_k = (v_k, s_k)$.
Usando l'ipotesi induttiva, dalla (4.29) si ottiene:

$$\mathbf{V}_k(x_k) = \inf_{\theta_k} \mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[V_{k+1}(1 + r_{k+1}) - \tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})]^2 + \tilde{c}_{k+1}(S_{k+1})].$$

Inoltre il lemma 4.1 assicura che:

$$V_{k+1} = v_k(1 + r_k) + B_{k+1}\theta_{k+1}\Delta\overline{S}_{k+1}$$

quindi la funzione valore al tempo k é data da:

$$\mathbf{V}_k(x_k) = \inf_{\theta_k} \mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[v_k(1 + r_k)(1 + r_{k+1})+$$

$$+(1 + r_{k+1}B_{k+1}\Delta\overline{S}_{k+1}\theta_k - \tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})]^2 + \tilde{c}_{k+1}(S_{k+1})].$$

Per induzione si dimostra facilmente che $\tilde{a}_t \geq 0, \quad \tilde{c}_t \geq 0, \quad t = 0, \dots, N$ (vedi dimostrazione teorema 4.1).

Quindi la funzione:

$$J_k(x_k, \theta) = \mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[v_k(1{+}r_k)(1{+}r_{k+1}){+}(1{+}r_{k+1}B_{k+1}\Delta\overline{S}_{k+1}\theta_k{-}\tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})]^2{+}\tilde{c}_{k+1}(S_{k+1})$$

risulta essere una funzione convessa di θ_{k+1} e ció implica che esiste un unico punto di minimo assoluto θ^*_{k+1} (ovvero l'ipotesi **(HP)** del teorema 4.1 é verificata), dato dalla seguente condizione:

$$\frac{\partial J_k(x_k, \theta)}{\partial \theta_{k+1}} = 0$$

cioé:

$$\mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[v_k(1{+}r_k)(1{+}r_{k+1}){+}(1{+}r_{k+1}B_{k+1}\Delta\overline{S}_{k+1}\theta_{k+1}{-}\tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})](1{+}r_{k+1}B_{k+1}\Delta\overline{S}_{k+1}] = 0$$

da cui:

$$\theta^*_{k+1} = \frac{\mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})\tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})\Delta\overline{S}_{k+1}]}{(1+r_{k+1})B_{k+1}\mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})\Delta\overline{S}^2_{k+1}]} - v_k\frac{(1+r_k)}{B_{k+1}}\frac{\mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})\Delta\overline{S}_{k+1}]}{\mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})\Delta\overline{S}^2_{k+1}]}$$

e per come sono state definite le funzioni $\tilde{p}_k$ e $\tilde{q}_k$ riesce:

$$\theta^*_{k+1} = \frac{\tilde{p}(s_k)}{B_{k+1}} - v_k(1+r_k)\frac{\tilde{q}_k(s_k)}{B_{k+1}}$$

per cui la (4.26) é vera per $t = k$.

Inoltre sostituendo il valore di θ^*_{k+1} trovato, nell'espressione di $J_k(x_k, \theta)$, si ottiene:

$$\mathbf{V}_k(x_k) = \mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[v_k(1+r_k)(1+r_{k+1}) + (1+r_{k+1}\Delta\overline{S}_{k+1}\tilde{p}(s_k) -$$

$$-(1+r_k)(1+r_{k+1})\tilde{q}(s_k)\Delta\overline{S}_{k+1} - \tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})]^2 + \tilde{c}_{k+1}(S_{k+1})] =$$

$$= \mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[v_k(1+r_k)(1+r_{k+1})(1-\tilde{q}_k(s_k)\Delta\overline{S}_{k+1}) -$$

$$-(\tilde{b}_{k+1}(S_{k+1}) - (1+r_{k+1})\Delta\overline{S}_{k+1}\tilde{p}_k(s_k))]^2 + \tilde{c}_{k+1}(S_{k+1})] =$$

$$= \mathbf{E}_{x_k}[\tilde{a}_{k+1}(S_{k+1})[v_k^2(1+r_k)^2(1+r_{k+1})^2(1-\tilde{q}_k(s_k)\Delta\overline{S}_{k+1})^2-$$

$$-2v_k(1+r_k)(1+r_{k+1})(1-\tilde{q}_k(s_k)\Delta\overline{S}_{k+1})(\tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})-(1+r_{k+1})\Delta\overline{S}_{k+1}\tilde{p}_k(s_k))+$$

$$+(\tilde{b}_{k+1}(S_{k+1})-(1+r_{k+1})\Delta\overline{S}_{k+1}\tilde{p}_k(s_k))^2]+\tilde{c}_{k+1}(S_{k+1})]$$

e dalle definizioni delle funzioni $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ e $\tilde{c}_k$ risulta che anche la (4.25) é vera per $t = k$.Quindi le (4.25) e (4.26) sono vere per ogni $t = 1, \ldots, N$.Il teorema é cosi dimostrato.

Osservazione 4.3. *Si osserva che il teorema precedente é proprio la generalizzazione del teorema* 4.1.
Infatti se poniamo $r_t = 0, \forall t \in T$ *si ritrovano le formule del teorema* 4.1*, in quanto si ha:*

$$\tilde{p}_t = p_t \quad , \tilde{q}_t = q_t \quad , \tilde{a}_t = a_t \quad , \tilde{b}_t = b_t \quad , \tilde{c}_t = c_t \quad \forall t \in T.$$

Capitolo 5

Controllo robusto e strategie di copertura sub-ottimali

Consideriamo il modello di mercato proposto nel capitolo precedente, lasciando inalterate tutte le assunzioni fatte su di esso.
Dato lo spazio di probabilitá filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$, si ricordano i problemi affrontati precedentemente:

$$(\mathbf{Min1})^{\mathbf{P}}: \quad \inf_\theta J_0^P(x_0,\theta) = \inf_\theta \mathbf{E}^P_{(v_0,s_0)}[(V_N(\theta) - F(S_N))^2] = \epsilon_P^2(v_0)$$

$$(\mathbf{Min2})^{\mathbf{P}}: \quad \inf_{v_0}(\inf_\theta J_0^P(x_0,\theta)) = \inf_{v_0} \epsilon_P^2(v_0)$$

L'indice P sottolinea il fatto che il modello, e quindi la sua soluzione, dipendono dalla scelta della misura di probabilitá P.Il problema in questione presuppone che la P utilizzata corrisponda alla **reale misura di probabilitá** del processo di prezzo.
Nel mercato le informazioni sui parametri reali del modello, in particolare sulla reale probabilitá P, sono solo parziali.In altri termini la vera probabilitá P non é conosciuta.

In questo capitolo terremo conto di tale incertezza e studieremo la "sensibilitá" della soluzione ottima rispetto ad una specificazione non corretta dei parametri in gioco.Questo particolare tipo di problema é chiamato usualmente **controllo robusto** (vedi ad esempio [FR 00] e referenze in essa contenute).
Supponiamo, dunque, P sconosciuta.
Invece di risolvere i problemi (reali) $(\mathbf{Min1})^{\mathbf{P}}, (\mathbf{Min2})^{\mathbf{P}}$, si considerino i problemi "ipotetici":

$$(\mathbf{Min1})^{\mathbf{Q}}: \quad \inf_\theta J_0^Q(v_0,\theta) = \inf_\theta \mathbf{E}^Q_{(v_0,s_0)}[(V_N(\theta) - F(S_N))^2] = \epsilon_Q^2(v_0)$$

$$(\mathbf{Min2})^{\mathbf{Q}}: \quad \inf_{v_0}(\inf_\theta J_0^Q(v_0,\theta)) = \inf_{v_0} \epsilon_Q^2(v_0)$$

dove Q é una probabilitá "ipotetica" usata dall'investitore che non conosce la vera P, ma é soltanto capace di formulare delle ipotesi a riguardo.
Il teorema (4.1) fornisce le soluzioni ottimali:

$$\theta^{*,Q} \quad , v_0^{*,Q} \tag{5.1}$$

e il minimo errore di replica:

$$\epsilon_Q^* = \epsilon_Q(v_0^{*,Q}) = \sqrt{J_0^Q(v_0^{*,Q}, \theta^{*,Q}}. \tag{5.2}$$

Consideriamo ora:

$$J_0^P(v_0^{*,Q}, \theta^{*,Q}) = \mathbf{E}^P[(v_0^{*,Q} + \sum_{j=1}^N \theta_j^{*,Q} \Delta S_j - F(S_N))^2]. \tag{5.3}$$

Questa quantitá rappresenta l'errore quadratico a cui si é soggetti quando

viene perseguita la strategia sub-ottimale $\theta^{*,Q}$ e usato il capitale iniziale sub-ottimale $v_0^{*,Q}$, (ottimali per il problema "ipotetico"), nel problema $(\mathbf{Min2})^{\mathbf{P}}$.
Nella precedente relazione (5.3) é stato omesso,per semplicitá, l'indice per lo stato iniziale.
Lo scopo di questo capitolo é quello di fornire una risposta alla seguente domanda:
"Se l'investitore sbaglia a specificare il modello, questo errore, nel peggiore dei casi, quanto ulteriore rischio reale gli comporta rispetto al vero rischio minimale?"
Quindi si cerca di stimare:

$$\Delta(P,Q) := |\epsilon_P(v_0^{*,P}) - \epsilon_P(v_0^{*,Q})| \tag{5.4}$$

Nel seguito supporremo $N = 1$ (modello uniperiodale).
In questo caso la (5.4) diventa:

$$| \parallel v_0^{*,P} + \theta_1^{*,P} \Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} - \parallel v_0^{*,Q} + \theta_1^{*,Q} \Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} | \tag{5.5}$$

Inoltre faremo l'ipotesi che Ω **sia finito**, e sia n la sua cardinalitá.
Siano $p_i, q_i \quad , i = 1, \dots, n$ le probabilitá indotte sullo spazio degli stati del prezzo rispettivamente da P e Q.Assumeremo che siano tutte strettamente positive, cioé supponiamo:

$$q_i > 0 \quad , p_i > 0 \quad , i = 1, \dots, n$$

Per ogni variabile aleatoria Z su Ω si ha:

$$\mathbf{E}^P[Z] = \sum_{i=1}^{n} z_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (z_i \frac{p_i}{q_i}) q_i = \mathbf{E}^Q[ZG] \tag{5.6}$$

dove $G = (G_1, \ldots, G_n)$ tale che:

$$G_i = \frac{p_i}{q_i} \quad , i = 1, \ldots, n \tag{5.7}$$

Si ha il seguente risultato:

Teorema 5.1. *Sotto le assunzioni fatte precedentemente sul modello di mercato risulta:*

$$| \parallel v_0^{*,P} + \theta_1^{*,P} \Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} - \parallel v_0^{*,Q} + \theta_1^{*,Q} \Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} | \leq$$

$$\leq \gamma_1 \parallel 1 - G \parallel_\infty + \gamma_2 \parallel 1 - G \parallel_\infty^2 + \gamma_3 \parallel 1 - G \parallel_\infty^3 \tag{5.8}$$

con :

$$\gamma_1 = |\mathbf{E}^Q[F]|(1+\beta) + \delta^{-1}\beta|\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1)]|(1+\beta) + 2\beta(1 + |v_0^{*,Q}|)$$

$$\gamma_2 = \delta^{-1}\beta|\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]|(1+\beta) + \beta|\mathbf{E}^Q[F]|$$

$$\gamma_3 = \delta^{-1}\beta^2|\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]|$$

e:

$$\beta := (\inf_{P \in Pr(\Omega)} \mathbf{E}^P(\Delta S_1^2)^{-\frac{1}{2}})|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]| = \delta^{-1}|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]|$$

dove $Pr(\Omega)$ *é lo spazio delle probabilitá su* Ω.

Dimostrazione:

Per le note proprietá sulle norme, risulta:

$$| \parallel v_0^{*,P} + \theta_1^{*,P}\Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} - \parallel v_0^{*,Q} + \theta_1^{*,Q}\Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)}| \leq$$

$$\leq \parallel v_0^{*,P} + \theta_1^{*,P}\Delta S_1 - F(S_1) - (v_0^{*,Q} + \theta_1^{*,Q}\Delta S_1 - F(S_1)) \parallel_{L^2(P)} \leq$$

$$\leq |v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| + |\theta_1^{*,P} - \theta_1^{*,Q}| \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)}$$

Dal teorema 4.1 del precedente capitolo si ha che:

$$\theta_1^{*,P} = p_0^P - v_0^{*,P} q_0^P$$

con p_0^P, q_0^P definite come nel teorema 4.1.Analogamente si ha la stessa formula, scambiando Q con P, per $\theta_1^{*,Q}$.

Allora:

$$| \parallel v_0^{*,P} + \theta_1^{*,P}\Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} - \parallel v_0^{*,Q} + \theta_1^{*,Q}\Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)}| \leq$$

$$\leq |v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| + (|v_0^{*,P} q_0^P - v_0^{*,Q} q_0^Q| + |p_0^P - p_0^Q|) \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} \tag{5.9}$$

Usando sempre le formule ottenute nel teorema 4.1 segue che:

$$|v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| = |b_0^P - b_0^Q| =$$

$$= |\mathbf{E}^P[(F - p_0^P \Delta S_1)(1 - q_0^P \Delta S_1)] - \mathbf{E}^Q[(F - p_0^Q \Delta S_1)(1 - q_0^Q \Delta S_1)]|.$$

Sostituendo le espressioni di q_0^Q e p_0^Q si ottiene:

$$\mathbf{E}^Q[p_0^Q \Delta S_1] = \mathbf{E}^Q[q_0^Q F \Delta S_1] = \mathbf{E}^Q[q_0^Q p_0^Q \Delta S_1^2] = \frac{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]}{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]}$$

e analogamente:

$$\mathbf{E}^Q[p_0^P \Delta S_1 G] = \mathbf{E}^Q[q_0^P F \Delta S_1 G] = \mathbf{E}^Q[q_0^P p_0^P \Delta S_1^2 G] = \frac{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1 G]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1 G]}{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]}$$

con G definita come in (5.7).Da cui:

$$|v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| \leq$$

$$\leq |\mathbf{E}^Q[FG] - \mathbf{E}^Q[F]| + |\frac{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]}{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]} - \frac{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1 G]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1 G]}{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]}| =$$

$$= |\mathbf{E}^Q[FG] - \mathbf{E}^Q[F]| + \frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]|} |\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G] -$$

$$-\mathbf{E}^Q[\Delta S_1 G]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1 G]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]| =$$

e aggiungendo e sottraendo opportune aspettazioni:

$$= |\mathbf{E}^Q[FG]-\mathbf{E}^Q[F]|+\frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|}|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1](\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2(G-1)])+$$

$$+\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2](\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1] - \mathbf{E}^Q[\Delta S_1 G]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1 G])| =$$

$$= |\mathbf{E}^Q[FG]-\mathbf{E}^Q[F]|+\frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|}|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1](\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2(G-1)])+$$

$$+\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2](\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1(1-G)] + \mathbf{E}^Q[\Delta S_1 G]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1(1-G)]| =$$

$$= |\mathbf{E}^Q[FG]-\mathbf{E}^Q[F]|+\frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|}|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1](\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2(G-1)])+$$

$$+\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2](\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1(1-G)]+\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1(1-G)]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1(G-1)])| \leq$$

$$\leq |\mathbf{E}^Q[F]| \parallel 1-G \parallel_\infty + \frac{|\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]|}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|}(\parallel 1-G \parallel_\infty + \parallel 1-G \parallel_\infty^2)$$

Ora poniamo:

$$\alpha := |\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]|\tilde{\beta}$$

con:

$$\tilde{\beta} := \frac{\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]}{\mathbf{E}^P[\Delta S_1^2]}$$

Risulta:

$$|v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| \leq \| 1 - G \|_\infty (|\mathbf{E}^Q[F]| + (|\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]|)(\mathbf{E}^P[\Delta S_1^2])^{-1})+$$

$$+ \| 1 - G \|_\infty^2 (\mathbf{E}^Q[F\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]|)(\mathbf{E}^P[\Delta S_1^2])^{-1} =$$

$$=\| 1 - G \|_\infty (|\mathbf{E}^Q[F]| + \alpha)+ \| 1 - G \|_\infty^2 \alpha \tag{5.10}$$

Inoltre:

$$|v_0^{*,P} q_0^P - v_0^{*,Q} q_0^Q| =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|} |v_0^{*,P}\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1(G)] - v_0^{*,Q}\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]| =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|} |v_0^{*,P}\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1(G-1)] +$$

$$+\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2](v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}) + v_0^{*,Q}\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2(1-G)]| \leq$$

$$\leq \tilde{\beta}|v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| + \tilde{\beta} \parallel 1-G \parallel_\infty ||(|v_0^{*,P}| + |v_0^{*,Q}|) \leq$$

$$\leq \tilde{\beta}|v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| + \tilde{\beta} \parallel 1-G \parallel_\infty (|v_0^{*,P} - v_0^{*,Q}| + 2|v_0^{*,Q}|)$$

e usando la (5.10) risulta:

$$|v_0^{*,P}q_0^P - v_0^{*,Q}q_0^Q| \leq$$

$$\tilde{\beta}(\parallel 1-G \parallel_\infty (|\mathbf{E}^Q[F]| + \alpha) + \parallel 1-G \parallel_\infty^2 \alpha) + \tilde{\beta} \parallel 1-G \parallel_\infty (|\mathbf{E}^Q[F]| + \alpha) +$$

$$+ \parallel 1-G \parallel_\infty^2 \alpha\tilde{\beta} + +\tilde{\beta}| \parallel 1-G \parallel_\infty 2|v_0^{*,Q}| \tag{5.11}$$

Infine:

$$|p_0^Q - p_0^P| = \frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|}|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1 G] - \mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2 G]|}|\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1(G-1)] + \mathbf{E}^Q[\Delta S_1]\mathbf{E}^Q[\Delta S_1^2(1-G)]| \leq$$

$$\leq 2\beta \parallel 1-G \parallel_\infty \tag{5.12}$$

Dalle $(5.9), (5.10), (5.11)$ e (5.12) segue :

$$| \parallel v_0^{*,P} + \theta_1^{*,P} \Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)} - \parallel v_0^{*,Q} + \theta_1^{*,Q} \Delta S_1 - F(S_1) \parallel_{L^2(P)}| \leq$$

$$\leq \parallel 1-G \parallel_\infty [(|\mathbf{E}^Q[F]| + \alpha) + \tilde{\beta} \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} (|\mathbf{E}^Q[F]| + \alpha) +$$

$$+2\tilde{\beta} \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} |v_0^{*,Q}| + 2\tilde{\beta} \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)}] +$$

$$+ \parallel 1-G \parallel_\infty^2 [\alpha + \tilde{\beta}\alpha \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} + \tilde{\beta} \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} (|\mathbf{E}^Q[F]| + \alpha)] +$$

$$+ \parallel 1-G \parallel_\infty^3 [\alpha\tilde{\beta} \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)}]$$

Usando le definizioni di β e di δ:

$$\beta := (\inf_{P \in Pr(\Omega)} \mathbf{E}^P (\Delta S_1^2)^{-\frac{1}{2}}) |\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]| = \delta^{-1} |\mathbf{E}^Q[\Delta S_1]|$$

e osservando che:

$$\parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} = \sqrt{\mathbf{E}^P[\Delta S_1^2]}$$

si ottiene:

$$\tilde{\beta} \parallel \Delta S_1 \parallel_{L^2(P)} \leq \beta \quad , \alpha \leq \delta^{-1} \beta |\mathbf{E}^Q[F \Delta S_1]|$$

da cui la (5.8).

Il teorema appena dimostrato permette di dare una risposta alla domanda fatta ad inizio capitolo.
Infatti avendo supposto Ω finito con cardinalitá n, si ha:

$$\parallel 1 - G \parallel_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |1 - \frac{p_i}{q_i}|.$$

Sia i_0 tale che:

$$|1 - \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}| = \sup_{1 \leq i \leq n} |1 - \frac{p_i}{q_i}|$$

Da cui:

$$\parallel 1 - G \parallel_\infty \leq \sup_{0 \leq p_{i_0} \leq 1} |1 - \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}|$$

e poiché $[0, 1]$ é un compatto, esiste $M(q_{i_0})$ tale che:

$$\sup_{0 \leq p_{i_0} \leq 1} |1 - \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}| \leq M(q_{i_0})$$

Quindi dal teorema 5.1 e dalla disuguaglianza precedente risulta che:

$$\Delta(P, Q) \leq \gamma_1 M(q_{i_0}) + \gamma_2 M(q_{i_0})^2 + \gamma_3 M(q_{i_0})^3 \tag{5.13}$$

con $\gamma_i, \quad i = 1, 2, 3$ non dipendenti da P.Dunque,la (5.13) ci fornisce la stima a "priori" (cioé non conoscendo P) cercata.

Osservazione 5.1. *Il teorema 5.1 puó in particolare essere applicato all'esempio proposto nel capitolo 2.*

Appendice A

Nozioni di processi stocastici e martingale

Assumiamo che tutte le definizioni e le considerazioni seguenti siano fatte rispetto ad uno spazio di probabilita':

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

dove:

- Ω é lo spazio degli eventi elementari ω

- $\mathcal{F}$ é una $\sigma - algebra$ di sottoinsiemi di Ω

- P é una misura di probabilita' su $\mathcal{F}$

Definizione A.1. *Una famiglia $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ di σ-algebre tale che:*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$$

é detta **Filtrazione**.
$\mathcal{F}_n$ *é l'informazione disponibile fino al tempo n incluso, l'ipotesi di filtrazione equivale a dire che l'informazione é crescente con il tempo.*
Il modello probabilistico $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ **é detto spazio di probabilita filtrato**.

Definizione A.2. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ *uno spazio di probabilitá filtrato con tempo discreto* $n \geq 0$.
Una successione di variabili aleatorie $X = (X_n)_{n\geq 0}$ *su* $(\Omega, \mathcal{F})$ *e a valori in uno spazio misurabile, é detto un processo stocastico* **adattato** *alla filtrazione* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *se* X_n *é* $\mathcal{F}_n$*-misurabile* $\forall n \geq 0$.

Da ora in poi con la notazione $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ indicheremo che il processo stocastico X é adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Definizione A.3. *Diremo che un processo stocastico* $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *é una* **martingala** *(rispettivamente una* **supermartingala,submartingala***)* *se* $\mathbf{E}(|M_n|) < \infty$ *per ogni* $n \geq 0$ *e:*

$$\mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \quad q.c. \quad \forall n \geq 1 \tag{A.1}$$

(rispettivamente $\leq M_{n-1}, \geq M_{n-1}$*).*

Riassumiamo le proprietá fondamentali delle martingale nel seguente teorema:

Teorema A.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ *uno spazio di probabilitá filtrato con tempo discreto* $n \geq 0$*. Valgono le seguenti proprietá:*

(a) Se $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *é una martingala allora ogni combinazione lineare di* M *é essa stessa una martingala.*

(b) $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *é una martingala se e solo se:*

$$\mathbf{E}(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0 \quad \forall n \geq 0 \tag{A.2}$$

(c) $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *é una martingala se e solo se:*

$$\mathbf{E}(M_{n+t}|\mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall t \geq 0 \tag{A.3}$$

(d) $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *é una martingala se e solo se:*

$$\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}(M_{n-1}) = \ldots = \mathbf{E}(M_0) \tag{A.4}$$

Dimostrazione:
(a): segue banalmente dalla linearitá dell'aspettazione.
(b): se M é una martingala, allora usando la linearitá dell'aspettazione e la (A.1) si avrá:

$$\mathbf{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = M_n - \mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n - M_n = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

da cui la (A.2).
Viceversa se la (A.2) é verificata allora:

$\mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n$

quindi M é martingala.
(c): se M é martingala allora, usando la nota proprietá dell'aspettazione condizionata:

$\mathbf{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})$

data X variabile aleatoria e $\mathcal{H}$ sotto σ-algebra di $\mathcal{G}$,segue:

$\mathbf{E}(M_{n+t}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(M_{n+t}|\mathcal{F}_{n+t-1})|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(M_{n+t-1}|\mathcal{F}_n) = \ldots = \mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$

Viceversa se la $(A.3)$ é verificata $\forall t \geq 0$ allora per $t = 1$ si ha proprio la $(A.1)$.
(d): Da (b) segue immediatamente che M é martingala se e solo se:

$$\mathbf{E}(\Delta M_n) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

quindi la (d).

Corollario A.1. *Sia* $M_n = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$ *con* X *variabile aleatoria tale che* $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$ *allora* $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$ *é martingala.*

Dimostrazione:

$\mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n) = M_n$

da cui la tesi.

Definizione A.4. *Un processo* $A = (A_n,\mathcal{F}_n)$ *si dice un processo* **prevedibile***(o predicibile) se:*

i) $A_0 = 0$

ii)A_{n+1} *é* $\mathcal{F}_n$*-misurabile* $\forall n \geq 1$

Definizione A.5. *Sia* $M = (M_n,\mathcal{F}_n)$ *un processo stocastico e sia* $Y = (Y_n,\mathcal{F}_{n-1})$ *un processo predicibile.*
Chiameremo **trasformata** *di* M*:*

$$Y \cdot M = ((Y \cdot M)_n, \mathcal{F}_n) \tag{A.5}$$

dove:

$$(Y \cdot M)_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta M_k$$

Se M *é una martingala allora* $Y \cdot M$ *é detta* **trasformata di martingala**.

Se Y é un processo predicibile limitato e M martingala, allora la trasformata di martingala $(A.5)$ é essa stessa una martingala, infatti ponendo $X = Y \cdot M$,si ha $E(X) < +\infty$ ed inoltre:

$$\mathbf{E}(\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(Y_{n+1} \cdot \Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Y_{n+1}\mathbf{E}(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$$

quindi X é martingala con $X_0 = 0$.

Teorema A.2. *Sia* $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *un processo stocastico tale che* $E(|M_n|) < \infty$ *allora* $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *é una martingala se e solo se:*

$$\mathbf{E}((Y \cdot M)_n) = \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta M_k) = 0 \tag{A.6}$$

Dimostrazione:
Se M é una martingala allora $X = Y \cdot M$ é martingala con $X_0 = 0$.
Da $(A.4)$ segue che:

$$\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_0) = 0$$

cioé la (A.6).
Viceversa se é verificata la $(A.6)$ per ogni processo predicibile Y limitato, preso $s > 0$ e $A \in \mathcal{F}_s$, definiamo un processo predicibile Y come:
$Y_{s+1} = \chi_A$ $Y_n = 0$ per n diverso da $s+1$.
Cosi per ogni $n > s$ si ha:

$$0 = \mathbf{E}((Y \cdot M)_n) = \mathbf{E}(\chi_A(M_{s+1} - M_s))$$

Poiché la precedente uguaglianza vale per ogni $A \in \mathcal{F}_s$ si ha che $\mathbf{E}(\Delta M_{s+1}|\mathcal{F}_s) = 0$ cioé M é martingala.
Per ulteriori approfondimenti e/o chiarimenti si rimanda ad esempio a [FL 95].

Appendice B

Teorema di separazione degli insiemi convessi

Definizione B.1. *Un insieme X di $\mathbb{R}^n$ é un* **insieme convesso** *se per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in (0,1)$ risulta $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$.*

Esempio B.1. *L'insieme:*

$$C := \{Y \in \mathbb{R}^n : Y \geq 0, \exists i : Y_i > 0\}$$

si dimostra,facilmente,essere un insieme convesso.L'insieme C cosi definito é detto **cono convesso**.

Teorema B.1. *(***di separazione degli insiemi convessi.***)*
Sia L un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ e K un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}^n$ disgiunto da L.Allora si puó separare strettamente L da K con un iperpiano contente L, cioé esiste un funzionale(limitato) lineare $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\phi(x) = 0, \forall x \in L$ e $\phi(x) > 0, \forall x \in K$.

Dimostrazione:
Sia C un arbitrario sottoinsieme chiuso convesso di $\mathbb{R}^n$ e tale che non con-

tenga l'origine.
Si mostrerá che esiste un funzionale lineare ϕ su $\mathbb{R}^n$ tale che il suo nucleo, $ker\phi = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$, sia ad intersezione vuota con C.
Sia:

$$B = B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$$

la palla chiusa in $\mathbb{R}^n$ di raggio r e centro l'origine.Si scelga r in modo tale che $B \cap C \neq \emptyset$. Allora $B \cap C$ é un insieme non vuoto chiuso e limitato, quindi compatto, cosicché la mappa continua $x \rightarrow |x|$ raggiunge il suo minimo in $B \cap C$,cioé:

$$\exists z \in B \cap C \quad : \inf_{x \in B \cap C} |x| = |z|$$

(dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$).
Poiché $z \in B \cap C$ allora $|z| \leq r$, inoltre se $x \notin B$ si ha $|x| > r$ e se $x \in B \cap C$ si ha $|x| \leq |z|$, allora si avrá che $\forall x \in C$ si ha $|x| \geq |z|$.
In particolare poiché C é convesso, dato $x \in C$ risulta che $y = \lambda x + (1 - \lambda)x \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$.Quindi si ha:

$$|\lambda x + (1 - \lambda)x|^2 \geq |z|^2$$

cioé:

$$2\lambda(1 - \lambda) < x, z > +(1 - \lambda)^2 < z, z > \geq < z, z >$$

dove $< \cdot, \cdot >$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.
Allora si ottiene:

$$2(1-\lambda) < x,z > -2 < z,z > +\lambda(< x,x > + < z,z >) \geq 0 \quad ,\forall \lambda \in [0,1]$$

e mandando λ a zero riesce:

$$< x,z > \geq |z|^2 > 0$$

Sia:

$$\phi(x) =< x,z >$$

allora $\phi(x)$ é un funzionale lineare limitato su C, infatti la linearitá risulta ovvia dalla linearitá del prodotto scalare e la limitatezza consegue dal fatto che esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che:

$$| < x,z > | \leq |x||z| \leq M \quad \forall x \in C$$

Ora sia K un convesso chiuso disgiunto dal sottospazio lineare L.Definiamo:

$$C = K - L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = k - l, k \in K, l \in L\}$$

poiché sia K che L sono convessi si ha che C é un convesso, inoltre C é chiuso; infatti, se $x_n = k_n - l_n$ é una successione in C convergente a qualche $x \in \mathbb{R}^n$ allora poiché K é compatto k_n ha una sottosuccessione k_{n_r} convergente a qualche $k \in K$.Cosi $x_{n_r} = k_{n_r} - l_{n_r} \to x$ e $k_{n_r} \to k$ per $r \to +\infty$,quindi $l_{n_r} = k_{n_r} - x_{n_r} \to l = k - x$ con $l \in L$ poiché L é chiuso.Ma allora $x = k - l \in C$ e quindi C é chiuso.

Inoltre per ipotesi si ha $0 \notin C$ quindi $K \cap L = \emptyset$ e allora possiamo applicare la prima parte della dimostrazione all'insieme C.Quindi esiste un funzionale lineare limitato $\phi(x)$ su $\mathbb{R}^n$ tale che $\phi(x) \geq |z|^2$ con z definito come precedentemente.In altre parole se $x = k - l$ si ha:

$$\phi(x) = \phi(k) - \phi(l) \geq |z|^2 > 0 \quad , \forall x \in C$$

Fissiamo k e rimpiazziamo l con λl per un arbitrario $\lambda > 0$ se $\phi(l) \geq 0$ o con λl per un arbitrario $\lambda < 0$ se $\phi(l) < 0$.Poiché $\lambda l \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ per la linearitá di L si deve avere, poiché ϕ é limitato, $\phi(l) = 0$ cioé L risulta essere un sottospazio dell'iperpiano $ker\phi = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$ mentre $\phi(K)$ é limitato dal basso dal numero positivo $|z|^2$.Questo prova il teorema.

Diamo qui di seguito anche un altro fondamentale risultato che ci fornisce una rappresentazione di un funzionale lineare limitato tramite prodotto scalare. Notiamo che tutte le nozioni di questa appendice valgono in generale in spazi di Hilbert arbitrari, ma relativamente ai nostri scopi ci basta esporli per lo spazio $\mathbb{R}^n$(che é uno spazio di Hilbert).

Teorema B.2. *(***di rappresentazione di Riesz***).*
Sia f un funzionale lineare limitato su $\mathbb{R}^n$.Allora esiste un unico vettore $y_f \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$f(x) =< x, y_f > \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Viceversa ogni vettore $y \in \mathbb{R}^n$ definisce un funzionale lineare limitato f_y su $\mathbb{R}^n$ con:

$$f_y(x) =< x, y > \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione:
L'unicitá di y_f risulta ovvia dal fatto che se $< x, z >= 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ allora $z = 0$.Infatti se l_f é un altro vettore in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(x) =< x, l_f >$ allora si avrá che $< x, y_f - l_f >= 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e quindi l'unicitá.
Per provare l'esistenza si consideri lo spazio:

$$kerf = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

e poiché f é continuo(dalla limitatezza) e lineare si avrá che $kerf$ é un sottospazio lineare chiuso.Il teorema risulta ovvio se $kerf = \mathbb{R}^n$ infatti basta prendere $y_f = 0$.Quindi si supponga che $kerf \neq \mathbb{R}^n$, allora esiste un vettore $y_0 \neq 0, y_0 \in (kerf)^{\perp}$.Definiamo:

$$y_f = \frac{f(y_0)}{|y_0|^2} y_0$$

Allora se $x \in kerf$ riesce $f(x) =< x, y_f >$ poiché entrambi si annullano; se x é della forma $x = \alpha y_0$(cioé x appartiene alla varietá lineare generata da y_0) riesce:

$$< x, y_f >=< \alpha y_0, y_f >=< \alpha y_0, \frac{f(y_0)}{|y_0|^2} y_0 >= \alpha f(y_0) = f(\alpha y_0) = f(x)$$

poiché entrambi $f(x)$ e $< x, y_f >$ sono lineari in x.
Quindi l'uguaglianza $f(x) =< x, y_f >, x \in \mathbb{R}^n$ rimane dimostrata se si prova che $\mathbb{R}^n$ é generata da $kerf$ e da y_o.
Ma infatti,poiché $y_0 \in (kerf)^{\perp}$ si ha $f(y_f) \neq 0$ e preso $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario,x puó essere decomposto nella seguente maniera:

$$x = (x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f) + \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f$$

con il primo termine appartenente a $kerf$, infatti per la linearitá di f:

$$f(\frac{f(x)}{f(y_f)}y_f)f(x) - f(x) = 0$$

e quindi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ puó scriversi come somma di un elemento appartenente a $kerf$ e di un elemento appartenente a $\mathbb{R}y_0$(varietá lineare generata da y_0) e per la linearitá del prodotto scalare si avrá $f(x) =< x, y_f >$.
Viceversa la linearitá risulta ovvia dalla linearitá del prodotto scalare ed inoltre poiché risulta:

$$|f_y(x)| = | < x, y > | \leq |x||y|, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

si avrá che f_y é limitato.
Per ulteriori approfondimenti sulle precedenti nozioni si rimanda, ad esempio, alle referenze [YO 80] e [BR 86].

Bibliografia

- [BLS 91]: F.Black, M:Scholes, "Pricing of options and Corporate Liabilities", 1973 Journal of Political Economy 81.

- [BKL 97]: D.Bertsimas, L.Kogan, A.W.Lo, "Pricing and Hedging Derivative Securities in Incomplete Markets: An ϵ-Arbitrage Approach", 1997 Working Paper 6250.

- [BR 86]: H.Brezis, "Analisi Funzionale", Liguori Editore 1986.

- [DR 91]: D.Duffie, M.Richardson, "Mean-Variance Hedging in Continuos Time", 1991 Annals of Applied Probability 1.

- [DR 97]: G.Demange, J.C. Rochet, "Methodes Mathematiques de la finance", Economica 1997.

- [EK 99]: R.J.Elliot, P.E.Kopp, "Mathematics of Financial Markets", Springer 1999.

- [FR 00]: G.Favero, W.J.Runggaldier, "A robustness result for stochastic control", 2000 Preprint, Universitá di Padova.

- [HLL 96]: O.Hernandez-Lerma, J.B: Lasserre, "Discrete-Time Markov controll processes: Basic optimality criteria", Springer 1996.

- [FL 95]: Gregory F.Lawler, "Introduction to stochastic processes", Chapman & Hall 1995.

- [ME 73]: R.Merton, "Theory of rational option pricing", 1973 Journal of economics and management science 4.

- [MQ 96]: M.Magill, M.Quinzii, "Theory of Incomplete Markets", Vol.1 Mit Press 1996.

- [SCL 94]: M.Schal, "On quadratic Cost criteria for Option hedging", 1994 Mathematics of Operations Research 19.

-[SHY 99]: Shirayev, "Essential of Stochastic Finance", World Scientific 1999
- [TE 97]: A.Tesei, "Istituzioni di Analisi superiore", Bollati Boringhieri 1997.

- [YO 80]: K.Yosida, "Functionaly Analysis", Springer 1980.

- [SCW 95]: M.Schweizer, "Variance-Optimal Hedging in Discrete Time", 1995 Mathematics of Operations Research 20.

Ringraziamenti

”L’aleatorietá della vita spesso ti offre la possibilitá di afferrare un traguardo...tutto sta nell’essere determinati a scegliere e a volere anche nel momento in cui tutto é buio e incerto.
Forse é un peccato aver perso tempo per capirlo...ma vi assicuro che averlo capito é ancor piú che un traguardo!”

Stavo rimbiancando il mio garage, quando mia madre entró con lo sguardo dubbioso...aveva in mano un libriccino, il ”Benvenuti a Matematica, Roma Tre”, voleva farmi riprendere gli studi, voleva farmi prendere il Diploma in Matematica...”uff, ancora con questa storia”...ma mia madre é l’unica persona piú testarda di me, diceva che era una spreco buttare cosi la mia testa e allora un caldo giorno di Giugno mi ritrovai davanti ad Antonella Baldi (zia Lella)...non ci crederete ma ho preso il Diploma e vi diró di piú, mi sto laureando!!!
Questo uno degli infiniti motivi per cui dedico tutto ció a mia madre, non solo la mia tesi ma tutte le emozioni che in questo momento ho dentro...”Grazie Mammut, grazie per essere una donna cosi stupenda e vera, per la fiducia che hai avuto in me, per avermi insegnato a guardare la vita senza aver paura di guardarla!!”
Perché la Matematica?!Bé bisogna proprio ringraziare il mio papá, che da piccola tra una altalena ed uno scivolo mi proponeva qualche stupendo quiz per ”piccoli matematici” e mi raccontava favole come quella di un certo Newton che a soli 7 *anni si inventó una formula!!Lo devo ringraziare per la stima che ha avuto sempre in me (ed é piú che reciproca), per avermi trasmesso questa passione ed altre (la musica,il buon vino...), lo ringrazio per avermi insegnato ad usare la ”logica” in ogni situazione!! E ora tocca ringraziare la mia sorellaccia pazza scatenata!!”Monicacca grazie per il tuo entusiasmo e per il tuo abbraccio sempre presente quando ho bisogno, sei un pezzo di me, non te ne scordare mai!!”*
Ed ecco i miei stupendi fratelli!Ho una stima infinita verso entrambi, hanno un senso della responsabilitá e allo stesso tempo una vitalitá da ammirarli...e poi ditemi, c’é qualcuno piú bello di loro?!!

Voglio ringraziare il Prof.Sergio Scarlatti.Lo devo ringraziare per la sua enorme disponibilitá, per il suo modo di farmi capire le cose in profonditá, facendomi appassionare al lavoro e per il suo enorme zaino disordinato in cui c'é tutto ma per cercarlo c'é tempo di riprendere fiato tra un calcolo e l'altro!
Un grazie particolare al gruppo "S.Crispino", il gruppo di studio e di svago dell'Universitá; ringrazio Katia,Barbara,Patrizia,Ramina,Perla e Simonetta perché ognuna di loro a modo suo mi ha regalato tanti sorrisi; un grazie particolare a Cristiana, un'altra mamma, che ha fatto il mio stesso cammino, grazie anche per avermi ricordato sempre di pagare le tasse (cosa fondamentale per arrivare fin qui)!
E come non ringraziare la mia piccola Valeria, perché condivide la mia quoti-
dianeitá riempiendomi di energia, perché tra noi non esiste malizia e ipocrisia, perché ha una sensibilitá enorme e anche perché mi ha fatto conoscere persone stupende come il "Biondino", il "Baffetto", ma specialmente la mia Sarotti: una persona con cui ti "sintonizzi" cosi non si incontra tutti i giorni!La ringrazio perché é riuscita a farmi superare paure e difetti, perché é unica e riesce a farmi confidare con naturalezza, perché con lei rido di cuore ma riesco anche a piangere...e poi perché é riccia!!
Ringrazio Ciruzzetta perché mi é stata vicina in momenti particolari, perché mi conosce come le sue tasche e perché é vera e io la adoro;ringrazio Giorgia perché mi ha insegnato a guardarmi allo specchio e a trovare la forza dentro di me, perché é riuscita a farmi suonare con lei facendomi superare la timidezza e perché mi chiama "la sua Ciuccellona"!
Ringrazio la vitalitá della Cungy, i suoi balletti; la stimo perché é una persona che vale!Grazie a Bettolina perché ha combattuto per restarmi vicino, perché é una persona di cui mi posso fidare ciecamente!
Poi mi sono ritrovata a voler bene a Luca senza accorgermene...lo ringrazio per la sua sinceritá e per le infinite cene a casa sua.
Ringrazio Ulietta...per il casino che abbiamo fatto insieme, perché mi ha sopportato e perché, anche se ora le nostre strade si sono divise mi fa sentire ancora speciale!
Ancora vado a rileggere la prima pagina del libro di Analisi I in cui c'é una dedica di Giulia (la"bionda"), grazie per avermi insegnato a stimarmi e avermi dato la voglia di essere me stessa!
Ringrazio tutti i miei amici di infanzia,Veronica,Stefano,Silvio... Ringrazio la mia isola, Filicudi, per la sua bellezza e per il suo odore e per tutte le persone stupende che mi ha fatto conoscere (Serena,Diego e tutte le Amazzoni Alcoliche!).
Ringrazio la musica, perché mi fá battere il cuore, la mia chitarretta perché mi ha donato tanti momenti di sfogo e ringrazio "l'emozione che tutto puó!"
E ora voglio ringraziare Simone,la persona che mi ha riempito il cuore a tal pun-

to da far crollare tutte le mie teorie sul "faccio tutto da sola"!!Ha sopportato la mia lunaticitá e mi ha insegnato ad amare senza paura, lo ringrazio per avere quelle guance e quelle labbrucchie cosi morbide, per il suo abbraccio che mi ingloba.Quando sto con lui, al di fuori mi sembra tutto piú piccolo, perché io e lui siamo cosi grandi e luminosi!!"Grazie amore mio per essere qui accanto a me in questo momento in cui mi sembra di sognare!"
Mi sto laureando, mi dó un pizzicotto...e si,sono sveglia!!!

Giorgia.