UNIVERSITÁ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Matematica

Valutazione di derivati in modelli regime-switching

Il Candidato
Valentina Anzellotti

Il Relatore
Prof. Alessandro Ramponi

Anno Accademico 2005-2006
Maggio 2007

Classificazione: 91B28-65C50-65M70
Parole chiave: Modelli di diffusione con salti, valutazione di opzioni.

Sintesi

Il lavoro svolto in questa tesi ha come obiettivo principale la valutazione di derivati finanziari. Con il termine *derivato* intendiamo un qualsiasi prodotto finanziario il cui valore dipenda da quello di un qualsiasi altro bene quotato sul mercato (bene sottostante).

Il modello classico e più rilevante della letteratura finanziaria, il Modello di Black-Scholes, è basato sull'assunzione che il prezzo di tali beni segua un processo di tipo diffusivo, in particolare il moto Browniano Geometrico (GBM), in cui il termine di drift e la volatilità sono assunte come delle costanti deterministiche. Studi empirici hanno però evidenziato come il prezzo dei beni così come i tassi di interesse possano avere un comportamento discontinuo, presentando nel tempo dei salti che non possono essere colti da un modello di tipo solo diffusivo. Il modello Black-Scholes fallisce, dunque, nel riflettere la variabilità stocastica dei parametri osservati nel mercato.

É emerso sempre di più, quindi, l'interesse nella ricerca di un modello che meglio riflettesse l'aleatorietà del mercato, in cui i parametri fondamentali del prezzo dei beni rispondessero ai movimenti di quest'ultimo. Una possibile formulazione è quella dei modelli Regime-Switching in cui i parametri del bene, dipendono dai "regimi" di mercato che variano saltando tra un numero finito di possibili stati. In questo contesto quindi la dinamica del prezzo dei beni può essere modelizzata da un *Processo di diffusione*, i cui parametri possono cambiare in modo casuale assumendo tipicamente un numero finito di valori. Per descrivere la dinamica dei regimi economici, è possibile utilizzare i cosiddetti *Processi di punto marcati*, i quali servono a modellizzare eventi che variano in modo aleatorio a tempi casuali. I vari modelli del prezzo dei beni che analizziamo sono applicati ad un modello di mercato *Cross-Currency*, cioè un modello in cui sia possibile non solo investire nel mercato domestico, ossia in prodotti finanziari (quali bonds, azioni e derivati) quotati nel paese in cui risiediamo, ma anche all'estero. Ogni operazione di mercato dovrà dunque tener conto anche del tasso di cambio X_t tra la valuta estera e quella domestica, che viene tipicamente modellizzato come soluzione di un'opportuna equazione differenziale stocastica. Nel dettaglio il lavoro è organizzato nel modo seguente:

nel Capitolo 1, introduciamo i processi di punto marcato per descrivere l'evoluzione dei regimi di mercato. Questo ci permette di definire i processi di diffusione con salto per la cui comprensione richiamiamo le nozioni base dell'analisi stocastica generalizzando i risultati fondamentali che ereditiamo direttamente dallo studio dei modelli diffusivi, quali il Teorema di rappresentazione delle martingale Browniane, il Teorema di rappresentazione di Girsanov, e la formula di Ito. Cominciamo con il dare la seguente definizione:

Definizione 0.0.1. Sia (E, ξ) uno spazio misurabile, si definisce un processo di punto E-marcato una sequenza $(T_n, Y_n)_{n\geq 1}$, dove:

(i) T_n è un processo di punto (univariato);

(ii) Y_n è una sequenza di variabili aleatorie a valori in E.

Entrambi T_n e Y_n sono definiti su uno stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Per processo di punto univariato intendiamo una sequenza di variabili aleatorie non negative

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < ...$$

che supponiamo non esplodere ossia

$$T_\infty = \lim \uparrow T_n = +\infty \quad \text{q.c.}$$

dove T_n è il tempo in cui avviene l'n-esimo evento mentre Y_n rappresenta un suo attributo. Un'altra possibile rappresentazione per il processo di punto T_n si ottiene considerando il processo di conteggio o di punto N_t associato

$$N_t = n \text{ se } t \in [T_n, T_{n+1}), n \geq 0$$

o, equivalentemente

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}},$$

il quale conta il numero di volte in cui è avvenuto l'evento fino al tempo t compreso. Se dotiamo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ di una filtrazione $\mathcal{F}_t$, supponiamo che N_t sia $\mathcal{F}_t$-adattato. Il processo N_t che consideriamo è un processo di Poisson se

(i) $N_0 = 0$;

(ii) N_t è un processo ad incrementi indipendenti, ossia $N_t - N_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ $\forall s \leq t$;

(iii) $N_t - N_s$ è una variabile di Poisson di parametro $\Lambda_{s,t}$.

Generalmente si prende $\Lambda_{s,t} = \int_s^t \lambda_u du$ dove λ_t è una funzione deterministica detta *intensità* del processo di Poisson N_t. In particolare se $\mathcal{F}_t$ è la filtrazione generata da N_t, ossia $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s; s \leq t)$, e $\lambda_t \equiv 1$, allora N_t è chiamato processo di Poisson *standard*.
A volte può essere utile considerare l'intensità nella forma $\lambda_t = f(t, Y_t)$, per una qualche funzione misurabile non negativa f e per qualche processo misurabile Y_t; in questo caso si richiede che λ_t sia $\mathcal{F}_0$- misurabile, i.e $\mathcal{F}_\infty^Y \subset \mathcal{F}_0$, e N_t è chiamato processo di Poisson *doppiamente stocastico*. É possibile dimostrare che

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_u du \tag{0.0.1}$$

è una $\mathcal{F}_t$-martingala.
Ritornando alla definizione di processo di punto marcato, quest'ultimo induce una misura (misura di conteggio) da $(\Omega, \mathcal{F})$ in $((0, \infty) \times E, \mathcal{B}_+ \otimes \xi)$,

$$p((0,t], A) = N_t(A), \quad \text{per ogni} \quad A \in \xi,$$

la quale è σ-finita grazie all'ipotesi di non esplosione di N_t, in cui

$$N_t\left(A\right) := \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}} 1_{\{Y_n\in A\}}$$

è il processo di conteggio associato. La misura di conteggio $p\left(dt,dy\right)$ e la sequenza $\left(T_n,Y_n\right)$ possono essere identificate ed entrambe sono chiamate processo di punto E-marcato. Questa misura oltre a rappresentare il processo ci permette di dare un significato all'integrale

$$\int_0^t \int_E H\left(s,y\right) p\left(ds,dy\right) = \sum_{n\geq 1} H\left(T_n,Y_n\right) 1_{\{T_n\leq t\}} = \sum_{n=1}^{N_t} H\left(T_n,Y_n\right),$$

e di definire quindi, un processo di diffusione con salto come soluzione dell'equazione

$$d\alpha\left(t\right) = \alpha\left(t^-\right)\left(m_t dt + \beta_t dW_t + \int_E \gamma\left(t,y\right) p\left(dt,dy\right)\right), \tag{0.0.2}$$

dove m, β e γ soddisfano le condizioni implicite di regolarità affinché l'equazione differenziale stocastica abbia una soluzione. Molti modelli di questo tipo sono stati proposti nella letteratura finanziaria per superare i limiti osservati del modello di Black-Scholes. Nel nostro caso, per affrontare il problema della valutazione di un derivato di tipo europeo, assumiamo come dinamica del prezzo del bene sottostante il processo soluzione dell'equazione

$$dS_t = S_t\left(\mu\left(t,\alpha\left(t\right)\right)dt + \sigma\left(t,\alpha\left(t\right)\right)dW_t\right),$$

dove nel nostro caso $\alpha\left(t\right)$ è una catena di Markov con spazio degli stati finito M e matrice generatrice $Q = \left(q_{ij}\right)$. Questa può essere rappresentata come un processo di punto marcato $p\left(dt,dy\right)$ con

$$E = \left\{(i,j) : i,j\in M, i\neq j\right\},$$

e

$$d\alpha\left(t\right) = \int_E \delta\left(t,y\right) p\left(dt,dy\right)$$

con $\delta(T_n, Y_n) = \delta((i,j)) = j-i$. La coppia (i,j) rappresenta il salto avvenuto al tempo T_n; p il processo di punto E-marcato con intensità

$$\lambda\left(t, \alpha\left(t^-\right), dy\right) dt = \left[\sum_{i\neq j} q_{ij} 1_{\{\alpha(t^-)=i\}} \epsilon_{(i,j)}(dy)\right] dt,$$

dove ϵ_y denota la misura di Dirac nel punto y. Possiamo pensare a λ come la probabilità di saltare da i a j nell'intervallo di tempo $[t, t+dt]$, sapendo che la catena parte da i $(\alpha(t^-) = i)$.

Osserviamo che generalizzando i risultati inerenti a un processo di punto, se supponiamo che per ogni $A \in \xi$ il processo $N_t(A)$ abbia come intensità $\lambda_t(A)$, dove $\lambda_t(\omega, dy)$ è una misura da $(\Omega \times [0,\infty), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_+)$ in (E, ξ) e se poniamo

$$q(ds, dy) = p(ds, dy) - \lambda_s(dy)\, ds,$$

questa risulta essere una martingala nel senso che

$$\int_0^t \int_E H(s,y)\, q(ds, dy)$$

è una $\mathcal{F}_t$-martingala per ogni processo H $\mathcal{F}_t$-predicibile E-marcato. Risulta di fondamentale importanza l'estensione dei seguenti risultati ben noti per i processi di diffusione, al caso in cui oltre a un moto browniano, sia presente anche un processo di punto.

Teorema 0.0.2 (Rappresentazione delle martingale (Cf. [14])). *Dato un Moto Browniano W_t e un processo di punto marcato $p(dt, dy)$, sia*

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s, p((0,s], A), B; 0 \le s \le t, A \in \xi, B \in \mathcal{N}\}$$

con $\mathcal{N}$ la collezione degli insiemi di P-misura nulla di $\mathcal{F}$. Allora ogni $(P, \mathcal{F}_t)$-martingala locale M_t ha la seguente rappresentazione

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s dW_s + \int_0^t \int_E H(s,y)\left(p(ds,dy) - \lambda_s(dy)\, ds\right) \qquad (0.0.3)$$

dove ϕ_t è un processo predicibile e di quadrato integrabile e H è un processo $\mathcal{F}_t$-predicibile E-marcato, integrabile rispetto a λ_t.

Teorema 0.0.3 (Formula di Ito generalizzata (si veda Cf. [21])). *Sia $\alpha(t)$ un processo che soddisfi l'equazione* (0.0.2)*; data una funzione $F(t,\alpha) \in C^{1,2}$, essa ammette il seguente differenziale stocastico*

$$\begin{aligned} dF(t,\alpha(t)) &= F_t(\cdot)\,dt + F_\alpha(\cdot)\,\alpha(t)\,m_t dt + \frac{1}{2}F_{\alpha\alpha}(\cdot)\,\alpha(t)^2\,\beta_t^2 dt + \\ &+ F_\alpha(\cdot)\,\alpha(t)\,\beta_t dW_t + \left[F\left(t,\alpha\left(t^-\right)(1+\gamma(t,Y_t))\right) - F\left(t,\alpha\left(t^-\right)\right)\right]dN_t. \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

dove, ancora, $N_t = N_t(E) = p((0,t],E)$; $(\cdot)$ sta per $(t,\alpha(t))$; i pedici in F indicano le derivate parziali.

Teorema 0.0.4 (Girsanov Cf. [3]). *Sia $p(dt,dy)$ un processo di punto E-marcato, su un intervallo finito $[0,T]$, con intensità $\lambda(t,dy)\,dt$, θ_t un processo m-dimensionale $\mathcal{F}_t$-predicibile, e $\Phi = \Phi(\omega,t,y) > 0$ una funzione $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \xi$-misurabile tali che, P-q.c e per ogni $t \in [0,T]$,*

$$\int_0^t |\theta_s|^2\,ds < \infty; \quad \int_0^t \int_E \Phi(s,y)\,\lambda(s,dy)\,ds < \infty.$$

Definiamo il processo L come

$$\begin{aligned} \log L_t = &\int_0^t \theta_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\theta_s|^2\,ds + \\ &+ \int_0^t \int_E \log\Phi(s,y)\,p(ds,dy) + \int_0^t \int_E (1-\Phi(s,y))\,\lambda(s,dy)\,ds, \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$dL_t = L_t\theta_t \cdot dW_t + L_{t^-}\int_E (\Phi(t,y)-1)\left\{p(dt,dy) - \lambda(t,dy)\,dt\right\}, \quad L_0 = 1,$$

e supponiamo che $\forall t \in [0,T]$

$$E_P[L_t] = 1.$$

Allora deve esistere una misura di probabilità Q su $\mathcal{F}$ equivalente a P con

$$dQ = L_T dP$$

tale che

(i) abbiamo

$$dW_t = \theta_t dt + dW_t^Q,$$

dove W_t^Q è un Q-Moto Browniano.

(ii) Il processo di punto p ha come Q-intensità

$$\lambda_Q (t, dy) = \Phi (t, y) \lambda (t, dy).$$

Inoltre ogni misura di probabilità Q equivalente a P ha la struttura di cui sopra.

Nel Capitolo 2 consideriamo il problema di valutazione di derivati su un sottostante quotato in un'altra moneta, noti come derivati cross-currency, all'interno del classico modello Black-Scholes, come proposto nel lavoro di Garman e Kohlhagen in Cf. [9].
Nello specifico, il modello che esaminiamo è definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su cui sono definiti tutti i processi considerati e dotato della filtrazione naturale $\mathcal{F}_t$. Il modello di mercato è costituito dai seguenti beni:

$$dB_t^d = r_d B_t^d dt, \quad B_0^d = 1, \quad \forall t \in [0, T] \tag{0.0.5}$$
$$dB_t^f = r_f B_t^f dt, \quad B_0^f = 1, \quad \forall t \in [0, T], \tag{0.0.6}$$

$$dX_t = X_t [\mu dt + \sigma dW_t], \tag{0.0.7}$$

dove B_t^d e B_t^f sono i due beni privi di rischio e rappresentano, rispettivamente, il valore al tempo t di una unità di investimento su un conto domestico e estero, espresso, rispettivamente, in unità di valuta domestica e estera; X_t, il tasso di cambio, indica il prezzo domestico al tempo t di una unità di valuta estera; r_d e r_f sono numeri reali non negativi noti e costituiscono rispettivamente il tasso di interesse domestico e estero privo di rischio; T è un tempo fissato e rappresenta l'orizzonte temporale; $\mu \in \mathbb{R}$ è una costante nota come *termine di drift*; $\sigma > 0$ è una costante detta *termine di diffusione* o *volatilità*. É utile osservare che utilizzando la formula di Ito, l'equazione (0.0.7) ha come soluzione

$$X_t = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right], \tag{0.0.8}$$

da cui segue che il processo X_t ha una legge lognormale ossia

$$\ln X_t \sim N\left(\ln X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Il nostro principale obiettivo è quello di stabilire una formula di valutazione esplicita per i vari tipi di opzioni su azioni domestiche e estere che andiamo a considerare. Nel dettaglio, ci occupiamo di opzioni *call*. In generale un'opzione *call* è un contratto tra due controparti che assumiamo rispettivamente in posizione *long* ed in posizione *short*. L'investitore che assume una posizione *long* rispetto alla call, è colui che acquista l'opzione al tempo $t \leq T$ e si assicura il diritto a comprare una specificata quantità di bene (*bene sottostante*), per esempio una unità, in una data futura T (*maturità*), al prezzo K (*prezzo strike*), deciso al tempo t. L'investitore che assume una posizione cosiddetta *short* è invece colui che vende l'opzione al tempo $t \leq T$, ad un determinato prezzo e con il guadagno ricevuto cerca di attuare una strategia di copertura, ossia una strategia finanziaria che gli permetta di poter onorare il contratto al tempo T.

In questo contesto lasciamo da parte il problema della copertura, soffermandoci su quale debba essere il 'giusto' prezzo o valore dell'opzione in ogni istante. Le opzioni call tipicamente considerate in letteratura, sono:

- Opzione call sul tasso di cambio X_t che compra una unità di valuta estera ad un prezzo K espresso in valuta domestica, il cui payoff è

$$C_t^X = (X_T - K)^+;$$

- opzioni su un bene quotato all'estero il cui prezzo è S_t^f, trattate rispettivamente, in valuta estera e domestica. Nel primo caso il prezzo strike è espresso in valuta estera e il payoff dell'opzione in valuta domestica è

$$C_T^1 = X_T\left(S_T^f - K^f\right)^+,$$

nel secondo è espresso in valuta domestica e il payoff è

$$C_t^2 = \left(S_T^f X_T - K^d\right)^+.$$

Altre tipiche opzioni che è possibile valutare in questo contesto sono le opzioni "Quanto", su un titolo estero, in cui viene però fissato il tasso di cambio: esse hanno dunque payoff

$$C_T^3 = \bar{X}\left(S_T^f - K^f\right)^+,$$

e le opzioni con payoff

$$C_T^4 = (X_T - K)^+ S_T^f.$$

Nel valutare queste opzioni, seguiamo l'approccio standard della valutazione neutrale verso il rischio; ossia, grazie al Teorema di Girsanov, costruiamo un adeguato spazio di probabilità in cui il processo di prezzo scontato del bene sottostante è una martingala; questo spazio di probabilità è usualmente chiamato mondo neutrale verso il rischio e la misura di probabilità associata è denominata misura neutrale al rischio o di martingala equivalente. Proviamo quindi che esiste una misura di probabilità P^*, su $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ (misura di martingala domestica), equivalente a P, sotto cui il processo X_t^*

$$X_t^* = \frac{B_t^f X_t}{B_t^d} = e^{(r_f - r_d)t} X_t, \tag{0.0.9}$$

che rappresenta il valore di una unità di investimento su un conto estero, convertito in valuta domestica e scontato con B_t^d, è una martingala. Applicando la formula di Ito si può vedere che X_t^* è soluzione di

$$dX_t^* = X_t^*\left[(r_f - r_d + \mu)\, dt + \sigma dW_t\right];$$

affinché X_t^* sia una martingala dobbiamo fare in modo che il termine di drift si annulli. Ciò è possibile attraverso un opportuno cambio di misura, ottenuto tramite il classico Teorema di Girsanov. Sotto la nuova misura il tasso di cambio X_t è soluzione dell'equazione

$$dX_t = X_t\left[(r_d - r_f)\, dt + \sigma dW_t^*\right].$$

A questo punto definendo una classe di strategie finanziare ammissibili, ricaviamo il prezzo dell'opzione come il valore atteso, sotto la nuova misura, del payoff dell'opzione scontato

$$C(t,T,Z) = E_{P^*}\left[e^{-r_d(T-t)} Z \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

dove Z rappresenta il payoff dell'opzione ed è una variabile aleatoria non negativa e $\mathcal{F}_T$-misurabile. In particolare nel caso di un'opzione sul tasso di cambio, con payoff quindi

$$Z = (X_T - K)^+,$$

il valore esplicito del prezzo è dato dalla formula di Black-Scholes

$$c(t,T,X_t) = X_t e^{-r_f(T-t)} N\left[h_1(X_t, T-t)\right] - K e^{-r_d(T-t)} N\left[h_2(X_t, T-t)\right] \tag{0.0.10}$$

dove N è la funzione di distribuzione di una Gaussiana standard, e

$$h_{1,2}(x,t) = \frac{\ln(x/K) + \left(r_d - r_f \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}. \tag{0.0.11}$$

Allo stesso modo si ottengono formule esplicite per gli altri tipi di opzione.

Nel Capitolo 3 affrontiamo il problema della valutazione di vari tipi di opzioni cross-currency nel modello regime-switching, in cui il processo di cambio X_t tra valuta domestica e estera, è formulato come un moto Browniano geometrico, dove però, sia il termine di drift che la volatilità dipendono da una catena di Markov a tempo continuo con spazio degli stati finito. Il modello di mercato considerato è quindi:

$$\begin{aligned} dB_t^f &= B_t^f r_f dt, \quad B_0^f = 1 \quad \forall t \in [0,T], \\ dB_t^d &= B_t^d r_d dt, \quad B_0^d = 1 \quad \forall t \in [0,T], \\ dX_t &= X_t \left[\mu_{\alpha(t)} dt + \sigma_{\alpha(t)} dW_t\right], \\ d\alpha(t) &= \int_E \delta(t,y)\, p(dt,dy) \end{aligned}$$

dove B_t^f B_t^d rappresentano i valori dei beni privi di rischio rispettivamente nel mercato estero e domestico, con $\alpha(t)$ la catena di Markov a tempo continuo con spazio degli stati $M = \{0, 1\}$. Il termine di drift $\mu_{\alpha(t)}$ e la volatilità $\sigma_{\alpha(t)}$ sono noti ad ogni istante della catena, cioè quando $\alpha(t) = 0$, $\mu_{\alpha(t)} = \mu_0$, $\sigma_{\alpha(t)} = \sigma_0$, con μ_0 e σ_0 noti; al contrario se $\alpha(t) = 1$, $\mu_{\alpha(t)} = \mu_1$, $\sigma_{\alpha(t)} = \sigma_1$, con μ_1 e σ_1 noti. Assumiamo che il generatore della catena sia dato da

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0, \lambda_1 > 0,$$

$\alpha(t)$ è quindi un processo di punto marcato, con $E = \{(0,1), (1,0)\}$ e intensità

$$\lambda\left(t, \alpha\left(t^-\right), dy\right) = \lambda_0 1_{\{\alpha(t^-)=0\}} \epsilon_{(0,1)}(dy) + \lambda_1 1_{\{\alpha(t^-)=1\}} \epsilon_{(1,0)}(dy).$$

Tutti i processi che abbiamo introdotto, sono definiti su uno stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato della filtrazione $\mathcal{F}_t$ generata dal moto Browniano e dalla catena di Markov

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{(\alpha(s), W_s); 0 \le s \le t\right\}.$$

La tecnica di valutazione neutrale al rischio, mediante l'uso del teorema di Girsanov esteso ai processi di punto marcati, permette di ottenere l'esistenza di una misura P^* equivalente a P sotto cui il processo X_t^*

$$X_t^* = e^{\left(r_f - r_d\right)t} X_t,$$

è una martingala. Sotto tale misura il processo di cambio X_t è soluzione di

$$dX_t = X_t\left[\left(r_d - r_f\right)dt + \sigma_{\alpha(t)} dW_t^*\right], \tag{0.0.12}$$

e vale il seguente teorema (si veda Cf. [20])

Teorema 0.0.5. *Sotto il modello descritto da* (0.0.12)*, il prezzo al tempo* t*, espresso in valuta domestica, di un'opzione call Europea con maturità* T *e prezzo strike* K (*espresso in valuta domestica*) *è:*

$$c(t, T, x, i) = E_{P^*}\left[e^{-r_d(T-t)}\left(X_T - K\right)^+ | X_t = x, \alpha(t) = i\right] \quad i = 0, 1. \tag{0.0.13}$$

In particolare per $t = 0$ avremo

$$\begin{aligned} c(0,T,x,i) &= E_{P^*}\left[e^{-r_d T}(X_T - K)^+ | X_0 = x, \alpha(0) = i\right] = \qquad (0.0.14)\\ &= e^{-r_d T} x \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^y - \tilde{k}\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(u)}} e^{-\frac{(y-m(u))^2}{2\sigma^2(u)}} dy f_i(u,T)\, du, \end{aligned}$$

dove

$$y \sim N\left(m(u), \sigma^2(u)\right),$$

con

$$m(u) = \left(r_d - r_f - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + u\left(\frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_0^2}{2}\right) \qquad (0.0.15)$$

$$\sigma^2(u) = T\sigma_1^2 + u\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right). \qquad (0.0.16)$$

$\tilde{k} = K/x$, e

$$\begin{aligned} f_0(u,T) &= e^{-\lambda_0 T}\delta_0(T-u) + \\ &+ e^{-\lambda_1 T} e^{(\lambda_1-\lambda_0)u}\left(\left[\frac{T-u}{\lambda_0\lambda_1 u}\right]^{-1/2} J_1\left(2\left(\lambda_0\lambda_1 T u - \lambda_0\lambda_1 u^2\right)^{1/2}\right) + \right.\\ &\left. + \lambda_0 J_0\left(2\left(\lambda_0\lambda_1 T u - \lambda_0\lambda_1 u^2\right)^{1/2}\right)\right), \qquad (0.0.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(u,T) &= e^{-\lambda_1 T}\delta_0(T-u) + \\ &+ e^{-\lambda_1 T} e^{(\lambda_1-\lambda_0)u}\left(\left[\frac{u}{\lambda_0\lambda_1 (T-u)}\right]^{-1/2} J_1\left(2\left(\lambda_0\lambda_1 T u - \lambda_0\lambda_1 u^2\right)^{1/2}\right) + \right.\\ &\left. + \lambda_1 J_0\left(2\left(\lambda_0\lambda_1 T u - \lambda_0\lambda_1 u^2\right)^{1/2}\right)\right), \qquad (0.0.18) \end{aligned}$$

dove $J_a(z)$ è la funzione di Bessel

$$J_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+a}}{n!\,\Gamma(a+n+1)}, \qquad (0.0.19)$$

sono le funzioni di distribuzione del tempo di soggiorno della catena nello stato 0, partendo da 0 e 1 rispettivamente.

Osservazione 1. Quando $\sigma_0 = \sigma_1$, $m(u)$ e $\sigma^2(u)$ non dipendono da u e l'equazione ricavata si riduce alla classica formula di Black-Scholes per le opzioni Europee. □

Nel caso particolare di una catena di Markov a due soli stati, è dunque possibile ottenere una formula analitica esatta, grazie al calcolo delle funzioni di distribuzione dei tempi di occupazione della catena nei due stati, come in Cf. [20] e poi ripreso in Cf. [12]. La generalizzazione a catene di Markov con più di due stati non sembra permettere una soluzione analitica dello stesso tipo. É dunque necessario prendere in considerazione tecniche di tipo numerico per la valutazione del prezzo del derivato. Presentiamo dunque l'approccio proposto in Cf. [23], per semplicità ristretto al caso di una catena di Markov a due soli stati, basato sulla trasformata di Fourier del valore dell'opzione e che permette l'uso dell'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). Percorrendo questa strada, occorre determinare la trasformata di Fourier del prezzo delle opzioni di interesse: in particolare nel caso di un'opzione sul tasso di cambio riscriviamo il prezzo dell'opzione come

$$C(k) = xE_{P^*}\left[e^{-r_d T}\left(e^{S_T} - e^k\right)^+ \middle| \, \alpha(0) = i \right], \tag{0.0.20}$$

avendo posto $k = \ln(K/x)$ con $X_0 = x$, e

$$S_t = \int_0^t \left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2_{\alpha(s)} \right) ds + \int_0^t \sigma_{\alpha(s)} dW^*_s. \tag{0.0.21}$$

Poiché $C(k)$ non decade a 0 per k che tende a $-\infty$, non possiamo prendere direttamente la sua trasformata di Fourier, introduciamo quindi un termine esponenziale aggiuntivo, in modo da rendere la funzione di quadrato integrabile rispetto a k nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, dove la trasformata di Fourier è ben definita. Definiamo la funzione modificata del prezzo come

$$c(k) = e^{\rho k}\frac{C(k)}{x}, \quad -\infty < k < \infty, \tag{0.0.22}$$

dove $\rho > 0$ è un numero specificato. Da qui, condizionando a $\mathcal{F}^\alpha_T$ la σ-algebra generata dalla catena di Markov $\alpha(t)$, per $0 \leq t \leq T$, rispetto alla quale sappiamo che S_T è una gaussiana di media $(L_T - (1/2)V_T)$ e varianza V_T con

$$L_T = (r_d - r_f)T, \quad V_T = \int_0^T \sigma^2_{\alpha(t)} dt, \tag{0.0.23}$$

e calcolandone la sua funzione caratteristica, otteniamo la trasformata di Fourier del prezzo $\psi(u)$

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} c(k)\, dk = \\ &= \frac{1}{\rho^2+\rho-u^2+i(1+2\rho)u} \exp(B(u)T) E_{P^*}\{\exp(iA(u,0)T_0)\},\end{aligned}$$

in cui T_0 è il tempo totale tra 0 e T in cui la catena è stata in 0, $B(u)$ e $A(u,0)$ funzioni deterministiche. A questo punto, calcolando la funzione caratteristica dei tempi di occupazione di una catena di Markov a due stati, si giunge ad una formula esplicita per la trasformata di Fourier. Infine, la teoria dell'analisi di Fourier ci permette di ricavare il prezzo dell'opzione modificato in funzione di $\psi(u)$, attraverso la formula di inversione (si veda Cf [5])

$$c(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk}\psi(u)\, du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left\{e^{-iuk}\psi(u)\right\} du,$$

da cui

$$C(k) = e^{-\rho k}\frac{x}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left\{e^{-iuk}\psi(u)\right\} du.$$

Ciò fornisce, grazie all'algoritmo (FFT), un efficiente metodo di calcolo, a meno di un errore dovuto all'approssimazione numerica del prezzo dell'opzione. In seguito, utilizzando gli stessi argomenti, con le modifiche del caso, affrontiamo il problema del calcolo del prezzo di opzioni con payoff:

$$C_T^2 = \left(S_T^f X_T - K^d\right)^+ = \left(\tilde{S}_T^f - K^d\right)^+, \tag{0.0.24}$$

dove S_t^f è il prezzo del bene sottostante formulato in un caso come un moto browniano geometrico con termine di drift e volatilità costanti (modello Black-Scholes), nel secondo caso facendo invece l'ipotesi che esso stesso segua un modello regime-switching, in cui sotto un'assegnata misura neutrale al rischio (domestica), X_t e S_t siano soluzione rispettivamente di

$$\begin{aligned}dX_t &= X_t\left[(r_d-r_f)\,dt + \sigma_{\alpha(t)} dW_t\right] \\ dS_t^f &= S_t^f\left[\left(r_f - \sigma_{\alpha(t)}\sigma_{\theta(t)}\right) dt + \sigma_{\theta(t)} d\bar{W}_t\right],\end{aligned}$$

dove $\bar{W}_t$ e W_t sono moti browniani indipendenti, α e θ catene di Markov indipendenti con spazio degli stati in $\{0,1\}$:

$$E_\alpha = E_\theta = \{(i,j) : i,j = 0,1, i \neq j\}$$

e

$$d\alpha(t) = \int_{E_\alpha} \delta(t,y)\, p_\alpha(dt,dy) \qquad d\theta(t) = \int_{E_\theta} \delta(t,y)\, p_\theta(dt,dy)$$

con p_α e p_θ misure di conteggio con intensità

$$\begin{aligned}
\lambda\left(t, \alpha\left(t^-\right), dy\right) &= \lambda_0^\alpha 1_{\{\alpha(t^-)=0\}} \epsilon_{(0,1)}(dy) + \lambda_1^\alpha 1_{\{\alpha(t^-)=1\}} \epsilon_{(1,0)}(dy), \\
\lambda\left(t, \theta\left(t^-\right), dy\right) &= \lambda_0^\theta 1_{\{\theta(t^-)=0\}} \epsilon_{(0,1)}(dy) + \lambda_1^\theta 1_{\{\theta(t^-)=1\}} \epsilon_{(1,0)}(dy),
\end{aligned}$$

con λ_0^α, λ_1^α, λ_0^θ, λ_1^θ >0.

Infine, nel Capitolo 4 riportiamo alcuni risultati numerici relativi al calcolo del prezzo di una generica opzione call

$$Z = (S(T) - K)^+,$$

in un modello regime-switching in cui, sotto la misura di rischio neutrale, l'evoluzione del prezzo del bene sottostante $S(t)$ è descritta dall'equazione

$$dS(t) = S(t)\left[\mu_{\alpha(t)} dt + \sigma_{\alpha(t)} dW_t\right],$$

con $\alpha(t)$ la solita catena di Markov, $\mu_{\alpha(t)}$ e $\sigma_{\alpha(t)}$ costanti note ad ogni istante della catena: $\mu_{\alpha(t)} = \mu_0$ e $\sigma_{\alpha(t)} = \sigma_0$ se $\alpha(t) = 0$, $\mu_{\alpha(t)} = \mu_1$ e $\sigma_{\alpha(t)} = \sigma_1$ altrimenti, $r_{\alpha(t)}$ il tasso di interesse privo di rischio: $r_{\alpha(t)} = r_0$ se $\alpha(t) = 0$, r_1 altrimenti. Nel valutare l'opzione, vengono usati e messi a confronto più metodi numerici. Descriviamo dapprima l'approccio della trasformata di Fourier veloce (FFT) che prevede il calcolo analitico della trasformata di Fourier del prezzo dell'opzione. Nello specifico tale approccio funziona in questo modo:
se $\psi(u)$ è la trasformata di Fourier del prezzo dell'opzione modificato, abbiamo

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \psi(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}\left\{e^{-iuk} \psi(u)\right\} du, \tag{0.0.25}$$

e dunque il prezzo dell'opzione è, in vista della (0.0.22),

$$C(k) = e^{-\rho k} \frac{X_0}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{e^{-iuk} \psi(u)\right\} du.$$

A questo punto, scegliendo una griglia per la variabile u, $u_j = j\Delta_u$ per $j = 0, 1, \ldots, N-1$, e una per la variabile k

$$k_l = \left(l - \frac{N}{2}\right) \Delta_k, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{0.0.26}$$

si approssima l'integrale con le somme

$$c(k_l) \approx \frac{\Delta_u}{\pi} \mathrm{Re}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijl(2\pi/N)} e^{ij\pi} \psi(j\Delta_u)\right\}, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{0.0.27}$$

avendo posto

$$\Delta_u \Delta_k = \frac{2\pi}{N}. \tag{0.0.28}$$

Infine usando un metodo di Simpson adattato per l'integrazione numerica, con la sequenza di pesi

$$w(j) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se} \quad j = 0, \\ \frac{4}{3} & \text{se} \quad j \text{ è dispari}, \\ \frac{2}{3} & \text{se} \quad j \text{ è pari}. \end{cases} \tag{0.0.29}$$

si ha:

$$c(k_l) \approx \frac{\Delta_u}{\pi} \mathrm{Re}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijl(2\pi/N)} e^{ij\pi} \psi(j\Delta_u) w(j)\right\}, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{0.0.30}$$

la quale non è altro che la trsformata di Fourier discreta della sequenza $\{e^{ij\pi}\psi(j\Delta_u) w(j)\}_{j=0}^{N-1}$, per il cui calcolo si applica il noto algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). Per testare questo metodo implementiamo:

(i) un algoritmo di simulazione Semi-Montecarlo basato sulla generazione di una catena di Markov a tempo continuo, proposto in Cf. [17]. Per fare questo basta osservare che per una data realizzazione della catena di Markov $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq T$, il corrispondente prezzo dell'opzione si può calcolare attraverso l'usuale formula Black-Scholes. Ricordiamo infatti che

$$
\begin{aligned}
C(K) &= E\left\{\exp\left(-\int_0^T r_{\alpha(t)} dt\right)(S(T)-K)^+\right\} \\
&= E\left\{E\left[e^{-\int_0^T r_{\alpha(t)} dt}(S(T)-K)^+ \Big| \sigma\{\alpha(t); 0 \leq t \leq T\}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

L'aspettazione condizionata è data dalla formula Black-Scholes, cioè

$$
\begin{aligned}
&E\left[e^{-\int_0^T r_{\alpha(t)} dt}(S(T)-K)^+ \Big| \sigma\{\alpha(t); 0 \leq t \leq T\}\right] = \\
&= S(0)\, e^{-(R_T-L_T)} N(d_1(L_T,V_T)) - K e^{-R_T} N(d_2(L_T,V_T)),
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
d_1(L_T,V_T) &= \frac{\ln(S(0)/K) + L_T + (1/2)V_T}{\sqrt{V_T}}, \\
d_2(L_T,V_T) &= d_1(L_T,V_T) - \sqrt{V_T}, \\
L_T &= \mu_1 T + T_0(\mu_0 - \mu_1), \\
R_T &= r_1 T + T_0(r_0 - r_1), \\
V_T &= T\sigma_1^2 + T_0\left(\sigma_0^2 - \sigma_1^2\right),
\end{aligned}
$$

$N(\cdot)$ è la funzione di distribuzione di una normale standard e T_0 il tempo totale tra 0 e T in cui la catena si trova nello stato 0. Per calcolare il prezzo numericamente, bisogna quindi generare un numero sufficientemente grande Q di traiettorie $\alpha(t)$, per ognuna di esse calcolare il tempo di soggiorno in 0 e il relativo prezzo $C_q(K)$, ed infine farne la media empirica, la quale rappresenta appunto l'approssimazione del prezzo dell'opzione.
Nello specifico, riportiamo anche l'intervallo di confidenza al 95%.

(ii) Un algoritmo per il calcolo della formula analitica esatta del prezzo dell'opzione, ottenuta grazie al calcolo delle funzioni di distribuzione dei tempi di soggiorno della catena di Markov (si veda Teorema 0.0.5):

$$
C(K) = \int_0^T BS(u)\, f_i(u,T)\, du, \tag{0.0.31}
$$

dove $BS(u)$ è

$$BS(u) = S(0)\, e^{-(R_T(u) - L_T(u))} N\left(d_1\left(L_T(u), V_T(u)\right)\right) + \\ - K e^{-R_T(u)} N\left(d_2\left(L_T(u), V_T(u)\right)\right)$$

$f_i(u, T)$ la funzione di distribuzione del tempo di soggiorno in 0, sapendo che la catena è partita dallo stato i, di cui abbiamo una formula esplicita data da (0.0.17) e (0.0.18), d_1, d_2, $L_T(u)$, $R_T(u)$ e $V_T(u)$ le funzioni definite sopra con u al posto di T_0.

(iii) Un algoritmo per il calcolo della formula Black-Scholes per il prezzo dell'opzione, ottenuta fissando il tasso di interesse privo di rischio $r_{\alpha(t)} \equiv (r_0 + r_1)/2 := r$, lo stesso per il termine di drift e la volatilità, per cui abbiamo $\mu_{\alpha(t)} \equiv (\mu_0 + \mu_1)/2 := \mu$, $\sigma_{\alpha(t)} \equiv (\sigma_0 + \sigma_1)/2 := \sigma$, dunque

$$C(K) = S(0)\, e^{-(r-\mu)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2). \qquad (0.0.32)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + \mu T + (1/2)\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Riportiamo ora i risultati delle simulazioni numeriche; per le prime tre tabelle si è scelto come insieme di parametri: $S(0)$=120, λ_0=2, λ_1=3, μ_0=r_0=0.05, μ_1=r_1=0.1, σ_0=0.5, σ_1=0.3, quelle successive fanno riferimento invece all'insieme $S(0)$=100, λ_0=3, λ_1=2, σ_0=0.2, σ_1=0.1, μ_0=0.1, μ_1=0.3, r_0=0.05, r_1=0.1. In entrambi i casi prendiamo, nel caso specifico dell'algoritmo FFT, $\rho = 1$, l'ampiezza della griglia utilizzata per k $\Delta_k = 0.01$, il numero di punti della griglia $N = 2^{12}$; utilizziamo 10000 replicazioni per l'algoritmo semi-montecarlo.

K	Semi-MC (IC 95%)	Esatto	FFT	BS
98.247	29.5549 (0.0262)	29.5632	29.5626	28.7252
108.580	22.9611 (0.0410)	22.9739	22.9735	21.7879
120	17.0032 (0.0527)	17.0194	17.0194	15.5710
132.620	11.9442 (0.0581)	11.9619	11.9618	10.3976
146.568	7.9304 (0.0559)	7.9476	7.9477	6.4365

Tabella 1: T=0.5.

K	Semi-MC (IC 95%)	Esatto	FFT	BS
98.247	35.8533 (0.0313)	35.8504	35.8499	34.8884
108.580	29.9909 (0.0441)	29.9861	29.9857	28.7494
120	24.4616 (0.0554)	24.4550	24.4550	22.9874
132.620	19.4160 (0.0635)	19.4082	19.4081	17.7815
146.568	14.9713 (0.0673)	14.9630	14.9631	13.2680

Tabella 2: T=1.

K	Semi-MC (IC 95%)	Esatto	FFT	BS
98.247	41.0689 (0.0305)	41.0644	41.0639	40.0475
108.580	35.6567 (0.0419)	35.6507	35.6504	34.3819
120	30.4355 (0.0525)	30.4282	30.4282	28.9342
132.620	25.5112 (0.0612)	25.5027	25.5026	23.8291
146.568	20.9757 (0.0674)	20.9665	20.9665	19.1740

Tabella 3: T=1.5.

K	Semi-MC (IC 95%)	Esatto	FFT	BS
81.873	26.4928 (0.1199)	26.4980	26.4978	27.5965
90.484	18.5356 (0.1110)	18.5409	18.5411	19.4129
100	10.7523 (0.0806)	10.7568	10.7568	11.1257
110.517	4.5499 (0.0317)	4.5517	4.5517	4.5023
122.140	1.2170 (0.0018)	1.2168	1.2168	1.1005

Tabella 4: T=0.5

K	Semi-MC (IC 95%)	Esatto	FFT	BS
81.873	37.0745 (0.2123)	37.1479	37.1476	37.3741
90.484	29.3622 (0.2053)	29.4339	29.4341	29.4929
100	21.3689 (0.1832)	21.4340	21.4340	21.1912
110.517	13.7080 (0.1396)	13.7582	13.7583	13.2229
122.140	7.3202 (0.0804)	7.3493	7.3493	6.7747

Tabella 5: T=1

K	Semi-MC (IC 95%)	Esatto	FFT	BS
81.873	48.3840 (0.2924)	48.3581	48.3579	47.4785
90.484	40.8929 (0.2890)	40.8659	40.8660	39.8610
100	32.9144 (0.2756)	32.8867	32.8868	31.6720
110.517	24.7441 (0.2455)	24.7177	24.7177	23.2685
122.140	16.9215 (0.1953)	16.8996	16.8996	15.3587

Tabella 6: T=1.5

Bibliografia

[1] Paolo Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*. Pitagora Editrice, Bologna, second edition, 2000.

[2] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford, 2000.

[3] Tomas Björk, Yuri Kabanov, and Wolfgang Runggaldier. Bond market structure in the presence of marked point processes. *Math. Finance*, 7(2):211–239, 1997.

[4] Pierre Brémaud. *Point processes and queues*. Springer-Verlag, New York, 1981. Martingale dynamics, Springer Series in Statistics.

[5] Peter Carr and Dilip B. Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4), 1999.

[6] Fuh Cheng-Der, Wang Ren-Her, and Cheng Jui-Chi. Option Pricing in a Black-Scholes Model with Markov Switching. *Working Paper, Institute of Statistical Science, Academia Sinica, Taipei*, 2002.

[7] Robert J. Elliott. *Stochastic calculus and applications*, volume 18 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] Robert J. Elliott, Lakhdar Aggoun, and John B. Moore. *Hidden Markov models*, volume 29 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1995. Estimation and control.

[9] M. B. Garman and S. W. Kohlhagen. Foreing Currency Option Values. *Journal of International money and Finance*, 2:231–237, 1983.

[10] Paul Glasserman and Nicolas Merener. Convergence of a discretization scheme for jump-diffusion processes with state-dependent intensities. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460(2041):111–127, 2004. Stochastic analysis with applications to mathematical finance.

[11] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford University Press, New York, third edition, 2001.

[12] Xin Guo. Information and option pricings. *Quant. Finance*, 1(1):38–44, 2001.

[13] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[14] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996. Translated from the 1991 French original by Nicolas Rabeau and François Mantion.

[15] Camilla Landén. Bond pricing in a hidden Markov model of the short rate. *Finance Stoch.*, 4(4):371–389, 2000.

[16] Roger W. Lee. Option Pricing by Transform Methods: Extension, Unification, and Error Control. *Journal of Computational Finance*, 7(3):51–86, 2004.

[17] R. H. Liu, Q. Zhang, and G. Yin. Option pricing in a regime-switching model using the fast Fourier transform. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, pages Art. ID 18109, 22, 2006.

[18] Rogemar S. Mamon and Marianito R. Rodrigo. Explicit solutions to European options in a regime-switching economy. *Oper. Res. Lett.*, 33(6):581–586, 2005.

[19] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*, volume 36 of *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2005.

[20] V. Naik. Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns. *The Journal of Finance*, XLVIII(5):1969–1984, 1993.

[21] W. J. Runggaldier. *Jump-Diffusion models.* "Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance" (S.T.Rachev, ed.), Handbooks in Finance, Book 1 (W.Ziemba Series Ed.). Elesevier, North-Holland, 2003.

[22] Shu Wu and Yong Zeng. Affine regime-switching models for interest rate term structure. In *Mathematics of finance*, volume 351 of *Contemp. Math.*, pages 375–386. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[23] David. D. Yao, Q. Zhang, and Xun Yu Zhou. *A Regime-Switching Model for European Option Pricing.* Stochastic Processes, Optimization, and Control Theory Applications in Financial Engineering, Queueing Networks, And Manufacturing System. Springer, New York, 2006.

[24] G. George Yin and Qing Zhang. *Continuous-time Markov chains and applications*, volume 37 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, New York, 1998. A singular perturbation approach.