UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

IL TERZO PROBLEMA DI HILBERT

Laureanda
Monica Ambroselli

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Ottobre 2009

Sintesi

Nel 1900, durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi, *David Hilbert*, uno dei più eminenti ed influenti matematici a cavallo tra il XIX e il XX secolo, chiese - come terzo dei suoi ventitrè problemi - di specificare '*Due tetraedri di basi uguali ed altezza uguali che non possano in alcun modo essere divisi in tetraedri congruenti, e che non possano essere combinati con tetredri congruenti per formare due poliedri che possano a loro volta essere suddivisi in tetraedri congruenti*'.
Il **Terzo Problema di Hilbert** si riferisce all'uso da parte di Euclide del cosiddetto *metodo di esaustione* per dimostrare enunciati basilari nella teoria del volume di poliedri nello spazio.

Il metodo di esaustione, usato prima da Eudosso (IV sec a.C.) e poi da Archimede nel 225 a.C., prevede l'uso del passaggio al limite nel calcolo di aree di poligoni nel piano. Lo schema generale di questo metodo può essere formulato come segue:
'Data una figura misurabile F, consideriamo una successione G_1, G_2,.... di figure misurabili incluse in F. Se l'area della parte della figura F non occupata dalle figure G_k decresce per $k \to +\infty$, allora $s(F) = \lim_{k\to+\infty} s(F \backslash G_k) = 0$'.
Euclide, negli '*Elementi*', non ricorre mai a tale tecnica nel calcolo delle aree dei poligoni: egli fa uso piuttosto di tecniche quali l'**equidecomponibilità** e l'**equicomplementabilità** applicate alle cosiddette *figure equidecomponibili* ed *equicomplementabili.*

*Due figure si dicono **equidecomponibili** se è possibile decomporre una di esse in un numero finito di parti che possano poi essere ricomposte in modo tale da formare l'altra figura.*

*Due figure F e H si dicono **equicomplementabili** se esistono figure $F_1, ..., F_k$*

e $H_1, ..., H_k$ *tali che*

$$F + F_1 + ... + F_k \cong H + H_1 + ... + H_k.$$

Poichè due figure equidecomponibili (o equicomplementabili) sono equivalenti, a tale proposito, Gauss nel 1832 si chiese se valesse il viceversa ossia se coppie di poligoni equivalenti fossero equidecomponibili.
Una risposta affermativa fu data, nel 1833, dai matematici **Bolyai** e **Gerwien**, allievi di Gauss, i quali stabilirono il seguente risultato:
'*Due poligoni equivalenti sono equidecomponibili*'.

Hilbert nel 1899, dopo lunghi studi sulle basi della geometria euclidea, pubblica '*Fondamenti di Geometria*' con un sistema assiomatico che pone su basi rigorose la geometria euclidea; egli si domanda se quanto stabilito da Bolyai e Gerwien nel piano sia valido in dimensione tre; Hilbert si domanda, cioè, se due poliedri aventi lo stesso volume possano essere decomposti senza ricorrere al metodo di esaustione. Questo costituisce il *Terzo Problema di Hilbert*, la cui genesi si può far risalire a due lettere di Carl Friedrich Gauss del 1844. Gauss osserva che se due tetraedri di uguale volume potessero essere suddivisi in parti congruenti, allora si avrebbe una dimostrazione del teorema XII.5 di Euclide che afferma che due piramidi con stessa base e stessa altezza hanno ugual volume. In ultima analisi ciò porterebbe a una teoria del volume per poliedri non derivante dall'analisi e dunque non basata su argomenti di continuità, ma solo su metodi geometrici finiti.
Hilbert si aspetta che non ci sia un teorema analogo a quello di Bolyai-Gerwien in dimensione tre e il problema da lui esposto nella conferenza di Parigi è proprio quello di confermare la sua aspettativa.
In effetti, il problema fu completamente risolto da uno studente di Hilbert, Max Dehn, nei primi anni dopo il 1900.
Altri prima di Dehn cercarono di risolvere tale problema ma caddero in errore: è il caso di Bricard (nel 1896!).
La teoria dell'equidecomponibilità fu inoltre arricchita da un nuovo risultato nel 1965, quando il matematico svizzero Sydler diede una condizione necessaria e sufficiente per l'equidecomponibilità di poliedri.

Più dettagliatamente la tesi è organizzata nel modo seguente:

Nel primo capitolo introduciamo rapidamente i concetti di base della Geometria Euclidea: gli assiomi, i movimenti rigidi e diamo una teoria dell'area in spirito euclideo.
Se si considera una decomposizione del piano in quadrati congruenti e una figura F giacente su tale piano, allora F conterrà una figura formata di un certo numero di quadrati e sarà contenuta in una figura formata da un certo numero di quadrati. Indicando con $\underline{s}(F)$ la somma delle aree dei quadrati contenuti nella figura F e con $\overline{s}(F)$ la somma delle aree dei quadrati contenenti la figura F, diremo che la figura F è misurabile se $\underline{s}(F) = \overline{s}(F)$.
L'*area s(F)* di una figura F è una funzione definita sull'insieme di tutte le figure misurabili.
L'area *s(F)* di una figura F soddisfa le seguenti quattro proprietà fondamentali spesso indicate come i **quattro assiomi dell'area**:

1. La funzione s è non negativa, cioè l'area s(F) di ogni figura misurabile F è un numero non negativo;

2. la funzione s è additiva, cioè, se F e F' sono figure misurabili non aventi nessun punto in comune, allora la figura $F \cup F'$ è anch'essa misurabile e risulta: $s(F \cup F') = s(F) + s(F')$;

3. la funzione s è invariante per traslazioni, cioè, se F è una figura misurabile e F' è la figura ottenuta sottoponendo F a una traslazione, allora la figura F' è anch'essa misurabile e $s(F) = s(F')$;

4. la funzione s è normalizzata, ossia il quadrato unità Q è una figura misurabile e $s(Q) = 1$.

Questi assiomi risultano essere indipendenti tra loro ed inoltre si dimostra che:
Teorema. *Esiste una e una sola funzione s definita sull'insieme delle figure misurabili, che soddisfa i quattro assiomi dell'area.*

Passiamo poi, sempre nel primo capitolo, ad analizzare i vari metodi per calcolare l'area delle figure iniziando col **metodo di esaustione**, l'unico che permette di calcolare, come detto sopra, la formula dell'area di un rettangolo.
Un secondo metodo per calcolare più in generale l'area di un poligono arbitrario è il **metodo di decomposizione**.
Esso, già noto ad Euclide più di duemila anni fa', consiste nel cercare di decomporre una figura in un numero finito di parti che possano poi essere ricomposte a formare una figura più semplice (la cui area sia nota).
Un terzo metodo per calcolare l'area, conosciuto come **metodo del completamento**, consiste nell'aggiungere parti congruenti a due figure F e H in modo tale che le nuove figure risultanti siano congruenti. (Allora, poichè le figure risultanti sono congruenti, le figure iniziali F e H hanno la stessa area).
Il concetto di volume è introdotto parallelamente al concetto di area.
Come nel caso dell'area, possiamo definire il volume *assiomaticamente* attraverso assiomi sui quali si basa il concetto del volume, del tutto analoghi agli assiomi dell'area. Ci chiediamo aalora se sia possibile calcolare il volume di un arbitrario poliedro usando solamente il metodo del completamento o di decomposizione, non usando quindi il metodo di esaustione.
Ora cercando di ricavare la formula per il volume di un tetraedro, si considera accanto ad esso un prisma a base triangolare. Questo prisma può essere decomposto in tre tetraedri i primi due dei quali e gli ultimi due dei quali hanno stessa base ed uguale altezza.
Così per dimostrare che il volume di un tetraedro è $\frac{1}{3}$ del volume del prisma in questione 'rimane solamente' da dimostrare che '*due piramidi triangolari con stessa base ed uguale altezza hanno uguale volume*'. Ma questo è il Teorema XII.5 di Euclide la cui dimostrazione usa il metodo di esaustione.
Siamo dunque arrivati al seguente quesito:
nel calcolare il volume di un tetraedro il metodo di esaustione può essere evitato? Più precisamente:
Due qualunque tetraedri con basi congruenti ed uguale altezza sono equidecomponibili(o equicomplementabili)?
Tale questione è indicata come **Terzo problema di Hilbert**.

Nel secondo capitolo, trattiamo il **Teorema di Bolyai-Gerwien** e mettiamo in evidenza che nelle cosiddette *geometrie non-Archimedee* l'uguaglianza di aree e l'equicomplementabilità rimangono concetti equivalenti (per poligoni) mentre l'equidecomponibilità non è del tutto coincidente con il concetto di equivalenza. Nelle *geometrie non-Euclidee* il Teorema di Bolyai-Gerwin rimane valido.
Ora : è possibile dimostrare l'equidecomponibilità di due qualsiasi poligoni equivalenti per mezzo di sole simmetrie centrali e traslazioni? Arriviamo dunque alla definizione di poligoni S-equidecomponibili e al Teorema di Hadwiger-Glur.

Una coppia di poligoni è detta ***S-equidecomponibile*** *se la sua equidecomponibilità può essere stabilita mediante sole traslazioni e simmetrie centrali. In altre parole, due poligoni sono S- equidecomponibili se uno di essi può essere scomposto in un numero finito di parti* $M_1, M_2, M_3, ...,$ *e l'altro nello stesso numero di parti rispettivamente congruenti* $M_1', M_2', M_3', ...,$ *in modo che i poligoni* M_1 e M_1' *possano essere ottenuti l'uno dall'altro per mezzo di traslazioni o di simmetrie centrali, e analogamente accada per le coppie di poligoni* M_2 e M_2', M_3 e M_3', *ecc.*

Un notevole rafforzamento del teorema di Bolyai-Gerwien è il seguente:
Teorema di Hadwiger-Glur. *Due qualsiasi poligoni equivalenti sono S-equidecomponibili..*

Da questo teorema segue subito che due poligoni equivalenti possono essere decomposti in parti in modo tale che i lati corrispondenti di coppie di parti congruenti siano paralleli. Infatti, se A e B sono poligoni equivalenti, è possibile decomporre uno di essi in parti in modo tale che esse possano essere ricomposte per formare l'altro poligono mediante sole traslazioni e simmetrie centrali. Resta da osservare che se due poligoni sono ottenuti l'uno all'altro mediante una traslazione o una simmetria centrale, i loro lati corrispondenti saranno paralleli.

Ci interessiamo poi ad una questione affine: è possibile decomporre poligoni equivalenti in parti, in modo tale da poterli ottenere l'uno dall'altro mediante *sole traslazioni*? In altre parole, l'applicazione di simmetrie centrali prevista dal Teorema di Hadwiger-Glur è superflua? Diciamo che non tutte le coppie di poligoni equivalenti possono essere decomposte in parti tali che sia possibile mediante sole traslazioni, ottenere un poligono dall'altro. Per stabilire questi risultati, si introduce il concetto di *invariante additivo.*
Considerando una retta l orientata, con $J_l(M)$ si indica la somma algebrica delle lunghezze di tutti i lati del poligono M paralleli alla retta l, prendendo come positive le lunghezze di quei lati che hanno lo stesso verso della retta l, e come negative le lunghezze di quelli aventi verso opposto a quello della retta l. $J_l(M)$ è detto *invariante additivo* del poligono M rispetto alla retta orientata l.
L'importanza dell'invariante additivo per l'equidecomponibilità di poligoni può essere compresa definendo i poligoni *T-equidecomponibili.*
Due poligoni sono detti *T-equidecomponibili* se la loro equidecomponibilità può essere stabilita per mezzo di sole traslazioni.
Si ha allora il seguente risultato:
Teorema. *Siano A e A' due poligoni, e l una retta orientata. Se* $J_l(A) \neq J_l(A')$, *i due poligoni A e A' non sono T-equidecomponibili.*

Il teorema appena citato può essere formulato come segue: *Due poligoni A e A' sono T-equidecomponibili solo se l'uguaglianza* $J_l(A) = J_l(A')$ *sussiste per qualsiasi retta l.* In altre parole, affinchè i poligoni A e A' siano T-equidecomponibili, è *necessario* che $J_l(A) = J_l(A')$. Si mostra che questa condizione è anche *sufficiente*, cioè vale la seguente proposizione.

Teorema. *Se due poligoni equivalenti A e A' sono tali che l'uguaglianza* $J_l(A) = J_l(A')$ *vale per qualunque retta orientata l, essi sono T-equidecomponibili.*

Nel terzo capitolo esaminiamo i problemi di equidecomponibilità ed equicomplementabilità per i *poliedri* e trattiamo il *Terzo Problema di Hilbert* giungendo alla sua soluzione.

Due poliedri sono detti *equidecomponibili* se uno di essi può essere decomposto in un numero finito di parti in modo tale che le parti componenti possono essere ricomposte dando luogo all'altro.
Hilbert afferma che il matematico tedesco Gerling 'riuscì a dimostrare l'uguaglianza di poliedri simmetrici dividendoli in parti congruenti'. Da ciò è chiaro che Hilbert non considera poliedri simmetrici come congruenti.
Nello spazio euclideo tri-dimensionale, la riflessione in un piano è un moto che cambia l'orientazione, ma gli unici poliedri (o in generale figure) che Hilbert considera come congruenti sono quelli che possono essere ottenuti l'uno dall'altro con l'aiuto dei moti che preservano l'orientazione.
Indicando con D_0 il gruppo di tutte le trasformazioni che conservano l'orientazione, si arriva al seguente:
Teorema di Gerling. *Poliedri simmetrici sono* D_0*-equidecomponibili.*

Il Terzo problema di Hilbert fu risolto nel 1900, anno in cui Hilbert lesse la sua relazione '*Mathematical Problems*'. Hibert fu preciso: i metodi di decomposizione e completamento sono 'incapaci' di dimostrare la formula per il volume di una piramide (nel caso generale). Ciò fu dimostrato da uno studente di Hilbert, Max Dehn, il quale mostrò che esistono poliedri che hanno lo stesso volume ma non sono equidecomponibili.

Dato un insieme di numeri reali M, diciamo che i numeri $x_1, x_2, ..., x_k \in M$ sono *linearmente dipendenti* con coefficienti interi se esistono interi $n_1, n_2, ..., n_k$ diversi da zero, tali che

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k = 0 \ .$$

Tale relazione sarà chiamata una *dipendenza lineare.*
Una funzione reale *f(x)* definita sull'insieme M, sarà chiamata *additiva* se per ogni dipendenza lineare tra elementi di M, la stessa dipendenza lineare si ottiene tra i corrispondenti valori di *f*, cioè

$$n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + \cdots + n_kf(x_k) = 0 \ .$$

Ora sia A un poliedro, siano $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ angoli diedrali di A espressi in radianti e siano $l_1, l_2, ..., l_p$ le lunghezze dei corrispondenti spigoli di A.

Se f è una funzione additiva definita sull'insieme M contenente tutti i numeri $\alpha_1, ..., \alpha_p$, allora definiamo

$$f(A) = l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \cdots + l_p f(\alpha_p)$$

e diciamo che *f(A)* è l'*invariante di Dehn* del poliedro A.
Siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema che rappresenta la chiave della soluzione del Terzo Problema di Hilbert.

Teorema di Hadwiger. *Dati due poliedri equivalenti A e B, indichiamo con* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ *tutti gli angoli diedri interni distinti (espressi in radianti) del poliedro A, e con* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$ *tutti gli angoli diedri interni distinti del poliedro B. All'insieme dei numeri* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$ *aggiungiamo il numero* π. *Se per l'insieme di numeri in tal modo ottenuto*,

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$$

esiste una funzione additiva f tale che

$$f(\pi) = 0$$

e se i corrispondenti invarianti per i poliedri A e B non sono uguali,

$$f(A) \neq f(B)$$

allora i poliedri A e B non sono equidecomponibili.

Dal Teorema di Hadwiger segue il teorema di Dehn.

Teorema di Dehn. *Un cubo e un tetraedro regolare equivalenti non sono equidecomponibili.*

Il quarto capitolo inizia con dare la *condizione di Bricard*:
Se due poliedri A e B sono equidecomponibili, allora si possono trovare gli interi $n_i > 0$ *e* $n'_j > 0$ *e p tali che*:

$$n_1\alpha_1 + ... + n_q\alpha_q = n'_1\beta_1 + ... + n'_r\beta_r + p\pi$$

dove $\alpha_1, ..., \alpha_q$ sono gli angoli diedrali del poliedro A e $\beta_1, ..., \beta_r$ sono gli angoli diedrali del poliedro B.
Bricard, cercò di risolvere prima di Dehn il problema formulato da Hilbert. Tuttavia la dimostrazione data da Bricard fu incorretta. A tal punto si procede facendo presente che, a differenza dei poligoni piani, dall'uguaglianza dei volumi di due poliedri non segue che essi siano equidecomponibili o equicomplementabili. Di conseguenza, non è possibile stabilire l'equivalenza dei metodi di decomposizione e di completamento per i poliedri mediante argomenti analoghi a quelli usati nel per i poligoni piani. Il problema dell'equivalenza di questi due metodi è risolto dal seguente teorema.

Teorema di Sydler. *Due poliedri sono equicomplementabili se e solo se essi sono equidecomponibili.*

Inoltre, la teoria dell'equidecomponibilità fu arricchita dal nuovo rilevante risultato nel 1965, quando Sydler dimostrò che la condizione necessaria di Dehn (Teorema di Hadwiger) è anche sufficiente ossia *una condizione necessaria e sufficiente per l'equidecomponibilità di due poliedri A e B di uguale volume è che i loro invarianti di Dehn f(A) e f(B) siano uguali per ogni funzione additiva f soddisfacente la condizione* $f(\pi) = 0$. Si è quindi giunti al prossimo risultato:

Teorema di Dehn-Sydler. *Una condizione necessaria e sufficiente per l'equidecomponibilità di due poliedri A e B (in $\Re^3$) di uguale volume è che i loro invarianti di Dehn f(A) e f(B) siano uguali per ogni funzione additiva f che soddisfi la condizione $f(\pi) = 0$.*

Il quinto e ultimo capitolo riguarda risultati recenti che costituiscono un nuovo approccio al Terzo Problema di Hilbert. Come si afferma nel quarto capitolo, non esiste nessuna dimostrazione *diretta* della condizione di Bricard. Il matematico statunitense David Benko da' una breve dimostrazione diretta della condizione di Bricard che fu trascurata per un secolo. Perciò si prevede una nuova soluzione del Terzo Problema di Hilbert.

Le dimostrazioni da lui presentate sono completamente elementari e non ricorrono all'algebra lineare.
Benko utilizza il metodo delle 'misure intere': dati i pesi *reali* positivi $a_1, .., a_N$, possiamo sempre sostituirli con pesi *interi* positivi $A_1, ..., A_N$ in modo che le uguaglianze tra i pesi vengono conservate nel seguente senso: se I_1 e I_2 sono sottoinsiemi di $\{1, ..., N\}$ tali che

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{j \in I_2} a_j \ ,$$

allora

$$\sum_{i \in I_1} A_i = \sum_{j \in I_2} A_j \ .$$

Detto *V(M)* lo spazio vettoriale generato da un insieme M di numeri reali sull'insieme dei numeri razionali Q possiamo ora enunciare il seguente teorema.

Teorema di Dehn-Hadwiger. *Siano $A^{(1)}, A^{(2)}$ due poliedri, e sia M l'insieme contenente il numero π e tutti gli angoli diedrali di $A^{(1)}, A^{(2)}$. Se $f : V(M) \to \Re$ è una funzione additiva tale che $f(\pi) = 0$ e $f(A^{(1)}) \neq f(A^{(2)})$, allora $A^{(1)}$* e *$A^{(2)}$ non sono equidecomponibili.*

Si vede qui che anche la condizione di Bricard determina il Terzo Problema di Hilbert ma essa non implica il teorema di Dehn-Hadwiger.

Riferimenti bibliografici

[1] Vladimir G. Boltianskii, *Hilbert Third Problem*, V. H. WINSTON E SONS 1978.

[2] Martin Aigner-Günter M.Ziegler, *Proofs from the Book*, Springer, 2006.

[3] Richard Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Torino, Boringhieri 1991.

[4] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Berkeley, Springer 2000.

[5] David Benko, *A New Approach to Hilbert's Third Problem*, *Conjecture and Proof* (2006), pp 43-51.

[6] Vladimir G. Boltianskii, *Figure Equivalenti ed Equidecomponibili*, 1963, *Tecnico Editoriale Milano.*