PFB - Prova dell'1/10/2002

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

1) la sufficienza viene raggiunta con punteggio di almeno 51;
2) il punteggio massimo è 100;
3) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Es 1 (Pt. 15) Determinare polinomio caratteristico, autovalori, e basi degli autospazi della matrice reale seguente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire inoltre se la matrice è diagonalizzabile.

Es 2 (Pt. 15) Discutere il seguente sistema:

$$\begin{array}{llll} & mY & +(m-2)Z & = -2\,, \\ mX & +Y & +2Z & = 1\,, \\ mX & & +3Z & = 1\,, \end{array} \qquad m \text{ parametro reale.}$$

Es 3 (Pt. 15) - Enunciare il teorema spettrale nel caso reale, dando una traccia della sua dimostrazione. Illustrarne una applicazione geometrica.

Es 4 (Pt. 15) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{x+y} & \text{se } x \neq y \\ 1 + (x+y) + \dfrac{(x+y)^2}{2} & \text{se } x = y\,. \end{cases}$$

AΠ3

(i) Si discuta la continuità di f su $\mathbb{R}^2$.
(ii) Dato $\varepsilon > 0$ si trovi $\delta > 0$ tale che $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ per ogni $|(x,y)| < \delta$.

Es 5 (Pt. 15) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ per ogni x, y. Dimostrare che f è costante. AΠ2

Es 6 (Pt. 15) Convergenza uniforme per successioni di funzioni. AΠ3

Es 7 (Pt. 25) Sia P lo spazio vettoriale delle funzioni polinomiali da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di grado al più 3. Sia $D : P \to P$ l'operatore di differenziazione.
a) Verificare che

$$\{\eta_1 = x^3 - x^2,\ \eta_2 = x^2 - x,\ \eta_3 = x - 1,\ \eta_4 = x^3\}$$

è una base di P.
b) Determinare la matrice di D rispetto alla base $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$.
c) Calcolare il determinante dell'operatore $I + D$.

d) Dire se D è diagonalizzabile oppure no motivando la risposta.

Es 8 (Pt. 25)

1. Dimostrare il teorema di Green nel piano, per una curva chiusa C che racchiude una regione $\mathcal{R}$ che gode della proprietà che ogni linea parallela agli assi coordinati interseca C in al più due punti, *i.e.* :

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy \, .$$

2. Verificare il teorema di Green nel piano (calcolando esplicitamente i due integrali) per

$$\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

dove C è il bordo della regione $\mathcal{R}$ racchiusa da $y = x^2$ e $x = y^2$.

AΠ4