Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di preparazione alla PFB

A.A. 2012-2013 - Docente: A. Bruno e G. Gentile
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Parte 1: Analisi Matematica

1. Dato $p > 0$ provare che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

   Soluzione:

   Distinguiamo tre casi:

   $\boxed{p = 1 :}$ L'asserto è vero perché $\sqrt[n]{1} = 1$ per ogni n.

   $\boxed{p > 1 :}$ Si ha che $p > 1 \Leftrightarrow p = 1 + b$ con $b > 0$. Da cui

   $$p^{\frac{1}{n}} = (1 + b)^{\frac{1}{n}} = 1 + r_n \text{ con } r_n > 0$$

   quindi $1 + b = (1 + r_n)^n \geq 1 + nr_n \Leftrightarrow nr_n \leq b \Leftrightarrow 0 < r_n \leq \dfrac{b}{n}$.

   Ora $\dfrac{b}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, quindi $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (per il Teorema dei Carabinieri). Segue l'asserto.

   $\boxed{0 < p < 1 :}$ Si ha $p = \frac{1}{1+b}$ con $b > 0$ da cui $p^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{(1 + b)^{\frac{1}{n}}}$.

   Sia $\dfrac{1}{1 + r_n} := \dfrac{1}{(1 + b)^{\frac{1}{n}}}$ cioé $\dfrac{1}{1 + b} = \dfrac{1}{(1 + r_n)^n} \leq \dfrac{1}{1 + nr_n} \Leftrightarrow 1 + nr_n \leq 1 + b \Leftrightarrow 0 < r_n \leq \dfrac{b}{n}$.

   Poiché $\dfrac{b}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, si ha $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (per il Teorema dei Carabinieri) da cui segue l'asserto.

---

2. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e periodica, allora non esiste $\lim_{x\to\infty} f(x)$, a meno che f non sia costante.

   Soluzione:

   Chiaramente, tale limite non può essere $\pm\infty$ (altrimenti, verrebbe contraddetta la periodicità di f). Supponiamo allora che $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \epsilon > 0\ \exists X > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \epsilon$ per ogni $x > X$. Comunque preso $x \in \mathbb{R}$, prendiamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $x + kT > X$. Allora

   $$|f(x) - \ell| = |f(x + kT) - \ell| < \epsilon.$$

   Per l'arbitrarietà di ϵ, otteniamo che $f(x) = \ell$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

---

3. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{my}{2})$ con $m > 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Provare che se $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è tale che $F(\Gamma(g)) \subseteq \Gamma(g) := \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, allora g è una funzione costante.

Soluzione:

Dire che $F(\Gamma(g)) \subseteq \Gamma(g)$ equivale a dire che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $\left(\frac{x}{2}, \frac{m}{2} g(x)\right) = (z, g(z))$ da cui

$$\frac{m}{2} g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) \tag{1}$$

Derivando (1) si ha $\frac{m}{2} g'(x) = \frac{1}{2} g'\left(\frac{x}{2}\right)$ che implica $g'(x) = \frac{1}{m} g'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{m}\left(2g\left(\frac{x}{2}\right)\right)'$.
Ora applicando (1) a $g\left(\frac{x}{2}\right)$ si ha $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{m} g\left(\frac{x}{4}\right)$ da cui

$$g'(x) = \frac{1}{m} g'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{m}\left(2g\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{m^2} g'\left(\frac{x}{2^2}\right) = \ldots = \frac{1}{m^n} g'\left(\frac{x}{2^n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Quindi $g(x)$ è una funzione costante.

---

4. Mostrare la seguente identità

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

Soluzione:

Utilizziamo il principio d'induzione.
Se $n = 1$ l'indentià vale. Supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$:

$$\prod_{k=0}^{n+1} (1 + x^{2^k}) = (1 + x^{2^{n+1}}) \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = (1 + x^{2^{n+1}}) \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1 - x}.$$

---

5. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \frac{\sqrt{n! + n^2} - \sqrt{n!}}{\sqrt{n!} + 4}}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2n}} + 3^n}{\sqrt{1+16^n} + 3^n}\right)$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{\ln^2 n + \ln n^2}}}{n^2+1}$;

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$;

(f) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Soluzione:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3} = +\infty$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \frac{\sqrt{n! + n^2} - \sqrt{n!}}{\sqrt{n!} + 4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \frac{n^2}{\sqrt{n!} + 4(\sqrt{n! + n^2} + \sqrt{n!})}} = \sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{n!}}\left(\sqrt{1 + \frac{n^2}{n!}} + 1\right)}} = 1.$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2n}} + 3^n}{\sqrt{1+16^n} + 3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\sqrt{\frac{1}{9^n} + \left(\frac{e^2}{9}\right)^n} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{16^n}} + \left(\frac{3}{4}\right)^n}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \left[n \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{9^n} + \left(\frac{e^2}{9}\right)^n} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{16^n}} + \left(\frac{3}{4}\right)^n}\right)\right] = \ln\left(\frac{3}{4}\right).$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{\ln^2 n + \ln n^2}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\ln n \sqrt{1 + \frac{2}{\ln n}}}}{n^2+1} =^* \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln 2 \sqrt{1 + \frac{2}{\ln n}}}}{n^2+1} =^{**} 0.$

$*$ Applicare due volte la formula del cambiamento di base dei logaritmi.
$**$ Si noti che $\ln 2 < 2$.

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi-\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi-\pi\cos x)}{\pi-\pi\cos x} \frac{\pi(1-\cos x)}{x^2} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$.

(f) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{-\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

---

6. Determinare il limite delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

(a) $a_1 = 1, \quad a_n = n + a_{n-1}$;

(b) $a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^2+1}{4a_n}$ (*Suggerimento:* mostrare che $a_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$);

(c) $a_0 > \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$;

<u>SOLUZIONE:</u>

(a) Si vede subito che la successione è monotona crescente e dunque ammette limite $+\infty$.

(b) Verifichiamo che la successione è monotona decrescente. In primo luogo si dimostra, per induzione, che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$. Inoltre si ha

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow 2a_n^2 + 1 < 4a_n^2 \Leftrightarrow a_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad a_n < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Siccome la proprietà $a_n > 0$ implica $a_n > \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora a_n è monotona decrescente.

La successione dunque ammette limite $\ell \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, a_1)$. Siccome per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che se $n \geq n_\epsilon$

$$|\frac{\sqrt{2}}{2} - \ell| < |a_n - \ell| < \epsilon$$

allora necessariamente $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Verifichiamo che la successione è monotona decrescente.

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{a_n^2+3}{a_n}) < a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow a_n < -\sqrt{3} \quad \text{o} \quad a_n > \sqrt{3}.$$

Osseviamo che da $a_0 = \sqrt{3}$, per induzione, segue che $a_n > \sqrt{3}$ per ogni $n \geq 2$, cioè la successione risulta essere monotona decrescente.

La successione dunque ammette limite $\ell \in [\sqrt{3}, a_0)$. Siccome per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che se $n \geq n_\epsilon$

$$|\sqrt{3} - \ell| < |a_n - \ell| < \epsilon$$

allora necessariamente $\ell = \sqrt{3}$.

---

7. Discutere la convergenza semplice e assoluta (laddove sia necessario) delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{3n+5})$; (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$; (d) $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}+1}{n!}$; (e) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt[3]{n^5+2n^3+17}}{\sqrt{n+2}}$.

(b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^3 n}$;

<u>SOLUZIONE:</u>

(a) Per il criterio del confronto asintotico, si ha che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{3n+5}\right) \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(3n+5)}.$$

Segue che la serie è convergente.

(b) La serie è convergente, come si vede subito applicando il criterio di condensazione di Cauchy.

(c) Abbiamo

$$\frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \frac{4}{27}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})}{(1+\frac{2}{3n})(1+\frac{1}{3n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{27} < 1.$$

Quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

(d) La serie è divergente: infatti, il termine generale non è infinitesimo, poiché

$$\frac{e^{n^2}}{n!} > \frac{e^{n^2}}{n^n} = e^{n(n-\log(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

(e) La serie è divergente: infatti,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+2n^3+17}}{\sqrt{n+2}} = \infty.$$

---

8. Discutere la convergenza semplice e assoluta (laddove sia necessario) delle seguenti serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2+x^n}$; (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+e^{n^2x}}$; (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}$; (d) $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln(n^2x)}{n^2+x^2}$.

<u>Soluzione:</u>

(a) Se $x = 1$ la serie diverge, mentre se $x = -1$ non converge. Supponiamo ora $|x| > 1$. In tal caso, il termine generale non è infinitesimo: infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{2+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n(\frac{2}{x^n}+1)} = 1.$$

Se invece $|x| < 1$, dalla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$|2+x^n| = |2-(-x^n)| \geq |2-|x^n|| \geq 2 - \underbrace{|x^n|}_{<1} > 1.$$

Dunque

$$|\frac{x^n}{2+x^n}| < |x|^n,$$

cioè la serie converge assolutamente per il criterio del confronto.

(b) Se $x = 0$, la serie diventa $\sum \frac{1}{2}$, che è chiaramente divergente. Se $x < 0$, $e^{n^2x} \to 0$, i.e. $\frac{1}{1+e^{n^2x}} \to 1$, perciò la serie è ancora divergente. Sia ora $x > 0$. Abbiamo

$$e^{n^2x} \geq n^2x \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geq \frac{2}{x}\log(n)+\frac{\log(x)}{x} \quad \Leftarrow \quad n^2 \geq \frac{2}{x}n+\frac{\log(x)}{x} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\frac{1}{x}(1+\sqrt{1+x\log(x)})\right]+1^1.$$

Quindi la serie è convergente per il criterio del confronto.

(c) Sicuramente, $x \neq -1$. Ora, sia

$$\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\sin(x^n)|}{|1+x|^n}} = \frac{1}{|1+x|}.$$

Abbiamo che $\ell < 1$ se $x \in A := (-\infty,-2)\cup(0,\infty)$. Quindi, la serie converge assolutamente se $x \in A$ e diverge assolutamente se $x \in \complement A\setminus\{-2,0\}$. Se $x = 0$, si ha una somma di zeri, e quindi la serie è ancora assolutamente convergente. Se invece $x = -2$, la serie diventa $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin((-1)^n 2^n)$, che non converge. Dobbiamo ora discutere la convergenza della serie per $x \in (-2,0)\setminus\{-1\}$. Se $x \in (-2,-1)$, allora $1+x \in (-1,0)$, cioè $1+x = -y$, per qualche $y \in (0,1)$, e quindi $x^n = (-1)^n(1+y)^n$, e

$$\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} = \frac{\sin((-1)^n(1+y)^n)}{(-1)^n y^n} = \frac{\sin((1+y^n))}{y^n} \geq 0 \quad (\sin(\cdot) \text{ è dispari}).$$

---

[1] Si può assumere che $x\log(x) \geq -e^{-1} > -1$ per ogni $x > 0$ (si vede facilmente dallo studio di funzione...).

In effetti, $\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} = |\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}|$, e abbiamo già visto che la serie diverge assolutamente per $x \in (-2,0) \setminus \{1\} \supset (-2,-1)$. Sia ora $x \in (-1,0)$, i.e. $x = -y$ per qualche $y \in (0,1)$. Poiché $x^n \to 0$, $\sin(x^n) \sim x^n$, i.e. (criterio del confronto asintotico)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} \sim \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{y}{1-y}\right)^n.$$

Ora, se $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$, la successione (a termini positivi) $(\frac{y}{1-y})^n$ è decrescente e infinitesima, quindi per Leibniz la serie é convergente. Sia ora $x \in (-1, -\frac{1}{2})$, i.e. $x = -y$ per qualche $y \in (\frac{1}{2}, 1)$. Abbiamo sempre $\sin(x^n) \sim x^n$, e quindi per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(1+x)^n} = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{y}{1-y}\right)^n,$$

e $\frac{y}{1-y} = -1 + \frac{1}{1-y} > -1 + 2 = 1$ (poiché $y > \frac{1}{2}$), cioè $(\frac{y}{1+y})^n \to \infty$. Quindi la serie non converge.

(d) Occorre sicuramente richiedere $x > 0$ per poter definire $\log(n^2 x)$. Poi, abbiamo $\frac{\log(n^2 x)}{n^2+x^2} \leq \frac{2\log(n)}{n^2} + \frac{\log(x)}{n^2}$. Poiché $\frac{\log(n)}{\sqrt{n}} \to 0$, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{2\log(n)}{\sqrt{n}} \leq 1$ per ogni $n > N$. Allora

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n^2 x)}{n^2 + x^2} \leq 2\sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{3}{2}} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} + 2\sum_{n>N} n^{-\frac{3}{2}} + \log(x) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie converge $\forall x > 0$.

---

9. (a) Mostrare che $\forall x, y > 0$ e $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
(DISUGUAGLIANZA DI YOUNG)

(b) Mostrare che $\forall p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\{a_n\} \in \ell_p$ e $\{b_n\} \in \ell_q$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(DISUGUAGLIANZA DI HOLDER)

(Suggerimenti: per il punto (a) trovare il massimo di $f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$, per il punto (b) applicare (a)).

<u>SOLUZIONE:</u>

(a) Come da suggerimento, cerchiamo il massimo della funzione $f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$: poiché $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $f'(x) = y - x^{p-1} = 0 \iff y = x^{p-1} \iff x = y^{\frac{1}{p-1}}$, allora

$$\max_{[0,+\infty)} f = f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = y^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^q}{q},$$

dunque

$$xy = \frac{x^p}{p} + f(x) \leq \frac{x^p}{p} + \max_{[0,+\infty)} f = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(b) Come da suggerimento, applicando la disuguaglianza di Young con $x = \frac{|a_n|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}}$ e $y = \frac{|b_n|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}}$ si ha che

$$\frac{|a_n||b_n|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \frac{|a_n|^p}{p\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p} + \frac{|b_n|^p}{q\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q},$$

dunque sommando per n che va da 0 a N si ha che

$$\frac{\sum_{n=0}^{N}|a_n||b_n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum_{n=0}^{N}|a_n|^p}{p\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p} + \frac{\sum_{n=0}^{N}|b_n|^p}{q\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^q},$$

e passando al $\lim\limits_{N\to\infty}$ si ottiene

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||b_n|}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p}{p\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p}{q\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

---

10. Discutere la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

(a) $f_n(x) = n^x$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{\chi_{[n,n+1]}}{n}$.

(c) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2x^2+1}$.

(d) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$.

<u>Soluzione:</u>

(a) $f_n(x) = n^x \overset{n\to\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$, dunque la convergenza non è uniforme perché le f_n sono continue $\forall n\in\mathbb{N}$ mentre f non lo è; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty,-\delta]$ $\forall\delta>0$ perché $\sup\limits_{x\in(-\infty,-\delta]}|f_n(x)-f(x)| =$
$= \sup\limits_{x\in(-\infty,-\delta]} n^x = n^{-\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{\chi_{[n,n+1]}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} f(x)\equiv 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(c) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2x^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$, dunque la convergenza non è uniforme perché le f_n sono continue $\forall n\in\mathbb{N}$ mentre f non lo è; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $\forall\delta>0$ perché $\sup\limits_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2x^2+1}\right| \leq \sup\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\dfrac{1}{n^2x^2+1} =$
$\dfrac{1}{n^2\delta^2+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

(d) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché, essendo $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n'(x) = \dfrac{n-x^2}{(x^2+n)^2} = 0 \iff x=\pm\sqrt{n}$, allora $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \left|f_n\left(\sqrt{n}\right)\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

---

11. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che ∂A sia una curva regolare γ. Siano $u,v\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ due funzioni.

(i) Dimostrare che

$$\operatorname{div}(u\cdot\nabla u) = \langle\nabla u,\nabla u\rangle + u\cdot\Delta u.$$

(ii) Verificare la formula d'integrazione per parti

$$\int_A u\Delta u dxdy = \int_\gamma \langle u\nabla u,\mathbf{n}\rangle d\sigma - \int_A \langle\nabla u,\nabla u\rangle dxdy.$$

(iii) Si supponga che u sia identicamente nulla su ∂A, e che $\Delta u(x) = \lambda u(x)$ per ogni x in A. Si dimostri che se u non è identicamente nulla, allora $\lambda < 0$.

SOLUZIONE:

(i) Ricordiamo che se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ allora $\text{div} f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$. Dunque

$$\text{div}(u \cdot \nabla u) = \frac{\partial (u \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (u \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \langle \nabla u, \nabla u \rangle + u\Delta u$$

(ii) Integrando su A la precedente relazione si ha :

$$\int_A \text{div}(u \cdot \nabla u) = \int_A \langle \nabla u, \nabla u \rangle + \int_A u\Delta u$$

Per il teorema della divergenza si ha che $\int_A \text{div}(u \cdot \nabla u) = \int_\gamma \langle u\nabla u, \mathbf{n} \rangle d\sigma$ da cui segue l'asserto.

(iii) Poiché u è identicamente nulla sul bordo di A si ha che $\int_\gamma \langle u\nabla u, \mathbf{n} \rangle d\sigma = 0$. A questo punto si ha la seguente relazione

$$\lambda \int_A u^2 dxdy = -\int_A \langle \nabla u, \nabla u \rangle dxdy$$

da cui

$$\lambda = -\frac{\int_A ||\nabla u||^2 dxdy}{\int_A u^2 dxdy} < 0$$

---

12. Sia ω la forma differenziale su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x, y, z) = y \sin z dx + x \sin z dy + xy \cos z dz.$$

(i) Dire se ω è chiusa;

(ii) Dire se ω è esatta;

(iii) Se la risposta al punto (ii) è affermativa, calcolare una primitiva di ω.

SOLUZIONE:

(i) Poiché le derivate incrociate che coincidono ω è chiusa ;

(ii) Poiché il dominio di ω è stellato e ω è una forma chiusa abbiamo che ω è esatta;

(iii) Una primitiva è $xy \sin z$.

---

13. Per $a > 0$, calcolare

$$\int_G zdxdydz \qquad \text{con} \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \leq \frac{a^2}{4}\}.$$

SOLUZIONE:

Passando in coordinate sferiche abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} (\frac{a}{2} + \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{12} a^4.$$

---

14. Data la funzione $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$H(x, y) = \frac{1 + (x^2 - 1)^2}{1 + y^2},$$

si consideri il sistema dinamico planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(a) Determinare i punti di equilibrio del sistema.

(b) Discuterne la stabilità.

(c) Studiare analiticamente le curve di livello della funzione $H(x, y)$ e darne una rappresentazione grafica.

(d) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.

(e) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ è periodica.

(f) Scriverne il periodo T come integrale definito.

SOLUZIONE:
Per la soluzione visitare

`http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/FM1/esercizi/fms28c.pdf`

---

15. Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\alpha}{8\rho^8},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α e del momento angolare L, si risponda alle seguenti domande.

(a) Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.

(b) Si determinino i punti di equilibrio.

(c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.

(d) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.

(e) Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(f) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(g) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.

SOLUZIONE:

Per la soluzione visitare

`http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/FM1/esercizi/fms36c.pdf`

---

16. Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad V(x, y) = (x^2 + y^2)(2 - x^2).$$

(a) Determinare i punti di equilibrio;

(b) Studiarne la stabilità;

(c) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema;

(d) Stimare il bacino di attrazione di eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili.

Soluzione:

Per la soluzione visitare

http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/FM1/esercizi/fmes09042008c.pdf

---

17. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1+\alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione:
Per la soluzione visitare

http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2011/FM210/tutorato/sol01.pdf

---

18. Si discutano i massimi e i minimi relativi e assoluti(qualora esistano) della funzione $f(x,y) = xy^2(x+y-1)$ nel dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geq 1\}$.

Soluzione:

Calcoliamo per prima cosa il gradiente di f per trovare i massimi e i minimi liberi di f: $\nabla f = (y^2(x+y-1) + xy^2, 2xy(x+y-1) + xy^2)$. Si ha che

$$\nabla f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2(x+y-1) + xy^2 = 0 \\ 2xy(x+y-1) + xy^2 = 0 \end{cases}$$

Uguagliando le due equazioni otteniamo

$$y^2(x+y-1) = 2xy(x+y-1) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 2xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(y-2x) = 0$$

Quindi nel caso $y = 0$ abbiamo che $(x, 0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è un punto critico e per studiarne la natura calcoliamo in primo luogo la matrice Hessiana:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2y^2 & 2y(x+y-1) + y^2 + 2xy \\ 2y(x+y-1) + y^2 + 2xy & 2x(x+y-1) + 4xy \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$$

I punti $(x, 0)$ sono punti critici degeneri e per determinare se sono massimi o minimi consideriamo il segno di f nel semipiano $\{x + y \geq 1\}$. Si ha che nel semipiano i punti $(x, 0)$ sono tali che $x > 0$ la f è positiva dunque poiché nel punti $(x, 0)$ si annulla, questi saranno punti di minimo.

Nel caso $y = 2x$ abbiamo:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2xy(x+y-1) + xy^2 = 0 \end{cases}$$

Per sostituzione nella seconda delle due equazioni, otteniamo

$$4x^2(3x-1) + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(16x-4) = 0.$$

Se $x = 0$ abbiamo il punto $(0, 0)$ che non consideriamo in quanto non è in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geq 1\}$.
Se $x = \frac{1}{4}$ abbiamo il punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ che comunque non è in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geq 1\}$. Osserviamo che anche su $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y = 1\}$ la funzione è nulla, inoltre per $x < 0$ la funzione è negativa, dunque $(x, 1-x)$

sono di massimo relativo; mentre per $x > 0$ la funzione è positiva e dunque $(x, 1-x)$ sono punti di minimo relativo. Poiché il vincolo non è compatto il massimo potrebbe non essere assunto ma essere un estremo superiore. Osserviamo infatti che tale estremo è $+\infty$ in quanto considerando una qualsiasi successione interna al vincolo (x_n, y_n) con $x_n \to \infty$ e $y_n \equiv k$,o viceversa, la $f(x_n, y_n) \to +\infty$. Dunque i minimi relativi sono assunti in $(x, 0)$ e $(x, 1-x)$ con $x > 0$, i massimi relativi sono in $(x, 0)$ e $(x, 1-x)$ con $x < 0$ mentre il massimo assoluto non c'è ma si ha $sup f = \infty$. Si noti che non abbiamo utilizzato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange in quanto all'interno abbiamo trovato massimi e minimi relativi con lo studio del gradiente di f, mentre sulla frontiera che è $\{x + y = 1\}$ f è nulla.

---

19. Calcolare massimo e minimo di $f(x, y) = x - y$ in

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 2y^2 = 1 \quad 0 \le x \le 3\}$$

<u>Soluzione:</u>

Per prima cosa si osservi che E è compatto perché chiuso e limitato e dunque per il teorema di Weierstrass la funzione f assumerà massimo e minimo su E. Essendo $E = \partial E$ questi punti possono essere trovati tramite il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = -4\lambda y \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Poiché $x, y \neq 0$ (in quanto $(0, y) \notin E$ e $(1, 0)$ non soddisfa il sistema) si trovano i punti $P_1(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P_2(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, ma P_2 non è in E quindi non lo consideriamo. Per lo studio dei massimi e dei minimi dobbiamo considerare anche gli "estremi" di E cioè $Q_1 = (3, 2)$ e $Q_2 = (3, -2)$ e andando a calcolare la funzione nei tre punti otteniamo che $\max_E f = 5$ ed è assunto in Q_2 mentre $\min_E f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed è assunto in P_1.

---

20. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y \ge 2 \ \ e \ \ x^2 + 4y^2 \le 4\}$ e $f(x, y) = e^{xy}$, calcolare massimi e minimi di f su E.

<u>Soluzione:</u>

Notiamo che E è compatto dunque essendo f continua abbiamo che per Weiestrass f deve assumere massimo e minimo in E e questi possono essere all'interno o sulla frontiera. Calcoliamo quindi il gradiente di f:

$$\nabla f = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Esso si annulla solo in $(0, 0)$ che non appartiene all'insieme E e dunque non vi sono massimi o minimi liberi. I punti di massimo e minimo saranno quindi sulla frontiera. Distinguiamo tre parti della frontiera $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 2 \quad 0 \le x \le 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 = 4 \quad 0 \le x \le 2\} \cup \{(0, 1), (2, 0)\}$. Applichiamo ora il teorema dei moltiplicatori di Lagrange ai primi due sottoinsiemi della frontiera:

$$\begin{cases} ye^{xy} = \lambda \\ xe^{xy} = 2\lambda \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Da cui otteniamo $P_1(1, \frac{1}{2})$.

$$\begin{cases} ye^{xy} = 2\lambda x \\ xe^{xy} = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

Da cui otteniamo i punti $P_2(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_3(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_4(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_5(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, ma solo $P_2 \in E$. Infine dobbiamo considerare i punti $P_6(0, 1)$ e $P_7(2, 0)$. Valutando la funzione nei vari punti otteniamo che $\max_E f = e$ ed è assunto in P_2 mentre $\min_E f = 1$ ed è assunto in P_6 e P_7.

21. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{4}x \leq y^2 \leq x, 1 \leq xy \leq 2\}$. Calcolare

$$\int_A \log \frac{x}{y^2} dxdy$$

<u>SOLUZIONE:</u>

Notiamo che A è la parte di piano (che si trova nel primo quadrante) delimitata dalle parabole $x = y^2$ e $x = 4y^2$ e dalle iperboli $xy = 1$ e $xy = 2$, quindi se $(x,y) \in A$ allora $\frac{1}{4} \leq \frac{y^2}{x} \leq 1$ e $1 \leq xy \leq 2$. Operiamo quindi il seguente cambiamento di variabili:

$$\Psi = \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

con le limitazioni $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 4$. Cerchiamo il cambio di variabili inverso:

$$\Phi = \begin{cases} x = u(\frac{v}{u})^{\frac{1}{3}} \\ y = (\frac{v}{u})^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

E si ha $det(J_\Phi) = \frac{1}{3v}$. L'integrale diventa:

$$\int_A \log \frac{x}{y^2} dxdy = \int_1^2 du \int_1^4 dv \frac{1}{3v} \log v = \frac{1}{3} \int_1^2 du [\frac{log^2 v}{2}]_1^4 = \frac{1}{6} \log^2 4$$

---

22. Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y+1\}$. Calcolare

$$\int_A xdxdydz$$

<u>SOLUZIONE:</u>

Consideriamo le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho \cos\theta \\ y = 2 + \rho \sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

E si ha $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho, \theta, t) : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 3 + \rho \sin\theta\}$ e dunque:

$$\int_A xdxdydz = \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{3+\rho\sin\theta} dt\ \rho(2+\rho\cos\theta) = \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \rho(2+\rho\cos\theta)(3+\rho\sin\theta) =$$

$$\int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ 6\rho + 2\rho^2 \sin\theta + 3\rho^2\cos\theta + \rho^2 \sin\theta = \int_0^1 d\rho 12\pi = 12\pi$$

---

23. $\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} d\sigma$ in
$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; y \leq \sin x\}$.

<u>SOLUZIONE:</u>

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2$ dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq \sin x\}$$

e inoltre $\Sigma = \sigma(K)$ con $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y,x+\frac{\sqrt{2}}{2}y^2)$.

Quindi si ha che

$$\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} d\sigma = \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} ||N(x,y)|| dxdy$$

con $N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x} \times \frac{\partial\sigma}{\partial y} = (-1, -\sqrt{2}y, 1)$ e $||N(x,y)|| = \sqrt{2}\sqrt{1+y^2}$

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} ||N(x,y)|| dxdy = \sqrt{2} \int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy.$$

Essendo $K = K_1 \cup K_2$ con

$$K_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y \leq \sin x\}$$

$$K_2 = \{(x,y) : \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

si ha :

$$\sqrt{2}\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy = \sqrt{2}\int_{K_1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy + \sqrt{2}\int_{K_2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydx + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydx = \frac{3}{32}\sqrt{2}\pi^2$$

---

24. Calcolare il flusso del campo vettoriale:

$$F(x,y,z) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{3y}{x^2+y^2}, 1)$$

attraverso la superficie S che ha rappresentazione parametrica

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2) \qquad u \in [0, \frac{1}{2}] \;\; v \in [0, 2\pi]$$

orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.

<u>Soluzione:</u>

Osserviamo che denotate con x, y, z le componenti di ϕ si ha che

$$z(u,v) = x^2(u,v) + y^2(u,v)$$

infatti S è la porzione del paraboloide $z = x^2+y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = \frac{1}{4}$. Per calcolare il flusso di F attraverso questa superficie non si può applicare il teorema della divergenza poiché il volume che ha come bordo S non è un aperto. É infatti l'unione dell'aperto $\{x^2+y^2 < z, 0 < z < \frac{1}{4}\}$ con il "coperchio del paraboloide" $\{x^2+y^2 = z, z = \frac{1}{4}\}$. Quindi calcoliamo il flusso direttamente. Determiniamo il vettore normale alla superficie:

$$\overline{n} = -\frac{1}{||\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}||}(\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}) = \frac{1}{\sqrt{4u^4+u^2}}(2u^2\cos u, 2u^2\sin v, -u)$$

Notare che essendo $-u \leq 0$ si ha che la normale punta verso il basso. Quindi:

$$\int_S <\overline{F}, \overline{n}> dS = \int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^{2\pi} dv (4u\cos^2 v) + 6u\sin^2 v - u = ... = \pi$$

Parte 2: Geometria e Algebra

1. In $V = \mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e W di equazione $kx + y + (k-2)z = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Determinare, al variare di k, la dimensione e una base dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$ di V.

<u>Soluzione:</u>

In primo luogo osserviamo che $\dim U = 2 = \dim W$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Sia A la matrice avente come colonne i generatori dei due sottospazi. Calcolando i determinanti delle sottomatrici di A si osserva che $\mathrm{rg}A \geq 2$ per ogni k. Distinguiamo ora due casi

$\boxed{\text{se } k = 1 \text{ allora } \mathrm{rg}A = 2}$

Quindi $\dim(U + W) = 2$ e, per Grassman, $\dim(U \cap W) = 2$. Segue che $U + W = U = U \cap W$.

$\boxed{\text{se } k \neq 1 \text{ allora } \mathrm{rg}A = 3}$

Segue che $\dim(U+W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$. Una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$ sarà dunque base per $U+W$; mentre ponendo

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

e risolvendo il sistema associato otteniamo che una base per l'intersezione sarà data da $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.

---

2. Sia $F : \mathbb{R}^{350} \to \mathbb{R}^{250}$ un'applicazione lineare e sia $V \subseteq \mathbb{R}^{350}$ un sottospazio vettoriale tale che

$$\dim V = 300, \qquad \dim(V \cap \ker(F)) = 50.$$

Calcolare le dimensioni di $F(V)$ e di $V + \ker(F)$. Dire se F è suriettiva.

<u>Soluzione:</u>

Per dimostrare l'asserto sfruttiamo la formula di Grassman e il Teorema di Nullità più Rango.
Si ha $\dim(F(V)) + \dim(V \cap \ker(F)) = \dim V = 300$ da cui $\dim(F(V)) = 250$. Ora,

$$\dim(V + \ker(F)) = \dim V + \dim\ker(F) - \dim(V \cap \ker(F)) \tag{2}$$

e

$$\dim \mathbb{R}^{350} = \dim F(\mathbb{R}^{350}) + \dim\ker(F). \tag{3}$$

Da (3) si ha $350 = \dim F(\mathbb{R}^{350}) + \dim\ker(F)$ che implica $\dim\ker(F) = 350 - \dim F(\mathbb{R}^{350})$. Sostituendo nella (2) abbiamo

$$350 \geq \dim(V + \ker(F)) = 600 - \dim F(\mathbb{R}^{350}) \Leftrightarrow \dim F(\mathbb{R}^{350}) \geq 250$$

d'altra parte $F(\mathbb{R}^{350}) \subseteq \mathbb{R}^{250}$, quindi $\dim F(\mathbb{R}^{350}) = 250$ (cioè F è suriettiva). A questo punto $\dim \ker(F) = 100$ e dunque $\dim(V + \ker(F)) = 350$.

---

3. Sia A una matrice quadrata 4×4 a coefficienti in $\mathbb{R}$ tale che $A^2 = I$. Dimostrare che:
   (a) $A - I$ e $A + I$ non sono entrambe invertibili;
   (b) $\ker(A + I) \cap \ker(A - I) = 0$;
   (c) $Ax - x \in \ker(A + I)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$;
   (d) $\operatorname{rg}(A - I) + \operatorname{rg}(A + I) = 4$.

   <u>SOLUZIONE:</u>

   (a) Dal fatto che $A^2 = I$ si ha che $(A-I)(A+I) = 0$ quindi $\det(A-I)\det(A+I) = \det((A-I)(A+I)) = 0$. Ciò implica che $\det(A - I) = 0$ oppure $\det(A + I) = 0$.
   (b) Se $v \in \ker(A + I) \cap \ker(A - I)$ allora $Av + v = 0 = Av - v$, da cui $v = 0$.
   (c) $(A + I)(Ax - x) = A^2x + Ax - Ax - x = 0$.
   (d) $\operatorname{rg}(A-I) + \operatorname{rg}(A+I) = 4-\dim(\ker(A+I))+4-\dim(\ker(A-I)) = 8-\dim[\ker(A + I) + \ker(A - I)]$. Ora $4 \geq 8 - \dim[\ker(A + I) + \ker(A - I)]$ quindi $\dim[\ker(A + I) + \ker(A - I)] \geq 4$; ma essendo $\ker(A + I) + \ker(A - I)$ un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ si ha l'uguaglianza.

---

4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ una sua base. Determinare la dimensione e una base del sottospazio W di V generato dai vettori

   $$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_4} - \mathbf{u_3} + \mathbf{u_1}, \quad \mathbf{v_2} = \mathbf{2u_2} + \mathbf{u_3} - \mathbf{u_4}, \quad \mathbf{v_3} = \mathbf{2u_2} + \mathbf{2u_1} + \mathbf{u_4} - \mathbf{u_3}.$$

   Completare poi la base trovata ad una base di V.

   <u>SOLUZIONE:</u>

   Le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ dei generatori sono

   $$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, -1, 1), \quad [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = (0, 2, 1, -1) \text{ e } \quad [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}} = (2, 2, -1, 1).$$

   Quindi la matrice che rappresenta $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

   $$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La dimensione di W è data dal rango di M ed è 2. Inoltre, una base per W è costituita da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Per completare tale base basta aggiungere i vettori $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ (verificare).

---

5. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ avente come base $\mathcal{B} := \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_4}\}$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito ponendo

   $$f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}, \qquad f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_4}) = \mathbf{2}(\mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}).$$

   Determinare una base di V costituita da autovettori per f.

Soluzione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $P_{M_f}(T) = T^2 + T = T(T+1)$. Quindi lo spettro di M_f sarà $\{-1, 0\}$.

L'autospazio relativo a -1 è $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, mentre quello relativo a 0 è $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Quindi una base di V costituita da autovettori è $\{\mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{2e_3} + \mathbf{e_4}\}$.

---

6. Sia $D : K^2 \times K^2 \to K$ l'applicazione così definita:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2.$$

(a) Verificare che l'applicazione D (detta applicazione determinante) è una forma bilineare antisimmetrica.

(b) Scrivere la matrice di D rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di K^2.

(c) Calcolare il cono isotropo $I_D(K^2)$.

Soluzione:

(a) Verifichiamo che D è lineare in entrambi gli argomenti.

Presi $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2$ e $a, b \in K$ si ha:

$$D(a\mathbf{x} + b\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} ax_1 + bx'_1 & ax_2 + bx'_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = aD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bD(\mathbf{x}', \mathbf{y}).$$

dove nel penultimo passaggio è stata sfruttata una delle proprietà dei determinanti.
Analogamente si verifica che $D(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{y}') = aD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bD(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$.
Infine, sempre per le proprietà dei determinanti si ha:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = -D(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Pertanto D è antisimmetrica.

(b) Risulta:

$$D(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad D(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad D(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto in base $\mathbb{E}$, D ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (antisimmetrica)

(c) $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in K^2$, si ha:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

---

7. Sia data in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ di equazione:

$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$

(a) Classificare $\mathcal{C}_{(a,b)}$ al variare di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere?

(b) Determinare a e b tali che la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ passi per i punti $P_1 = (0, \sqrt{2})$ e $P_2 = (1, -3 + \sqrt{10})$.

(c) Sia $\mathcal{C}$ la conica che verifica (b) e sia $\mathcal{D}$ la conica di equazione $xy - 3x - 2y + 4 = 0$. Esiste un'affinità T tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$? In caso affermativo determinarla.

<u>Soluzione:</u>

(a) La matrice associata alla conica è:

$$A_{(a,b)} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -b \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00\,(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -b \end{pmatrix}$$

$det(A_{(a,b)}) = ab + 9a = a(b+9)$

$det(A_{00\,(a,b)}) = -b - 9$

Sappiamo che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è degenere se $det(A_{(a,b)}) = 0$, non degenere altrimenti; in particolare (nel caso in cui sia degenere) sarà semplicemente degenere se $r(A_{(a,b)}) = 2$, doppiamente degenere se $r(A_{(a,b)}) = 1$.

Nel nostro caso $det(A_{(a,b)}) = a(b+9) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = -9$. In particolare:

- se $a = 0$ e $b \neq -9$, la conica è semplicemente degenere poiché in tal caso il minore $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -b \end{vmatrix} = -b - 9 \neq 0$ e quindi $r(A_{(a,b)}) = 2$;

- se $a \neq 0$ e $b = -9$, la conica è semplicemente degenere poiché in tal caso il minore $\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a \neq 0$ e quindi $r(A_{(a,b)}) = 2$;

- se $a = 0$ e $b = -9$, la conica è doppiamente degenere poiché in tal caso $A_{(0,-9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ da cui $\text{rg}(A) = 1$.

Analizziamo ora il segno di $det(A_{00\,(a,b)})$. Sappiamo che se $det(A_{00\,(a,b)}) \neq 0$ la conica è a centro e sarà un'iperbole nel caso in cui $det(A_{00\,(a,b)}) < 0$ e un'ellisse nel caso in cui $det(A_{00\,(a,b)}) > 0$; altrimenti, se $det(A_{00\,(a,b)}) = 0$, la conica è una parabola.

Nel nostro caso:

$$det(A_{00\,(a,b)}) = -b - 9 \Rightarrow \begin{cases} -b - 9 = 0 \Leftrightarrow b = -9 & \text{PARABOLA} \\ -b - 9 < 0 \Leftrightarrow b > -9 & \text{IPERBOLE} \\ -b - 9 > 0 \Leftrightarrow b < -9 & \text{ELLISSE} \end{cases}$$

In particolare vediamo che non esistono valori di (a,b) tali che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere, perché per $b = -9$ $\text{rg}(A) \leq 2$.

Rimane da stabilire per quali (a,b) con $b \in (-\infty, -9)$ si hanno ellissi a punti reali e per quali ellissi a punti non reali.
Sappiamo che ciò che differenzia un'ellisse a punti reali da un'ellisse a punti non reali nella matrice $A_{(a,b)}$ è la segnatura; in particolare una conica sarà un'ellisse a punti reali se, oltre alla condizione $det(A_{00\,(a,b)}) > 0$, la segnatura della sua matrice associata è $(1,2)$ o $(2,1)$, sarà invece un'ellisse a punti non reali se la segnatura della sua matrice associata è $(3,0)$ o $(0,3)$ (cioè se la f è definita positiva o negativa).

Vediamo allora per quali valori di (a,b) la matrice è definita positiva e per quali è definita negativa. Calcoliamo i minori principali:

$$D_1 = -a \quad , \quad D_2\left(\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = -a \quad , \quad D_3\left(\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -b \end{vmatrix}\right) = a(b+9)$$

Ne segue che la matrice $A_{(a,b)}$:

- è definita positiva se:

$$\begin{cases} -a > 0 \\ a(b+9) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < -9 \end{cases}$$

- è definita negativa se:

$$\begin{cases} -a > 0 \\ -a < 0 \\ a(b+9) > 0 \end{cases}$$

  che è un sistema incompatibile.

Ne concludiamo allora che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'ellisse a punti non reali se $a < 0$ e $b < -9$. $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è invece un'ellisse a punti reali se $a > 0$ e $b < -9$.

Osservazione: equivalentemente si poteva determinare la segnatura (p, q) della matrice $A_{(a,b)}$ in uno dei due modi seguenti:

- studiando il segno degli autovalori dell'operatore ad essa associato: in tal caso p sarà dato dal numero di autovalori positivi e q dal numero di autovalori negativi.
- diagonalizzando la matrice con il metodo induttivo: in tal caso p sarà dato dal numero di valori positivi e q dal numero di autovalori negativi sulla diagonale della matrice diagonale congruente alla matrice di partenza.

(b) Imponiamo che la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ passi per i punti P_1 e P_2. La coppia (a, b) dovrà allora soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} -2b - a = 0 \\ 1 - 18 + 6\sqrt{10} - 9b - 10b + 6\sqrt{10}b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 1 - 18 + 6\sqrt{10} - 9b - 10b + 6\sqrt{10}b + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ (-17 + 6\sqrt{10})b = -17 + 6\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

La conica richiesta ha pertanto equazione:

$$x^2 + 6xy - y^2 + 2 = 0.$$

(c) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $x^2 + 6xy - y^2 + 2 = 0$. Sia $A := A_{(-2,1)}$ e $A_{00} := A_{00(-2,1)}$.
Per quanto visto nel punto (a), $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere; pertanto la forma canonica $\mathcal{C}'$ ad essa affinemente equivalente è:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Sia f l'affinità tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Sia ora $\mathcal{D}$ la conica di equazione $xy - 3x - 2y + 4 = 0$.

La matrice associata alla conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad B_{00} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$det(B) = \frac{1}{2}$;

$det(B_{00}) = -\frac{1}{4}$.

$\mathcal{D}$ è quindi un'iperbole non degenere; pertanto la forma canonica $\mathcal{D}'$ ad essa affinemente equivalente è:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Sia g l'affinità tale che $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

Essendo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ affinemente equivalenti alla stessa forma canonica, esse saranno affinemente equivalenti; in particolare un'affinità h tale che $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ sarà data da $h = f^{-1} \circ g$.

Determiniamo f con il metodo di riduzione a forma canonica.

Per "trasformare" $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$ abbiamo a disposizione una successione finita di trasformazioni affini. Procediamo per vari passi:

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Essendo A_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Diagonalizziamo A_{00} con il metodo induttivo:

Sia F la forma bilineare associata a A_{00}.
$\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ è un vettore non isotropo essendo $F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = 1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^2 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove

$\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 3y = 0$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 3y = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (-3,1) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = -10$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ è una base diagonalizzante per F e quindi per A_{00}.

La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e se (x,y) e (x',y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = y' \end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\mathcal{C}_1 = f_1(\mathcal{C})$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ tramite l'affinità f_1 sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{C} : x^2 + 6xy - y^2 + 2 = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da f_1:

$(x' - 3y')^2 + 6(x' - 3y')y' - (y')^2 + 2 = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 : (x')^2 - 10(y')^2 + 2 = 0$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

Nell'equazione di $\mathcal{C}_1$ non compaiono termini di primo grado. Possiamo quindi passare al passo 3.

- **Passo 3: Normalizzazione dei coefficienti**

  Dividendo per il termine noto, l'equazione di $\mathcal{C}_1$ può essere riscritta nel modo seguente:

  $$\frac{1}{2}(x')^2 - 5(y'')^2 + 1 = 0$$

  Eseguendo la sostituzione (che corrisponde a un'affinità f_2):

  $$\begin{cases} x' = \sqrt{2}x'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

  si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_2 = f_2(\mathcal{C}_1)$:

  $$\mathcal{C}' : (x'')^2 - (y'')^2 + 1 = 0$$

  che è l'equazione della forma canonica affinemente equivalente a $\mathcal{C}$.

---

8. In $\mathbb{R}^4$, dotato di prodotto scalare standard, è assegnato l'operatore lineare T definito, rispetto alla base canonica E di $\mathbb{R}^4$, dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare una base ortonormale F di autovettori di T e scrivere la matrice di T rispetto a tale base.

<u>Soluzione:</u>

Per prima cosa troviamo gli autovalori di T e i corrispondenti autospazi.
Il polinomio caratteristico di T è $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$; pertanto T ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, ciascuno con molteplicità algebrica 2. Troviamo i relativi autospazi:

- V_1 è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

  $$(A - \lambda_1 I_4)\mathbf{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow V_1 = \langle (1,0,0,0), (0,0,1,1) \rangle$

  La base scelta per V_1 è già ortogonale rispetto al prodotto scalare standard (altrimenti una base ortogonale di V_1 poteva essere trovata applicando il procedimento di Gram-Schmidt agli autovettori scelti come base di V_1).
  Una base ortonormale per V_1 è dunque data da $\left\{(1,0,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$.

- V_{-1} è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

  $$(A - \lambda_2 I_4)\mathbf{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow V_{-1} = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,-1) \rangle$

  La base scelta per V_{-1} è già ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.
  Una base ortonormale per V_1 è dunque data da $\left\{(0,1,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$.

Notiamo che, essendo T simmetrico (A è simmetrica), gli autovettori che costituiscono l'autospazio V_1 sono ortogonali agli autovettori che costituiscono l'autospazio V_{-1} (Proposizione 22.5, Sernesi: "Geometria 1"), cioè $\forall \overrightarrow{v} \in V_1$, $\forall \overrightarrow{w} \in V_{-1}$ si ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Ne segue che $b = \left\{(1,0,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}), (0,1,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di T.

La matrice del cambiamento di base dalla base b alla base canonica è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Notiamo che P è ortogonale essendo la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali. Pertanto ${}^tP = P^{-1}$.

Quindi rispetto alla base B la matrice che rappresenta T è:

$$\mathbf{D} = {}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.

---

9. Sia C la conica euclidea di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$7x^2 - 3y^2 - 10\sqrt{3}xy - 12y - 12\sqrt{3}x - 12 = 0$$

   (a) Determinarne il tipo.

   (b) Determinare tutte le isometrie di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ (indicandone il tipo e scrivendone le equazioni) che trasformano C nella forma canonica D ad essa congruente.

<u>Soluzione:</u>

(a) La matrice associata alla conica C:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -12 & 6\sqrt{3} & -6 \\ 6\sqrt{3} & 7 & -5\sqrt{3} \\ -6 & -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 2304 \neq 0$

$det(A_{00}) = -96 < 0$

Pertanto C è un'iperbole non degenere, congruente alla forma canonica D: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, con $a > 0$, $b > 0$.

(b) Per "trasformare" C nella sua corrispondente forma canonica D abbiamo a disposizione una successione finita di isometrie.

Essendo A_{00} simmetrica, per il teorema spettrale, è possibile trovare una matrice ortogonale M tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.
Procediamo alla diagonalizzazione di A_{00}. Il polinomio caratteristico di A_{00} è $P(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda + 8)$.
Pertanto A_{00} ha autovalori: $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = -8$.
Due autovettori corrispondenti sono: $\overrightarrow{v_1} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ e $\overrightarrow{v_2} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tali vettori costituiscono una base ortonormale (diagonalizzante).
La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{e_1, e_2\}$ alla base

$\{v_1, v_2\}$ (essa è infatti ortonormale, poiché è la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e se (x, y) e (x', y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{e_1, e_2\}$ e nella base $\{v_1, v_2\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f di equazioni: $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$.

Notiamo che f è un'isometria diretta con un punto fisso (l'origine), cioè una rotazione. In particolare si può subito osservare che f è una rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ (in senso antiorario) e centro l'origine.

L'isometria f trasforma C nella conica $f(C)$ di equazione:

$$3x^2 - 2y^2 + 6x - 3 = 0$$

Allo scopo di eliminare il termine in x di tale equazione, consideriamo la generica traslazione t di vettore $(\alpha, 0)$: $\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - \alpha \\ y = y' \end{cases}$.

La conica trasformata $t(f(C)$ ha equazione:

$$3x^2 + 3\alpha^2 - 6\alpha x - 2y^2 + 6x - 6\alpha - 3 = 0$$

Posto $\alpha = 1$, t ï¿½ una traslazione di vettore $(1, 0)$ e $t(f(C)))$ ha equazione:

$$3x^2 + -2y^2 - 6 = 0\,, \quad \text{cioè}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

---

10. Riconoscerne il tipo e ridurre a forma canonica le seguenti coniche:
   (a) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$;
   (b) $x^2 + xy - 2y^2 + 2y - 1 = 0$;
   (c) $25x^2 + 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

<u>Soluzione:</u>

Ci limiteremo a classificare le coniche in quanto per la riduzione a forma canonica si procede in maniera analoga all'esercizio 7.

(a) La matrice associata alla conica è :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Dunque, poiché $\det A_{00} < 0$ si ha che la conica è un'iperbole.

(b) La matrice associata alla conica è :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \qquad B_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Dunque, poiché $\det B_{00} < 0$ si ha che la conica è un'iperbole.

(c) La matrice associata alla conica è :

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad C_{00} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Dunque, poiché $\det C_{00} > 0$, la conica è un'ellisse.

---

11. Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e sia χ_S la funzione caratteristica di S. Dimostrare che χ_S è continua in p se e soltanto se $p \notin Fr(S)$.

<u>Soluzione:</u>

La funzione χ_S è continua in p se per ogni intorno J di $f(p)$ esiste un intorno I di p tale che $f(I) \subset J$. Se $p \notin \mathrm{Fr}(S)$ allora p è un punto interno o esterno, quindi esiste un intorno I di p tutto contenuto nell'interno di S (rispettivamente nell'esterno di S). Si ha che $f(I) = \{1\}$ (rispettivamente $f(I) = \{0\}$). Poiché ogni intorno J di $f(p)$ è un intorno di 0 (rispettivamente di 1), $f(I) \subset J$ per ogni intorno J di $f(p)$.
Se invece $p \in \mathrm{Fr}(S)$ allora in ogni intorno I di p ci sono punti dell'interno e dell'esterno di S quindi $f(I) = \{1, 0\}$. Se $p \in S$ preso l'aperto $J = D_{\frac{1}{2}}(0)$ allora $f(I) \not\subset J$, se viceversa $p \notin S$ sarà sufficiente scegliere $J = D_{\frac{1}{2}}(1)$ per ottenere $f(I) \not\subset J$. Segue che χ_S non è continua in p.

---

12. Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$, con $X \neq \emptyset$ connesso e Y discreto è costante.

<u>Soluzione:</u>

Essendo f continua e X connesso, $f(X)$ è connesso. Innanzitutto, poiché $X \neq \emptyset$, $f(X) \neq \emptyset$. Se per assurdo esistessero $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ tali che $y_1, y_2 \in f(X)$ allora $f(X)$ sarebbe sconnesso poiché $\emptyset \subsetneq \{y_1\} \subsetneq f(X)$ sarebbe contemporaneamente aperto e chiuso in $f(X)$ ($f(X)$ eredita da Y la topologia discreta).

---

13. Sia G il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Esistono due interi $a, b > 1$ tali che $G \simeq \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$?

<u>Soluzione:</u>

Indichiamo con $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16})$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Dalla teoria si ha che $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16})| = \varphi(16) = 8$. Più esplicitamente $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16}) = \{[1], [3], [5], [7], [9], [11], [13], [15]\}$, dove

$$\langle[11]\rangle = \langle[3]\rangle = \{[3], [9], [11], [1]\} \supset \langle[9]\rangle$$
$$\langle[13]\rangle = \langle[5]\rangle = \{[5], [9], [13], [1]\} \supset \langle[9]\rangle$$
$$\langle[7]\rangle = \{[7], [1]\}$$
$$\langle[9]\rangle = \{[9], [1]\}$$
$$\langle[15]\rangle = \{[15], [1]\}.$$

A questo punto scegliendo due sottogruppi disgiunti (e normali) rispettivamente di cardinalità 4 e 2 saranno soddisfatte le ipotesi del teorema sul prodotto diretto di due sottogruppi.
Ad esempio prendendo $\langle[3]\rangle \cong \mathbb{Z}_4$ e $\langle[15]\rangle \cong \mathbb{Z}_2$, avremo che $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16}) \cong \langle[3]\rangle \times \langle[15]\rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

---

14. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \text{ tale che } (n, m) \mapsto 2n + 3m.$$

(a) Dimostrare che φ è un omomorfismo di gruppi.

(b) Descrivere il nucleo e l'immagine di φ e dare una rappresentazione di $\mathrm{Im}(\varphi)$ tramite il Teorema Fondamentale di Omomorfismo di gruppi.

<u>SOLUZIONE:</u>

(a) Siano $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ allora

$$\varphi((n, m) + (n', m')) = 2(n + n') + 3(m + m') = \varphi((n, m)) + \varphi((n', m')).$$

(b) Il nucleo è $\{(n, m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 2n+3m = 0\} = \{(n, m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 2n = -3m\} = \{(3k, -2k) : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. L'immagine di φ è $\mathbb{Z}$ in quanto $MCD(3, 2) = 1$ e dunque dal Teorema Fondamentale di Omomorfismo di gruppi si ha che $\mathbb{Z} \cong Im(\varphi) \cong \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\ker\varphi} \cong \mathbb{Z}$

---

15. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$ t.c. $f_\alpha(f(X)) = f(\sqrt{\alpha})$. Dimostrare che:

(a) f_α è un omomorfismo e $(X^2 - \alpha) \subseteq \ker(f_\alpha)$;

(b) Determinare $\mathrm{Im}(f_\alpha)$;

(c) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha$ è un quadrato perfetto.

<u>SOLUZIONE:</u>

(a) Siano $g, h \in Z[X]$ allora

$$f_\alpha(g + h) = (g + h)(\alpha) = g(\alpha) + h(\alpha) = f_\alpha(g) + f_\alpha(h)$$

e

$$f_\alpha(gh) = gh(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) = f_\alpha(g)f_\alpha(h).$$

Un elemento di $(X^2 - \alpha)$ è della forma $g(X)(X^2 - \alpha)$ con $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Dunque $f_\alpha(g(X)(X^2 - \alpha)) = g(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$.

(b) $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$.

(c) Discende dal punto (b).

---

16. Sia dato il gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ con l'usuale prodotto righe per colonne.

(a) Dimostrare che l'insieme

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} \pm1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$.

(b) Sia

$$G_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, G_n è un sottogruppo normale di G.

(c) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \varphi_n : & G & \to & G^n \subseteq GL_2(\mathbb{Z}_n) \\ & \begin{pmatrix} \pm1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \pm1 & k \bmod n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

è un omomorfismo e determinarne nucleo e immagine.

(d) Dimostrare che $\mathrm{Im}(\varphi_n) \simeq D_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, n > 1$.

SOLUZIONE:

(a) Per dimostrare che G è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ facciamo vedere che presi comunque $A, B \in G$ si ha $AB^{-1} \in G$. Siano
$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Osserviamo che se $B_{11} = -1$ allora $\det B = -1$ altrimenti $\det B = 1$ e che $B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Quindi
$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \mp h \pm k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

(b) La verifica di $G_n \leq G$ è analoga al punto (a). Per dimostrarne la normalità facciamo vedere che date $A \in G$ e $B \in G_n$, $A^{-1}BA \in G_n$. Si pongano $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; allora
$$A^{-1}BA = \mp \begin{pmatrix} \pm 1 & nk \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in G_n.$$

(c) Siano $A, B \in G$ con $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora la serie di uguaglianze
$$\varphi_n(AB) = \begin{pmatrix} \pm 1 & (\pm h + k) \bmod n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & k \bmod n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm 1 & h \bmod n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi_n(A)\varphi_n(B)$$
dimostra l'asserto.

Guardando al nucleo di φ_n, si ha $\ker(\varphi_n) = G_n$. Mentre $\mathrm{Im}(\varphi_n) = \{\begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z}_n\}$.

17. Ricordiamo che $D_n = \langle \sigma, \rho \rangle$ con $\sigma^2 = 1 = \rho^n$ e $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$. Dunque sarà sufficiente esibire due elementi di $\mathrm{Im}(\varphi_n)$ che soddisfano le precedenti condizioni. Si verifica facilmente che $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono i due elementi cercati.

---

18. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e sia I un suo ideale non nullo. Provare che se esiste $a + ib$ in I, con $a^2 + b^2$ numero primo, allora I è massimale.

SOLUZIONE:

Ricordiamo che $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio euclideo (e quindi PID). Dunque preso un ideale $H \subset \mathbb{Z}[i]$, $H = (h)$ con $h \in \mathbb{Z}[i]$.

Supponiamo che $I \subset J = \langle j \rangle$, allora preso $a + ib \in I \subset J$ soddisfacente l'ipotesi $a + ib = jz$ con $z \in \mathbb{Z}[i]$. Pasando alle norme otteniamo $p = N(a + ib) = N(j)N(z)$. Poiché p è irriducibile in $\mathbb{Z}$, $N(j) = 1$ oppure $N(z) = 1$. Nel primo caso $J = \mathbb{Z}[i]$, mentre nel secondo caso si ha $(a + ib)z^{-1} = j$ che implica $J = I$. Segue che I è massimale.

---

19. Si consideri il campo $\mathbb{F}_7 = \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ e il polinomio $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$. Dimostrare che l'anello quoziente $\mathbb{F}_7[X]/(f(X))$ è un campo e se ne calcoli il numero di elementi.

SOLUZIONE:

Per dimostrare che $\mathbb{F}_7[X]/(f(X))$ è un campo basta osservare che x^2+1 è irriducibile su $\mathbb{F}_7$ in quanto è polinomio di secondo grado senza radici in $\mathbb{F}_7$. Dalla teoria dei campi finiti si ha che $|\mathbb{F}_7[X]/(f(X))| = 49$.

---

20. Sia G un gruppo finito e sia H un sottoinsieme non vuoto di G. Verificare che

$$H \leq G \Leftrightarrow H \cdot H \subseteq H.$$

SOLUZIONE:

L'implicazione $\Rightarrow$ è banale.

Per mostrare che $H \leq G$ bisogna far vedere che $H \cdot H^{-1} \subseteq H$. Indichiamo con n la cardinalità di G. Se $h \in H$ allora $o(h) = t < +\infty$ perché $t|n$. Quindi da $h^t = 1$ si ha $h^{-1} = h^{t-1} \in H$ e dunque $H \cdot H^{-1} \subset H \cdot H \subset H$.

---

21. Si considerino i polinomi

$$f_1(X) := X^4 + X + 1, \quad f_2(T) := T^3 + T + 1 \in \mathbb{F}_2(T).$$

(a) Si verifichi che f_1, f_2 sono irriducibili su $\mathbb{F}_2$.

(b) Si costruisca un ampliamento K di $\mathbb{F}_2$ contenente sia una radice α di f_1 che una radice β di f_2.

(c) Si determini una base di ciascuno degli spazi vettoriali $\mathbb{F}_2(\alpha), \mathbb{F}_2(\beta)$ (su $\mathbb{F}_2$). Quali sono le componenti di β^4 rispetto alla base data per $\mathbb{F}_2(\beta)$?

(d) Si verifichi esplicitamente che TUTTE e SOLE le radici di f_1 (risp. f_2) in K sono $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ (risp. β, β^2, β^4.

(e) É vero che $\mathbb{F}_2(\beta) = \mathbb{F}_2(\beta^2+1)$? É vero che $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_2(\alpha^2+1)$?

(f) Si determini un campo di spezzamento L del polinomio $f_1(X)f_2(X)$ e si calcoli $[L : \mathbb{F}_2]$.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che f_2 è irriducible in $\mathbb{F}_2$ in quanto non ha radici in $\mathbb{F}_2$; mentre f_1 è irriducibile in quanto non ha radici in $\mathbb{F}_2$ e $f_1 \neq (X^2+X+1)^2 = X^4+X^2+1$.

(b) L'ampliamento è $\mathbb{F}_2(\alpha, \beta)$ con α tale che $\alpha^4 = \alpha + 1$ e β tale che $\beta^3 = \beta + 1$. Per costruire tale ampliamento bisogna quozientare $\mathbb{F}_2[X]$ sull'ideale massimale generato da f_1 ottenendo così un campo isomorfo a $\mathbb{F}_2(\alpha)$ (risultato teorico) e successivamente quozientare $\mathbb{F}_2(\alpha)[X]$ sull'ideale massimale generato da f_2. Si noti che l'ideale generato da f_2 in $\mathbb{F}_2(\alpha)[X]$ è massimale in quanto f_2 rimane irriducibile (per questioni di grado) su $\mathbb{F}_2(\alpha)$.

(c) $\mathbb{F}_2(\alpha) = \langle 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \rangle_{\mathbb{F}_2}$ e $\mathbb{F}_2(\beta) = \langle 1, \beta, \beta^2 \rangle_{\mathbb{F}_2}$. Dalla relazione $\beta^3 = \beta+1$ si ottiene $\beta^4 = \beta^3\beta = \beta^2+\beta$.

(d) Verifichiamo l'asserto per α (la verifica per β procede analogamente). Per prima cosa mostriamo che $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ sono tutte distinte. Intanto $\alpha \neq \alpha^2$ perché $\alpha \neq 0, 1$. Sfruttando la relazione $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ si ha

$$\alpha^4 = \alpha + 1 \qquad \alpha^8 = \alpha^2 + 1$$

e dunque $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ sono tutte distinte.

Ora proviamo che $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ sono radici di f_1. Ciò completerà la dimostrazione in quanto $\deg f_1 = 4$.

Per la formula sbagliata, $f(\alpha^{2^n}) = (\alpha^4)^{2^n} + \alpha^{2^n} + 1 = (\alpha^4 + \alpha + 1)^{2^n} = 0$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

(e) In primo luogo osserviamo che $\beta^2+1 \in \mathbb{F}_2(\beta)$ da cui $\mathbb{F}_2(\beta) \supseteq \mathbb{F}_2(\beta^2+1)$. Poiché il grado di $\mathbb{F}_2(\beta)$ su $\mathbb{F}_2$ è 3, per la formula di moltiplicatività del grado si ha

$$3 = [\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2] = [\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2(\beta^2+1)][\mathbb{F}_2(\beta^2+1) : \mathbb{F}_2].$$

Dalla precedente relazione si ottiene che $[\mathbb{F}_2(\beta^2+1) : \mathbb{F}_2] = 3$ oppure $[\mathbb{F}_2(\beta^2+1) : \mathbb{F}_2] = 1$. Se per assurdo $[\mathbb{F}_2(\beta^2+1) : \mathbb{F}_2] = 1$ allora $\beta^2+1 \in \mathbb{F}_2$ da cui $\beta = 0$ oppure $\beta = 1$: ASSURDO!
Ne concludiamo che $\mathbb{F}_2(\beta) = \mathbb{F}_2(\beta^2+1)$.

Basta osservare che $\alpha^2+1 = \alpha^8$ per concludere che $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_2(\alpha^2+1)$.

(f) L'insiene delle radici del polinomio $f_1(X)f_2(X)$ è dato dall'unione disgiunta dell'insieme delle radici di f_1 con quello delle radici di f_2. Per il punto (d) le radici di $f_1 f_2$ sono tutte contenute in $\mathbb{F}_2(\alpha, \beta)$ e, inoltre, esso rappresenta il più piccolo campo che le contiene tutte. Segue che $L = \mathbb{F}_2(\alpha, \beta)$ e, per la formula di moltiplicatività del grado, $[L : \mathbb{F}_2] = 12$.