Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 3 - 25 Ottobre 2013

1. Siano
$$g : (u, v, z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (e^u, \cos(uvz)) \in \mathbb{R}^2,$$
$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (xy, x^2, y^6) \in \mathbb{R}^3.$$
Calcolare $J_{g\circ f}$ verificando la regola della catena.

2. Siano $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tali che:
   - $g(0) = 0$;
   - $f(t, g(t)) = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$;
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$.

   Usando la regola di derivazione per funzioni composte mostrare che
$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$$

3. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calcolare il gradiente di f in coordinate polari.

4. Sia Ω dominio di $\mathbb{R}^2$ e $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.
Definiamo il Laplaciano di f come
$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y).$$
Calcolare il Laplaciano di $f(x, y)$ in coordinate polari e verificare la validitá dell'uguaglianza ottenuta per calcolare il laplaciano delle seguenti funzioni:
   (a) $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (b) $F(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$

5. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$ e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale:
   (a) $f_1(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$
   (b) $f_2(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$
   (c) $f_3(x, y) = x^3 - 3xy^2$
   (d) $f_4(x, y) = x^4 - x^3 \sin(y)$
   (e) $f_5(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$
   (f) $f_6(x, y) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + y^4 - 2y^2$
   (g) $f_7(x, y) = y^4 - y^3 \cos(x)$
   (h) $f_8(x, y) = x^2y^2 - \log(x)$
   (i) $f_9(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$
   (j) $f_{10}(x, y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$