Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 3 - 25 Ottobre 2013

1. Si sta chiedendo di vedere che
$$J_{g\circ f} = J_{g(f)}J_f$$
ove J é la matrice Jacobiana.
Vediamo le due parti dell'uguaglianza separatamente.
Abbiamo che
$$(g\circ f)(x,y) = g(xy,x^2,y^6) = (e^{xy}, \cos(x^3y^7)) := (h_1(x,y), h_2(x,y)) = h(x,y),$$
quindi
$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ -3x^2y^7\sin(x^3y^7) & -7y^6x^3\sin(x^3y^7) \end{pmatrix}.$$
Andiamo ora a calcolare J_g:
$$J_g = \begin{pmatrix} e^u & 0 & 0 \\ -vz\sin(uvz) & -uz\sin(uvz) & -uv\sin(uvz) \end{pmatrix}$$
quindi
$$J_{g(f)} = \begin{pmatrix} e^{xy} & 0 & 0 \\ -x^2y^6\sin(x^3y^7) & -xy^7\sin(x^3y^7) & -x^3y\sin(x^3y^7z) \end{pmatrix}.$$
Infine
$$J_f = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 6y^5 \end{pmatrix}.$$
Per cui abbiamo che
$$J_{g(f)}J_f = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ -3x^2y^7\sin(x^3y^7) & -7x^3y^6\sin(x^3y^7) \end{pmatrix}$$
che é effettivamente J_h.

2. Essendo $f(t,g(t)) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, allora, definendo $\gamma(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ come $\gamma(t) := (t,g(t))$, si ha che $\gamma'(t) = (1,g'(t))$ e dunque, per la regola di derivazione di funzioni composte, si ha che:
$$0 = \frac{d}{dt}0 = \frac{d}{dt}f(t,g(t)) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(t,g(t)), \gamma'(t)\rangle =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}f(t,g(t)) + \left(\frac{\partial}{\partial y}f(t,g(t))\right)g'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
Dunque preso $t=0$ si ottiene che:
$$0 = \frac{\partial}{\partial x}f(0,0) + \left(\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)\right)g'(0)$$
da cui otteniamo l'asserto.

3. Presa $f(x,y)$ si ha che $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) := (f_x(x,y), f_y(x,y))$.
Passiamo a coordinate polari: sia $g(\rho,\theta) := f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
Abbiamo che:
$$g_\rho = f_x\cos(\theta) + f_y\sin(\theta)$$
$$g_\theta = -\rho\sin(\theta)f_x + \rho\cos(\theta)f_y$$
per la regola di derivazione di funzioni composte.
A partire da queste due relazioni, per trovare f_x e f_y, dobbiamo combinare in maniera opportuna le derivate parziali di $g(\rho,\theta)$.
In particolare per trovare f_x bisogneŕa sottrarre in maniera opportuna le derivate parziali di $g(\rho,\theta)$ in maniera che f_y si annulli (e viceversa per calcolare f_y).
Dunque:
$$\frac{g_\rho}{\sin(\theta)} - \frac{g_\theta}{\rho\cos(\theta)} = f_x(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = f_x\left(\frac{1}{\sin(\theta)\cos(\theta)}\right)$$
da cui
$$f_x = g_\rho\cos(\theta) - \frac{g_\theta\sin(\theta)}{\rho}.$$
Analogamente
$$\frac{g_\rho}{\cos(\theta)} + \frac{g_\theta}{\rho\sin(\theta)} = f_y(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = f_y\left(\frac{1}{\sin(\theta)\cos(\theta)}\right)$$
da cui
$$f_y = g_\rho\sin(\theta) + \frac{g_\theta\cos(\theta)}{\rho}.$$
Quindi
$$\nabla f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \left(g_\rho(\rho,\theta)\cos(\theta) - \frac{g_\theta(\rho,\theta)\sin(\theta)}{\rho}\ ,\ g_\rho(\rho,\theta)\sin(\theta) + \frac{g_\theta(\rho,\theta)\cos(\theta)}{\rho}\right).$$

4. Passiamo a coordinate polari: sia $g(\rho,\theta) := f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
Abbiamo che:
$$g_\rho = f_x\cos(\theta) + f_y\sin(\theta)$$
$$g_\theta = -\rho\sin(\theta)f_x + \rho\cos(\theta)f_y$$
$$g_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2(\theta) + f_{xy}\sin(2\theta) + f_{yy}\sin^2(\theta)$$
$$g_{\theta\theta} = -\rho\cos(\theta)f_x + \rho^2\sin^2(\theta)f_{xx} - \rho^2\sin(2\theta)f_{xy} - \rho\sin(\theta)f_y + \rho^2\cos^2(\theta)f_{yy}$$
Dobbiamo ora, in maniera opportuna, trovare una combinazione lineare che ci isoli le derivate seconde di $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
Sommiamo le derivate seconde di $g(\rho,\theta)$ per togliere le derivate miste di $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
Abbiamo che
$$\frac{g_{\theta\theta}}{\rho^2} + g_{\rho\rho} = f_{xx} + f_{yy} - \frac{\cos(\theta)f_x}{\rho} - \frac{\sin(\theta)f_y}{\rho}.$$
A questo punto notiamo che
$$\frac{g_{\theta\theta}(\rho,\theta)}{\rho^2} + g_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{g_\rho(\rho,\theta)}{\rho} = \Delta f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)).$$

Andiamo ad usare la formula ottenuta per calcolare i Laplaciani delle funzioni richieste:

(a) Vediamo prima chi é $\Delta P(x,y)$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

perció

$$\Delta P(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Essendo $g(\rho,\theta) = \rho$ si ha che

$$g_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0 = g_{\rho\rho}(\rho,\theta)$$

$$g_\rho(\rho,\theta) = 1$$

quindi

$$\Delta P(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \frac{1}{\rho}.$$

Essendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ l'uguaglianza é provata.

(b) Abbiamo che:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

perció

$$\Delta F(x,y) = \frac{4}{(1+x^2+y^2)}.$$

Essendo $h(\rho,\theta) = \log(1+\rho^2)$ si ha che

$$h_{\theta\theta}(\rho,\theta) = 0$$

$$h_\rho(\rho,\theta) = \frac{2\rho}{1+\rho^2}$$

$$h_{\rho\rho}(\rho,\theta) = \frac{2-2\rho^2}{(1+\rho^2)^2}$$

quindi

$$\Delta F(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \frac{4}{(1+\rho^2)^2}$$

che é quello che volevamo.

5. I punti stazionari di una funzione $f(x,y)$ sono quei punti che annullano il suo gradiente. Una volta ottenuti essi, per sapere se sono massimi o minimi bisogna trovare la matrice Hessiana di $f(x,y)$ data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

ove $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ per la teoria.
Una volta trovata la matrice Hessiana, calcoliamo quanto vale il suo determinante in ogni punto stazionario.
Possono accadere le seguenti cose:

- Se $det(H_f(x_0,y_0)) < 0$ allora (x_0,y_0) é un punto di sella;
- Se $det(H_f(x_0,y_0)) > 0$ allora (x_0,y_0) é:
  - un massimo se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$;
  - un minimo se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$;
- Se $det(H_f(x_0,y_0)) = 0$ non possiamo dire nulla ed occorrerá fare un ulteriore analisi per dedurre se (x_0,y_0) é un punto di massimo, di minimo o di sella.

Detto questo partiamo con la risoluzione degli esercizi:

(a) $\nabla f_1(x,y) = (4x^3 - 4x, 4y - 4y^3) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x \\ y^3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \pm 1 \\ y = 0, \pm 1 \end{cases}$.
Quindi $f_1(x,y)$ ha 9 punti stazionari:
$P_1 = (-1,-1),\ P_2 = (-1,0),\ P_3 = (-1,1),\ P_4 = (0,-1),$
$P_5 = (0,0),\ P_6 = (0,1),\ P_7 = (1,-1),\ P_8 = (1,0),\ P_9 = (1,1).$
La matrice Hessiana nel nostro caso é

$$H_{f_1}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che:

$$H_{f_1}(P_1) = H_{f_1}(P_3) = H_{f_1}(P_7) = H_{f_1}(P_9) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix};$$

$$H_{f_1}(P_4) = H_{f_1}(P_6) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix};$$

$$H_{f_1}(P_2) = H_{f_1}(P_8) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$H_{f_1}(P_5) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice Hessiana nei punti $P_1,\ P_3,\ P_5,\ P_7$ e P_9 é negativo, indi tali punti sono di sella;
Il determinante della matrice Hessiana negli altri punti é positivo, quindi sono punti di massimo o di minimo.
Per i punti P_4 e P_6 si ha che $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} < 0$, quindi sono punti di massimo.
Invece per i punti P_2 e P_8 si ha che $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} > 0$, quindi sono punti di minimo.

(b) $\nabla f_2(x,y) = (3x^2y+y^3-y, x^3+3xy^2-x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y(3x^2+y^2-1)=0 \\ x(x^2+3y^2-1)=0 \end{cases}$.

Se $y=0$ nella prima riga abbiamo che $x(x^2-1)=0$ nella seconda. Dunque otteniamo i punti $P_1=(-1,0),\ P_2=(0,0),\ P_3=(1,0)$.
Se $y \neq 0$ il sistema diventa $\begin{cases} 3x^2+y^2-1=0 \\ x(x^2+3y^2-1)=0 \end{cases}$.
Se $x=0$ nella seconda riga otteniamo che $y^2=1$, quindi otteniamo i punti $P_4=(0,-1),\ P_5=(0,1)$.
Se $x \neq 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-1=0 \\ x^2+3y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-3x^2 \\ x^2+3(1-3x^2)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2-1=0 \\ x^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\frac{1}{4} \\ x^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\frac{1}{2} \\ x^2=\pm\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi abbiamo ottenuto i punti:
$P_6=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ P_7=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ P_8=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ P_9=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$
Ora:

$$H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-1 \\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy \end{pmatrix}.$$

Facendo i conti troviamo che il determinante dell'Hessiana nei punti $P_i\ ,i=1,...,5,$ é negativo, quindi essi sono punti di sella.
Nei mancanti punti il determinante é invece positivo.
Per i punti P_6 e P_9 si ha che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3}{2} > 0$, quindi tali punti sono minimi.
Per i punti P_7 e P_8 si ha che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} < 0$, quindi tali punti sono massimi.

(c) $\nabla f_3(x,y) = (3x^2-3y^2, -6xy) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0.$

Pertanto l'unico punto stazionario é $P=(0,0)$. In questo caso abbiamo che

$$H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

Dunque il determinante dell'Hessiana é nullo se calcolato in P.
Notiamo che $f_3(0,0)=0$.
Se consideriamo punti vicini all'origine del tipo $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ si ha che $f_3\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{n^3} < 0.$
Considerati i punti vicini all'origine del tipo $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ si ha che $f_3\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^3} > 0.$

Essendoci punti prossimi all'origine in cui la funzione é positiva ed altri in cui la funzione é negativa, abbiamo che P é un punto di sella.

(d) $\nabla f_4(x,y) = (4x^3 - 3x^2\sin(y), -x^3\cos(y)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{3}{4}x^2\sin(y) \\ x^3\cos(y) = 0 \end{cases}$.

Se $x = 0$ il sistema é valido $\forall y$, quindi i punti $P_y = (0, y)$ sono stazionari.
Se $x \neq 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\sin(y) \\ \cos(y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{3}{4}(-1)^k \end{cases}.$$

Notiamo che se $k = 2s$ abbiamo i punti $P_{2s} = \left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2s\pi\right)$ e se $k = 2s+1$ abbiamo i punti $P_{2s+1} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + (2s+1)\pi\right)$.
L'Hessiana di $f_4(x,y)$ é

$$H_{f_4}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6x\sin(y) & -3x^2\cos(y) \\ -3x^2\cos(y) & x^3\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che

$$H_{f_4}(P_{2s}) = H_{f_4}(P_{2s+1}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{27}{64} \end{pmatrix}.$$

Essendo il suo determinante positivo e $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} > 0$, abbiamo che sono tutti punti di minimo.
L'Hessiana calcolata nei punti P_y é nulla.
Notiamo che i punti del tipo $(0, k\pi)$ sono minimi, perché $f_4(x, k\pi) = x^4 > 0 = f(0, k\pi)\ \forall x \neq 0$.
Tutti gli altri punti sono di sella: i punti del tipo $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ sono tali che, presi intorni destri e sinistri dell'asse y ad altezza $\frac{\pi}{2} + k\pi$ si ottiene un cambio di segno, mentre $f_4(0, y) = 0\ \forall y$.
Ad esempio se $y = \frac{\pi}{2}$ si ha che $f_4\left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n} - 1\right) < 0$ mentre $f_4\left(-\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n} + 1\right) > 0$.
Con lo stesso ragionamento si puó estendere il discorso a tutti i punti che non siano del tipo $(0, k\pi)$.

(e) $\nabla f_5(x,y) = (2x(y^2-1), 2y(x^2-1)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(y^2-1) = 0 \\ y(x^2-1) = 0 \end{cases}$.

Se $x = 0$ ne consegue che anche $y = 0$ e quindi otteniamo il punto $P_1 = (0,0)$.
Se invece $x \neq 0$ si ha che $y = \pm 1$ nella prima riga e che quindi $x = \pm 1$ nella seconda.
Pertanto otteniamo i 4 punti:
$P_2 = (1,1),\ P_3 = (1,-1),\ P_4 = (-1,1),\ P_5 = (-1,-1)$.
Essendo

$$H_{f_5}(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{pmatrix}$$

abbiamo che il suo determinante nei punti $(\pm 1, \pm 1)$ é negativo, indi sono punti di sella.
Nel punto P_1 invece il determinante é positivo, ed essendo $\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(P_1) = -2 < 0$ si ha che é un punto di massimo.

(f) $\nabla f_6(x,y) = (4x^3 - 12x^2 + 8x, 4y^3 - 4y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x-1)(x-2) = 0 \\ y = 0, \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1,2 \\ y = 0, \pm 1 \end{cases} \Longrightarrow$ abbiamo 9 punti:
$P_1 = (0,0),\ P_2 = (0,1),\ P_3 = (0,-1),\ P_4 = (1,0),\ P_5 = (1,1),$
$P_6 = (1,-1),\ P_7 = (2,0),\ P_8 = (2,1),\ P_9 = (2,-1).$
Ora:

$$H_{f_6}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 24x + 8 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

quindi

$$H_{f_6}(P_1) = H_{f_6}(P_7) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{punti di sella.}$$

$$H_{f_6}(P_2) = H_{f_6}(P_3) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{punti di minimo.}$$

$$H_{f_6}(P_5) = H_{f_6}(P_6) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{punti di sella.}$$

$$H_{f_6}(P_8) = H_{f_6}(P_9) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{punti di minimo.}$$

$$H_{f_6}(P_4) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textit{punto di massimo.}$$

(g) $\nabla f_7(x,y) = (y^3 \sin(x), 4y^3 - 3y^2 \cos(x)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 \sin(x) = 0 \\ y^3 = \frac{3}{4} y^2 \cos(x) \end{cases}.$
Come per $f_4(x,y)$ otteniamo punti del tipo $P_x = (x,0)$,
$P_{2s} = \left(2s\pi, \frac{3}{4}\right)$ e $P_{2s+1} = \left((2s+1)\pi, -\frac{3}{4}\right)$.
Svolgendo conti analoghi otteniamo che i punti $P_{2s} = \left(2s\pi, \frac{3}{4}\right)$ e $P_{2s+1} = \left((2s+1)\pi, -\frac{3}{4}\right)$ sono di minimo.
Anche in tal caso $H_{f_7}(x,0)$ ha determinante nullo e con conti identici a sopra si ha che i punti del tipo $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ sono minimi e gli altri punti di sella.

(h) $\nabla f_8(x,y) = (2xy^2, 2x^2y - \frac{1}{y}) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 = 0 \\ (xy)^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ mai.
Quindi la funzione non ha punti critici.

(i) $\nabla f_9(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y\left(\frac{1}{\sqrt{y^2}} + 2\right) = 0 \end{cases}$
cioé soltanto se $x = y = 0$.
$(0,0)$ non é un punto dove non esiste f_9, dove la funzione non é parzialmente derivabile. Nonostante ció la funzione ha un minimo assoluto in $(0,0)$.

(j) $\nabla f_{10}(x,y) = (4(x^3 - x + e^x(e^x - y)^3), -4(e^x - y)^3) = (0,0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x \\ x^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \pm 1 \\ y = e^x \end{cases}$, quindi otteniamo i punti:

$P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,e)$ e $P_3 = (-1, \frac{1}{e})$.
Essendo $y = e^x$ nel calcolo dell'Hessiana omettiamo i termini che contengono $(e^x - y)$ essendo nulli in tutti e tre i punti(ovviamente nel calcolo delle derivate sono necessari!!!).
Dunque
$$H_{f_{10}}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
e quindi il determinante dell'Hessiano é nullo in tutti e 3 i punti.
Cominciamo con l'analisi del punto P_1: abbiamo che $f_{10}(P_1) = 0$.
Notiamo che in punti del tipo $\left(0, 1 \pm \frac{1}{n}\right)$ la funzione assume valori positivi, mentre considerato il punto $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ si ha che
$f_{10}\left(\frac{1}{n}, 1\right) = \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^2} + (e^{\frac{1}{n}} - 1)^4 \approx \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4} = \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) < 0$.
Quindi P_1 é un punto di sella.
Procediamo con l'analisi di P_2: abbiamo che $f_{10}(P_2) = -1$.
$f_{10}\left(1, e \pm \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n^4} > -1$;
$f_{10}\left(1 + \frac{1}{n}, e\right) \approx -1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{e^4}{n^4} > -1$;
$f_{10}\left(1 - \frac{1}{n}, e\right) \approx -1 + \frac{4}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{e^4+1}{n^4} > -1$;
$f_{10}\left(1 + \frac{1}{n}, e + \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} + (e(e^{\frac{1}{n}} - 1) - \frac{1}{n})^4 \approx$
$\approx -1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \left(\frac{e-1}{n}\right)^4 > -1$;
$f_{10}\left(1 - \frac{1}{n}, e - \frac{1}{n}\right) \approx -1 + \frac{4}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + \left(\frac{1-e}{n}\right)^4 > -1$;
$f_{10}\left(1 + \frac{1}{n}, e - \frac{1}{n}\right) \approx -1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \left(\frac{1-e}{n}\right)^4 > -1$;
$f_{10}\left(1 - \frac{1}{n}, e + \frac{1}{n}\right) \approx -1 + \frac{4}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + \left(\frac{e-1}{n}\right)^4 > -1$.
In tutte i punti prossimi a P_2 si ha che la funzione assume valori piú grandi di -1, quindi P_2 é un punto di minimo.
Concludiamo con l'analisi di P_3: abbiamo che $f_{10}(P_3) = -1$.
Possiamo ben credere che per P_3 valga un discorso analogo a quello che é valso per P_2.
Chiamata $g(x) = x^4 - 2x^2$ si ha che $f_{10}(x,y) = g(x) + (e^x - y)^4$.
Notiamo che $g\left(-1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{4}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^4} > -1$ e
$g\left(-1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4} > -1$.
Essendo $(e^x - y)^4 \geq 0 \ \forall\, x, y$ abbiamo che $f_{10}(x,y)$ in un intorno di P_3 sará sempre piú grande di -1.
Quindi anche P_3 é un punto di minimo.

NB. Nelle scorse soluzioni alla fine della prima stima (relativa all'esercizio $7(c)$ del tutorato 1) un $|x^3|$ diventa $|x|^{\frac{1}{3}}$. Pare chiaro che é solo un errore di battitura.

If you have a problem Better Call Fra