AM210 2012-13: Tracce delle lezioni- II Settimana

SPAZI METRICI

Sia X un insieme. Una $d : X \times X :\to [0, +\infty)$ tale che

(i) $0 \leq d(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)
(ii) $d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)
(iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

si chiama **distanza o metrica** su X e (X, d) si chiama **spazio metrico** .

Metrica associata a una norma . Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora

$$d(u, v) := \|u - v\| \qquad \text{é una metrica su } V$$

Palle aperte, chiuse. Sia (X, d) spazio metrico. Siano $r > 0$ e $x_0 \in X$. Scriveremo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}, \qquad (\textbf{palla aperta di raggio } r \textbf{ e centro } x_0)$$

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\} \qquad (\textbf{palla chiusa di raggio } r \textbf{ e centro } x_0)$$

Se V é spazio normato, é

$$B_r(x_0) = rB_1 + x_0 := \{rx + x_0 : x \in B_1\} = B_r + x_0 = \{x + x_0 : x \in B_r\}, \quad B_r := B_r(0)$$

SUCCESSIONI CONVERGENTI in uno SPAZIO METRICO

Sia (X, d) spazio metrico. Siano $x_k, x \in X$. Allora

$$x_k \to_k x \quad \Leftrightarrow \quad d(x_k, x) \to_k 0$$

ovvero, sse $\forall \epsilon > 0, \quad x_k \in B_\epsilon(x)$ definitivamente. Se V é spazio normato,

$$v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_k - v\| \to_k 0$$

In $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea $\|.\|_2$: $v_k \to_k v$ in $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \|v_k - v\|_2 \to_k 0$.
(i) Sia $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2 \to_k 0 \Leftrightarrow x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \ x_{k,n} \to_k x_n$$

(ii) u_k converge $\Rightarrow$ $\sup_k \ ||u_k|| < +\infty$ (ma non viceversa)
(iii) $u_k \to u, v_k \to v \quad \Rightarrow \quad tu_k + sv_k \to tu + sv \qquad \forall t, s \in \mathbf{R}$

In $C([a, b])$ con $\|f\|_\infty$: $f_n \to f \Leftrightarrow f_n$ converge a f uniformemente in $[a, b]$.

Elementi di topologia negli spazi metrici. Sia (X,d) spazio metrico, $A \subset X$.
Nomenclatura.
$x \in X$ é *interno* ad A se $\quad x \in intA := \{x \in X : \quad \exists r > 0 \quad \textit{tale che} \quad B_r(x) \subset A\}$
$x \in X$ é *esterno* ad A se é interno ad A^c (=$X \setminus A$ é il *complementare* di A)
$x \in A$ é *punto isolato* di A se $\quad A \cap B_r(x) = \{x\} \quad \forall r$ piccolo
$x \in X$ é *punto di accumulazione* per A se $\quad A \cap (B_r(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall r > 0$
$x \in X$ é *punto frontiera* di A se $\quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap A^c \; \forall r > 0$ e

$$\partial A := \{x : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap A^c \quad \forall r > 0\} \qquad (\textit{ frontiera} \text{ di } A)$$

é l'insieme dei punti frontiera di A. Chiaramente, $\quad \partial A = (intA)^c \cap (intA^c)^c = \partial A^c$.

Ad esempio, $\qquad intB_r(x) = B_r(x) \qquad$ perché, $\quad$ se $y \in B_r(x)$, allora

$d(z,y) < \rho := r - d(y,x) \Rightarrow d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < r$ ovvero $\quad B_\rho(y) \subset B_r(x)$

Allo stesso modo si vede che ogni punto di $\quad C_r(x) := \{y \in X : \quad d(y,x) > r\}$ é un punto interno ad A. Ne deriva che

$$\partial B_r(x) = (B_r(x))^c \cap (C_r(x))^c = S_r(x) := \{y \in X : \quad d(y,x) = r\} = \partial C_r(x)$$

Def. 1. $O \subset X$ si dice **aperto** se $\quad \forall u \in O \; \exists r > 0 : \; B_r(u) \subset O$, cioé se tutti i suoi punti sono punti interni. Indicheremo con $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti di (X,d).

Dunque O é aperto sse $O \cap \partial O = \emptyset$. Siccome $intB_r(x) = B_r(x)$, una palla aperta é un insieme aperto; $\;$ ne consegue che $intA$ é aperto per ogni A.

Def. 2. $F \subset X$ si dice **chiuso** $\qquad$ sse $\quad F^c \quad$ (il complementare di F) $\quad$ é aperto.

Prop. 1 $\;$ Le seguenti affermazioni sono equivalenti
(i) $\quad F$ é chiuso
(ii) $\quad \partial F \subset F$
(iii) $\quad B_r(x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in F$.
(iv) $\quad x_k \in F, \; x_k \to_k x \quad \Rightarrow \quad x \in F$

Prova.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$: $\quad \partial(F^c) = \partial F \subset F \quad \Leftrightarrow \quad \partial(F^c) \cap F^c = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad F^c$ é aperto.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ $\quad$ Sia $\partial F \subset F$. Se $B_r(x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0$, allora $x \in F$, perché, se no, $B_r(x) \cap F^c \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ e quindi $x \in \partial F \subset F$, assurdo. Viceversa, sia $x \in \partial F$ e quindi $B_r(x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ e quindi $\quad x \in F$. .
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ $\quad$ ovvio.

Esempi. Una palla chiusa é un insieme chiuso, perch'é complementare di un aperto. Poi, $A \cup \partial A$ é chiuso quale che sia A, perché

$$(A \cup \partial A)^c = A^c \cap (\partial A)^c = A^c \cap (intA \cup intA^c) = A^c \cap intA^c = intA^c$$

Prop. 2
(i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$
(ii) F_α chiusi, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ e $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha$ sono chiusi

Prova. (i) $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \Rightarrow \exists\, \overline{\alpha}, \exists B_r(x) : \quad B_r(x) \subset O_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha$. Se $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$ esistono $B_{r_\alpha}(x) \subset O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_0$. Se $r \leq r_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{A}_0$ allora $B_r(x) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} B_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$

(ii) $\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

In particolare, se $\mathcal{F}_A$ indica la classe dei chiusi contenenti A, l'insieme

$$\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F \;=\; A \cup \partial A \qquad (\textit{chiusura} \quad \textit{di } A)$$

é chiuso: é il piú piccolo chiuso contenente A. L'uguaglianza segue dal fatto che $A \cup \partial A$ é chiuso e, per la (iii) della Prop. 1, $A \cup \partial A \subset F$ se F é un chiuso contenente A.

Prop. 3. (i) $F \subset X$ é **chiuso** $\Leftrightarrow \quad F = \overline{F}$.
(ii) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\, x_j \in A : \quad x_j \to_j x$.
Prova.
(i) Se $F = \overline{F}$, allora F é chiuso perché $\overline{F}$ é chiuso. Viceversa, in primo luogo, $F \subset \overline{F}$; poi, $\overline{F} \subset F$ perché $\overline{F}$ é contenuto in ogni chiuso contenente F, ed F é chiuso.
(ii) Sia $x \in \overline{A}$ e supponiamo, per assurdo, che non ci sia $x_j \in A$ tale che $x_j \to x$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $(B_r(x))'$, essendo un chiuso contenente A, contiene $\overline{A}$, che contiene x: assurdo. Viceversa, se $x_j \in A : \quad x_j \to_j x$ e F é un chiuso contenente A, allora $x \in F$ e quindi, per l'arbitrarietá di F, $x \in \overline{A}$.

Aderenza di una successione. Se $x_n \in X$, l'aderenza della successione x_n é

$$Ad(x_n) := \bigcap_n \overline{\{x_k : \quad k \geq n\}} = \{x : \quad \exists x_{n_j} \to_j x\}$$

Sia $x_{n_j} \to_j x$, $n \in \mathbf{N}$. Da $x_{n_j} \in \{x_k : \quad k \geq n\}$ se $n_j \geq n$, segue che $x \in \overline{\{x_k : \quad k \geq n\}}$. Viceversa, se $x \in Ad(x_n)$, o esiste $n_j \to \infty$ tale che $x = x_{n_j} \quad \forall j$, e quindi $x = \lim_j x_{n_j}$, oppure esiste n_0 tale che $x \neq x_k \quad \forall k \geq n_0$. Siccome $x \in \overline{\{x_k : \quad k \geq n_0\}}$, x é limite di una successione di elementi di $\{x_k : \quad k \geq n_0\}$.

CONTINUITÁ

Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici, $x_0 \in A \subset X$; una $f : A \to Y$ é continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x, x_0) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \rho(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$$

ovvero $\forall \epsilon > 0, \exists \delta := \delta_\epsilon : \quad f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$. La funzione f si dice continua in A se é continua in ogni punto di A. $\quad C(A, \mathbf{R}^n)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A a valori in $\mathbf{R}^n$ $(C(A) := C(A, \mathbf{R}))$.

La distanza é una funzione continua: $\quad d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y)$

$$\Rightarrow \quad |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \qquad \forall x, y, x_0, y_0$$

In particolare, se $(V, \|.\|)$ spazio normato, allora $\quad x \to \|x\| = d(x, 0)$ é funzione continua (anzi, Lipschitziana): $\quad | \, \|x\| - \|x_0\| \, | \leq \|x - x_0\|$.

Nota. Naturalmente in V puó esistere un'altra norma, diciamo $\|.\|_1$, che puó non essere continua in $(V, \|.\|)$. Ad esempio, la norma $\|.\|_\infty$ su $C([0, 1])$ dotato della norma integrale $\|.\|_1$ non é continua, perché, ad esempio, $\int_0^1 t^n dt \to_n 0$ ma $\sup_{t \in [0,1]} t^n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Che $\|.\|_\infty$ non sia continua segue allora dalla

Proposizione 1 $\quad$ Sia $f : A \to Y, \quad x \in A.$ $\quad$ Allora
(i) f é continua in $x \quad \Leftrightarrow \quad (x_n \in A, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x))$
(ii) Se $Y = \mathbf{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_m), \quad f$ é continua in $x \ \Leftrightarrow$ le f_j sono continue in x.

La dimostrazione di (i) é come nel caso $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
La (ii) segue dal fatto che $f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(x_n) \to f_j(x)$ per $j = 1, \ldots, m$.

Proposizione 2

$$f \text{ é continua} \Leftrightarrow (O \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow (F \quad \text{chiuso} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \quad \text{é chiuso})$$

$\Rightarrow$: sia $x \in f^{-1}(O)$, ovvero $f(x) \in O$ e quindi $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ per un $\epsilon > 0$. Ma, per continuitá, esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset O$ e quindi $B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.
$\Leftarrow$: $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ aperto $\quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0$ tale che $\quad B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow$ $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ che dice appunto che f é continua in x.

Proposizione 3 $\quad$ Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$ continue in $u \in A$. $\quad$ Allora
(i) $\alpha f + \beta g$ é continua in $u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) se $m = 1$, fg é continua in u e, se $g(u) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in u
(iii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to \mathbf{R}^p$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

TRASFORMAZIONI LINEARI CONTINUE.

Siano $(E_i, \|.\|_i), i = 1, 2$ spazi normati, $L : E_1 \to E_2$ lineare. Allora:

(i) L é continua in $E_1 \quad \Leftrightarrow \quad L$ é continua in zero.
(ii) L é continua $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c = c_L$ tale che $\|Lx\|_2 \le c\|x\|_1 \quad \forall x \in E_1$

Prova di $\Leftarrow$ in (i). Da L é continua in zero, segue che

$$u_n \to u \quad \Rightarrow \quad u_n - u \to 0 \quad \Rightarrow \quad Lu_n - Lu = L(u_n - u) \to 0$$

Prova di $\Rightarrow$ in (ii). Dalla continuitá di L in 0 segue che $\exists c > 0 : \quad \|u\|_1 \le \frac{1}{c} \quad \Rightarrow$ $\|Lu\|_2 \le 1$ e quindi

$$\|L(\frac{u}{c\|u\|_1})\|_2 \le 1 \Rightarrow \|Lu\|_2 \le c\|u\|_1$$

Lo spazio $\mathcal{L}(E, F)$, $E' := \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ $(duale\ algebrico - topologico)$.

Siccome la combinazione lineare di funzioni continue é anch'essa continua, $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ é sottospazio lineare di $L(E, F)$. La funzione su $\mathcal{L}(E, F)$ definita come

$$\|L\| := \sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|Lx\|_F, \qquad L \in \mathcal{L}(E, F)$$

é, come é facile verificare, una norma su $\mathcal{L}(E, F)$.

NOTA **Non tutte le trasformazioni lineari sono continue.**

Esempio 1. Sia $E = C([0, 1])$. La forma lineare su E definita come $l(f) := f(1)$ é continua rispetto alla norma $\|.\|_\infty$, perch'e $|l(f)| = |f(1)| \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, ma non lo é rispetto alla $\|.\|_1$. Infatti, se $f_n(x) = x^n$, allora $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to_n 0$ mentre $l(f_n) = 1\, \forall n$.
Esempio 2. $E = F = C([0, 1])$ e $\|f\|_E = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|, \quad \|f\|_F = \|f\|_\infty$, allora $Lf := f$, é continua da F in E ma non é continua da E in F: se $f_n(t) = t^n$, allora $\|f_n\|_E \to 0$ mentre $\|f_n\|_F \equiv 1$.
Esempio 3. Sia $C_0 = C_0(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) |\, \exists R = R(f) : |x| \ge R(f) \Rightarrow f(x) = 0\}$, $E = (C_0, \|.\|_\infty), F = (C_0, \|.\|_1)$. La $Lf := f$ non é continua né da E in F né da F in E: se $f \in C_0, f \ne 0$ e $f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n})$, $\|f_n\|_\infty \to 0$ ma $\|f_n\|_1 \equiv \|f\|_1$ mentre se $f_n(x) := f(nx)$ é $\|f_n\|_1 \to 0$ mentre $\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty$.
Esempio 4. $Lf = f'$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbf{R}} |f(t)|$. Infatti, data $f \in C_0^\infty, \quad f \ne 0$ e, posto $f_n(t) := f(nt)$, é

$$\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty, \qquad \|Lf_n\|_\infty = \|nf'\|_\infty = n \sup_{\mathbf{R}} |f'(t)| \to_n \infty$$

Ogni $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare é continua, ogni $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineare é continua

Per provarlo, supponiamo $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ dotati della norma euclidea (ma, come vedremo, la cosa vale quali che siano le norme). Intanto,

$$\exists a \in \mathbf{R}^n : \quad l(x) =< a, x > \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

e quindi la continuitá di l segue da Cauchy-Schwartz: $|l(x)| \leq \|a\| \, \|x\|$.

La continuitá di L segue dal fatto che , se e_j, f_i sono basi canoniche in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$, allora L si scrive

$$L(x) = L(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j [\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i] = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$$

per certi a_{ij}, cioé le componenti di L sono forme lineari , quindi continue. Ne deriva che L é continua.

ALTRI ESEMPI:

(i) i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, $exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \sin(x_1 \ldots x_n)$, sono funzioni continue.

(ii) Sia $\quad f(x,y) := \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} \quad$ se $x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$
Se $n \geq 4$, f é continua in $(0,0)$: $\quad |2xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |\frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}| \leq \frac{y^2|y|^{n-3}}{x^2+y^2} \leq |y|^{n-3}$
Se $n = 3$, f é discontinua in $(0,0)$ perché $f(x, mx) = \frac{m^3}{(1+m^2)^2} \quad \forall x \neq 0$.
Se $n = 1, 2$, da $\quad f(x, mx) = \frac{m^3}{x^{3-n}(1+m^2)^2} \quad$ segue che $\quad f$ non é limitata attorno a $(0,0)$, $\quad$ e quindi non é continua in $(0,0)$ perché $\qquad g$ continua in $u \quad \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|g(v)\| \leq \|g(v) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq 1 + \|g(u)\| \quad \text{se} \quad \|v - u\| \leq \delta.$$

Notiamo che, fissato y, $x \to f(x,y)$ é continua, e lo é anche $y \to f(x,y)$ per ogni fissato x, e ció quale che sia $n \in \mathbf{N}$. La 'continuitá in x ed y' é quindi una proprietá molto piú debole della 'continuitá nel complesso delle variabili'.

(iii) Sia $f(x,y) = xy \log(x^{2n} + y^{2m})$, $f(0,0) = 0$. Proviamo che f é continua (anche) in $(0,0)$. Possiamo supporre $|x| + |y| \leq 1$ e $n \geq m$. Da $|xy|^n \leq \frac{1}{2}(|x|^{2n} + |y|^{2n})$ segue $|xy \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq (|x|^{2n} + |y|^{2m})^{\frac{1}{n}} \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq \epsilon$ se $(x^{2n} + y^{2m}) \leq \delta$ per un $\delta = \delta_\epsilon$ opportuno, perché $t^{\frac{1}{n}} \log t \to 0$ al tendere di t a 0^+.

LIMITI per funzioni reali di piú variabili reali

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{B}_r(u) = B_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{B}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f \;=\; l \;\Leftrightarrow\; (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \;\Rightarrow\; |f(u) - l| \le \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f \;= +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall M > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \;\Rightarrow\; f(u) \ge\ M)$$

Se $B'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f \;=\; l \;\Leftrightarrow\; (\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 :\ \ u \in A,\ ||u|| \ge R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \le \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f \;= +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall M > 0,\ \exists R_M > 0 :\ \ u \in A,\ ||u|| \ge R_M \Rightarrow f(u) \ge\ M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che
(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$
$(u_n \in A,\ u_n \ne u_0,\ u_n \to u_0\ \ (|u_n| \to +\infty\ )\ \Rightarrow\ f(u_n) \to\ l)$
(ii) (**Cauchy**) f ha *limite finito* l per u tendente a u_0 $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ \ u, v \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \;\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists R_\epsilon > 0 :\ \ u, v \in A,\ |u|, |v| \ge R_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

ESEMPI . **(i)** Sia $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \ne 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) \;=\; f(u_0)\ \forall u_0 \ne 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \ne 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) \;=\; f(u_0)\ \forall u_0 \ne 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) \;=\; 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \le \frac{|x|}{2} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x,x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

(iii) Sia $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y^2}$ se $y \ne 0$. Se $x_n \to x \ne 0$ e $y_n \to 0$ allora $\frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\infty$ e quindi $\arctan \frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\frac{\pi}{2}$. Poi, siccome $f(x, \sqrt{|x|}) = (sign x)\frac{\pi}{4}$, la f non ha limite al tendere di (x,y) a $(0,0)$.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

NORME EQUIVALENTI. Diremo che due norme $\|.\|_i, i = 1, 2$ su di uno spazio vettoriale E sono tra di loro equivalenti se esistono $c \leq C$ costanti positive tali che

$$(*) \qquad c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Equivalentemente: $\quad \|x_n\|_1 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\|_2 \to 0,$ ovvero l'identitá $Lx = x$ da $(E; \|.\|_1)$ a $(E; \|.\|_1)$ é continua insieme alla sua inversa.
Se vale la diseguaglianza di destra (di sinistra) diciamo che $\|.\|_1$ é piú forte (piú debole) di $\|.\|_2$.
Se invece nessuna delle due diseguaglianze in $(*)$ é verificata, le due norme si dicono non confrontabili.

Esercizio 1. Sia $E = l^1$. Siano $\|x\|_\infty = \sup\limits_j |x(j)|, \quad \|x\|_1 = \sum_j |x(j)| \quad \forall x \in l^1$.
Provare che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in l^1$, ma non esiste alcuna $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_\infty \quad \forall x \in l^1$.
Soluzione Intanto, $\sum_j |x(j)| \geq |x(j)| \quad \forall j \in \mathbf{N}$ e quindi $\sum_j |x(j)| \geq \|x\|_\infty$. Poi, se x_n é la successione cosi definita: $x_n(j) = \frac{1}{j}$ se $j \leq n$, $x_n(j) = 0$ se $j > n$, si ha $\|x_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $|\|x_n\|_1$ é la somma parziale ennesima della serie armonica, ed é quindi divergente.

Esercizio 2. Provare che in l^2 le norme $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ non sono equivalenti.

Esercizio 3. Provare che le due norme su $C_0^\infty(\mathbf{R})$ date da $\|f\|_\infty$ e $\|f'\|_\infty$ non sono confrontabili.
Soluzione Sia f tale che $\|f\|_\infty = 1$ e sia $f_n(x) = f(nx)$. Allora $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $\|f_n'\|_\infty = n\|f'\|_\infty \to \infty$. Viceversa, se $f_n(x) = nf(\frac{x}{n})$, allora $\|f_n'\|_\infty \equiv \|f'\|_\infty$ mentre $\|f_n\|_\infty = n\|f\|_\infty \to \infty$.

Esempi di insiemi aperti, chiusi. Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ allora $\{x : f(x) < c\} = f^{-1}(-\infty, c)$ e $\{x : f(x) > c\} = f^{-1}(c, +\infty)$, preimmagini di intervalli aperti, sono aperti per ogni $c \in \mathbf{R}$. Poi $\{x : f(x) = c\} = \partial\{x : f(x) > c\} = \partial\{x : f(x) < c\}$. In particolare:
la palla 'aperta' $B_r(x_0) := \{x : d(x, x_0) < r\}$ e $\{x : d(x, x_0) > r\}$ sono insiemi aperti e quindi la palla 'chiusa' $\overline{B_r(x_0)} := \{x : d(x, x_0) \leq r\}$ é un insieme chiuso.

Esercizio 1. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Provare che $\overline{E} = E \cup \partial E$.
$(E \cup \partial E)^c = E^c \cap (\partial E)^c = E^c \cap [int\, E \cup int\,(E^c)] = E^c \cap int(E^c) = int(E^c)$ é aperto e quindi $E \cup \partial E$ é chiuso e quindi $\overline{E} \subset E \cup \partial E$.
Viceversa, sia $E \subset F$, F chiuso. Se $x \in \partial E \setminus E$ allora esiste $x_n \in E, x_n \to x$ e quindi $x \in F$ perché $x_n \in F$ ed F é chiuso. Dunque $E \cup \partial E \subset F$ e quindi $E \cup \partial E \subset \overline{E}$.

Esercizio 2. Provare che, se O é aperto in $\mathbf{R}^n$ e $\gamma \in C([0,1],\mathbf{R}^n)$ tale che $\gamma(0) \in O$ e $\gamma(1) \notin O$, allora esiste $t \in (0,1)$ tale che $\gamma(t) \in \partial O$.

Prova. $I := \{t \in [0,1] : \gamma(s) \in O \quad \forall s < t\}$ contiene, per continuitá, $t = 0$. Posto $\bar t := \sup I$, risulta $\gamma(\bar t) \in \partial O$. Intanto, $\gamma(\bar t) \notin O$ perché, altrimenti $\gamma(t) \in O$ per $t \in [\bar t, \bar t + \delta]$ per un $\delta > 0$. Poi, $\gamma(t_n) \in O$ e $t_n < \bar t$ e quindi, se $t_n \to_n \bar t$, $\gamma(\bar t) \in \overline{O}$. Dunque $\gamma(\bar t) \in \overline{O} \setminus O = \partial O$.

Esercizio 3. Sia (X,d) spazio metrico, $A \subset X$. Sia $d(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a)$. Provare che $d(x,A)$ é continua e infatti Lip.
In effetti, da $d(x,a) - d(y,a) \le d(x,y) \quad \forall x,y,a$, segue che $d(x,A) \le d(x,a) \le d(y,a) + d(x,y) \quad \forall a \in A$ e quindi, passando all'inf, $d(x,A) \le d(y,A) + d(x,y)$. Scambiando x ed y troviamo $d(y,A) \le d(x,A) + d(x,y)$ e quindi $|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y) \quad \forall x,y \in X$.

Esercizio 4. Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

Provare che f é prolungabile con continuitá in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Se $\alpha+\beta-2 \le 0$, $f(tx,ty) = t^{\alpha+\beta-2} f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2 \neq 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + \beta - 2 > 0$.

Se $\alpha \ge 2$ é $f(x,y) \le |x|^{\alpha-2}\,|y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$. Analogamente se $\beta \ge 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta < 2$. In tal caso, $\delta := \frac{\alpha+\beta-2}{2} \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^\delta\,|y|^\delta\,)$$

ove $\delta > 0$, $\alpha-\delta > 0$, $\beta-\delta > 0$, $\alpha+\beta-2\delta = 2$. Dalla diseguaglianza di Holder, segue che, se $0 < r,s$, $r+s=2$ allora (prendendo $p := \frac{2}{r}$, $q := \frac{2}{s}$ nella diseguaglianza di Holder)

$$|x|^r\,|y|^s \le \frac{r}{2}\,x^2 + \frac{s}{2}\,y^2 \le x^2 + y^2 \quad \forall x,y \in \mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta} \le x^2 + y^2$ e quindi $f(x,y) \le |x|^\delta\,|y|^\delta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$.