AM210: Tracce delle lezioni- I Settimana (2012-13)

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una *funzione reale di n variabili reali* é una funzione

$$f : A \to \mathbf{R}, \qquad A \subset \mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} \quad n \quad volte$$

Il *grafico* di f é $\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : \quad x \in A\}$.
Gli elementi di $\mathbf{R}^n$, detti anche **punti o vettori** di $\mathbf{R}^n$, si denotano come $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e gli 'scalari' x_j si dicono componenti o coordinate di x. I vettori di $\mathbf{R}^2$ ed $\mathbf{R}^3$ si scrivono anche (x, y), (x, y, z).
Primi esempi di funzioni di piú variabili:
1. $f(x, y) = ax + by$, funzione *lineare* di due variabili, ha come grafico il piano (nello spazio ordinario) di equazione $z = ax + by$. Piú in generale

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad = \quad \textstyle\sum_{j=1}^n a_jx_j \qquad (\textbf{funzione lineare})$$

ha per grafico un 'iperpiano' in R^{n+1} passante per l'origine $0 := (0, \ldots, 0)$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$. $\mathcal{G}_f$ é la superfice (nello spazio cartesiano $Oxyz$) ottenuta ruotando attorno all'asse Oz la parabola nel piano Oxz di equazione $z = x^2$.
I polinomi in n variabili. Dato $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ e $x \in \mathbf{R}^n$, scriveremo $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Un polinomio di grado p nelle x_i si scrive

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Una funzione *vettoriale (o a valori vettoriali)* di n variabili reali é una funzione

$$f : A \to \mathbf{R}^m, \quad A \subset \mathbf{R}^n, m \geq 2 \qquad f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Le f_j si chiamano le (funzioni) componenti di f.
Se $n = 1$, f si dice anche *curva parametrica o cammino* in $\mathbf{R}^m$.
Ad esempio, dato $x \in \mathbf{R}^m$, $f(t) := tx$ é funzione (lineare) su $\mathbf{R}$ a valori in $\mathbf{R}^m$; la sua immagine $\Im f = \{tx : t \in \mathbf{R}\}$ é la retta in $\mathbf{R}^m$ passante per l'origine e per x (sottospazio lineare *generato* da x).
Un altro esempio: fissato $r > 0$, $f : \theta \to (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $t \in [0, 2\pi)$ é (nel piano) la circonferenza di centro l'origine e raggio r (in forma parametrica).
Piú in generale, una $f : A \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^k$ é *k-superfice* (parametrica) in $\mathbf{R}^n$.
Ad esempio,

$$f : (\theta, \varphi) \to (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

é sfera (parametrica) di centro l'origine e raggio R in $\mathbf{R}^3$.

STRUTTURA ALGEBRICA in $\mathbf{R}^n$

Un insieme V si dice **spazio vettoriale (o lineare)** su $\mathbf{R}$ se sono definite

$$\textit{una operazione di addizione} \qquad V \times V \to V, \quad (u,v) \to u+v$$

$$\textit{una moltiplicazione per scalari} \qquad \mathbf{R} \times V \to V, \quad (t,v) \to tv$$

tali che $(V,+)$ sia gruppo commutativo e risulti, per ogni $u,v \in V, \quad s,t \in \mathbf{R}$,

$$(t+s)u = tu + su, \quad t(u+v) = tu + tv, \quad t(sv) = (ts)v, \quad 1v = v$$

Gli elementi di V si chiamano punti o **vettori**.

ESEMPIO: $\mathbf{R}^n$, con le operazioni

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n), \qquad t(x_1,\dots,x_n) := (tx_1,\dots,tx_n)$$

Interpretazione geometrica. Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy. In tale piano, dato $v = (x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$, l'insieme

$$\mathbf{R}\, v := \{tv = (tx_0, ty_0): \ t \in \mathbf{R}\}$$

é l'insieme dei punti della *retta (in forma) parametrica* $\quad x = tx_0, \quad y = ty_0, \quad$ retta che passa per l'origine $O := (0,0)$ (quando $t = 0$) e per v (quando $t = 1$); infatti, eliminando il *parametro* t , troviamo l'*equazione cartesiana* $\quad y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Similmente, $\quad \{tv + u : \ t \in \mathbf{R}, v = (x_0,y_0), u = (x_1,y_1)\} \quad$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}\, v$, ed infatti, eliminando il parametro, troviamo $y = (x - x_1)\frac{y_0}{x_0} + y_0$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v. Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

Altri esempi

$\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\} \qquad$ dotato delle operazioni

$$(\alpha+\beta)(j) := \alpha(j) + \beta(j) \quad \forall j \in \mathbf{N}, \quad (t\alpha)(j) := t\alpha(j) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$$

$\mathbf{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \to \mathbf{R}\} \qquad$ dotato delle operazioni

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a,b], \quad (tf)(x) := tf(x) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, x \in [a,b]$$

$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R}, f \text{ continua}\}$

Combinazioni lineari e lineare indipendenza, sottospazi lineari, basi

1. Se $u, v \in V$ e $s, t \in \mathbf{R}$, $su+tv$ é **combinazione lineare** di u, v con coefficenti s, t. Dato $A \subset V$, scriveremo

$$< A >:= \text{insieme delle combinazioni lineari di elementi di } A.$$

Diremo che $v_j, j = 1, \ldots, p$ sono tra di loro linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^{p} t_j v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad t_j = 0 \quad \forall j$$

2. $V_0 \subset V$ é **sottospazio lineare** se $u, v \in V_0, s, t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad su + tv \in V_0$. Chiaramente $< A >$ é sottospazio lineare (generato da A).

Esempi. Siano

$$l^\infty := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \sup_j |\alpha(j)| < +\infty\}, \qquad c_0 := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \alpha(j) \to_j 0\}$$

$$\text{se } p > 0, \qquad l^p := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|^p < +\infty\}$$

Allora, $l^p \subset c_0 \subset l^\infty$ e sono sottospazi lineari di $\mathbf{R}^\infty$.
Linearitá di l^p. Se $p > 1$, segue dalla convessitá di $f(t) = |t|^p$, giacché, per convessitá,

$$|\frac{a}{2} + \frac{b}{2}|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \qquad \forall a, b$$

che dá appunto $\alpha, \beta \in l^p \Rightarrow \alpha + \beta \in l^p$.
Se $p \leq 1$ segue invece dalla diseguaglianza $|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p$, che, vera se $a = 0$, é equivalente alla diseguaglianza $f(x) := (1 + x)^p - (1 + x^p) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$ (ottenuta dalla precedente dividendo per $a \neq 0$). Tale diseguaglianza é vera perché

$$f(0) = 0, \qquad f'(x) = p(1 + x)^{p-1} - px^{p-1} \leq 0 \quad \forall x \geq 0 \qquad \text{e quindi}$$

$$(1+x)^p - (1+x^p) = f(x) \leq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0 \quad \textit{ovvero} \quad (1+x)^p \leq 1+x^p \quad \forall x \geq 0$$

3. Un sistema di vettori linearmente indipendenti $v_i : i = 1, \ldots, n$ che generino V si chiama **base** di V.

Ricordiamo che se V ha una base di n elementi, ogni altra base di V ha esattamente n elementi, e tale numero si chiama la **dimensione** di V.
Se v_j forma una base per V, allora ogni $v \in V$ si scrive, in modo unico, nella forma $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$. I numeri c_j si chiamano *componenti o coordinate* di v nella base v_j. Ad esempio, se $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é la base canonica di $\mathbf{R}^n$, un vettore x di $\mathbf{R}^n$ si scrive $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ (x_j = componenti o coordinate di x nella base e_j).

TRASFORMAZIONI LINEARI. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.

$L : V \to W$ é lineare se $L(su + tv) = sL(u) + tL(v) \quad \forall u, v \in V, s, t \in \mathbf{R}$

L'insieme $L(V, W)$ delle trasformazioni lineari di V in W é spazio vettoriale.

$V^* := L(V, \mathbf{R})$, insieme delle **'forme' lineari** su V, é il **'duale algebrico'** di V.

Esempio 1. Sia $V = \mathbf{R}^n$, e_j base canonica di $\mathbf{R}^n$. L'applicazione

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = \pi_j(\sum_j x_j e_j) := x_j$$

é funzione (forma) lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$.
Inoltre, se l é forma lineare su $\mathbf{R}^n$ si ha $l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j x_j l(e_j)$, e quindi $l = \sum l(e_j)\pi_j$, ovvero π_j é base ('base duale') per $(\mathbf{R}^n)^*$.

1. $\Im L = L(V) = \{L(u) : \quad u \in V\}$ e $KerL := \{v \in V : \quad L(v) = 0\}$ sono sottospazi lineari rispettivamente di W, V.

2. Se $V =< v_1, \ldots, v_p >$, allora $L(V) =< L(v_1), \ldots, L(v_p) >$.

3. Se e_j é una base per V, allora una trasformazione lineare L di V in W é completamente determinata dai valori (peraltro arbitrari) $L(e_j)$. Infatti, se $v = \sum_j a_j e_j$, risulta $L(v) = \sum_j a_j L(e_j)$. Dunque, per assegnare una trasformazione lineare basta definirla su di una base, risultando prolungabile linearmente in modo unico su tutto lo spazio.

4. $0 \in KerL$; inoltre, $KerL = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad L$ é iniettiva.

Infatti $L(0) = L(0 + 0) = L(0) + L(0) \Rightarrow L(0) = 0$. In particolare, se L é iniettiva, deve essere $KerL = \{0\}$. Viceversa, se $KerL = \{0\}$, allora $L(u) = L(v) \quad \Rightarrow \quad L(u - v) = 0 \quad \Rightarrow \quad u - v \in KerL \quad \Rightarrow \quad u = v$.

5. L iniettiva, u_j linearmente indipendenti $\Rightarrow L(u_j)$ linearmente indipendenti.
Infatti, $\sum_j a_j L(u_j) = 0 \Rightarrow L(\sum_j a_j u_j) = 0 \Rightarrow \sum_j a_j u_j = 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j$.

6. Se V, W, Y sono spazi vettoriali e $L \in L(V, W)$, $U \in L(W, Y$ allora $U \circ L \in L(V, Y)$.

7. Se L é biiettiva (ovvero invertibile), cioé $\ker L = \{0\}$ e $\Im L = W$, allora la funzione inversa L^{-1} é anch'essa lineare.
Infatti, dati $w_j \in W$, $w_j = L(v_j)$, da $\sum_j a_j w_j = L(\sum_j a_j v_j)$, segue $L^{-1}(\sum_j a_j w_j) = L^{-1}(L(\sum_j a_j v_j)) = \sum_j a_j v_j = \sum_j a_j L^{-1}(w_j)$.

Definizione Una $L \in L(V,W)$ biiettiva si chiama **isomorfismo lineare** e V e W si dicono (algebricamente) **isomorfi.**

Proposizione Sia V spazio vettoriale di dimensione n. Uno spazio vettoriale W é isomorfo a V se e solo se ha dimensione n.
Infatti, se L é isomorfismo da V a W ed e_j é base per V, allora $f_j := L(e_j)$ sono linearmente indipendenti e generano $W = L(V)$.
Viceversa, se $dimW = dimV = n$ e $e_j,\ f_j, j = 1,\dots,n$ sono basi di V, W, la trasformazione lineare che manda e_j in f_j é l'isomorfismo cercato.

Esempio 2. Sia $V = C^\infty(\mathbf{R}) = W$. La trasformazione D che manda $f \in V$ nella sua derivata, $D(f) := f'$ é chiaramente lineare (da V in se), con $KerD$ dato dalle funzioni costanti. Siccome ogni funzione continua é dotata di primitiva, D é suriettivo. Ma, indicato con V_0 il sottospazio di V formato dalle funzioni che si annullano in $x = 0$, $D_{|V_0}$, cioé la restrizione di D a V_0, é un isomorfismo tra V_0 e V.
Chiaramente $(D_{V_0})^{-1}(g) = \int_0^x g$.
Esempio 3. Data $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ matrice $m \times n$ (m righe ed n colonne),

$$L_{\mathcal{A}}(x) := \mathcal{A}x = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j) \qquad \forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$$

é funzione (o trasformazione) lineare da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Il suo nucleo é l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di m equazioni nelle n incognite $x_1,\dots,x_n$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \qquad i = 1.\dots,m$$

$\Im L_{\mathcal{A}} = \{y \in \mathbf{R}^m : \exists x \in \mathbf{R}^n, \mathcal{A}x = y\}$ é il sottospazio lineare di $\mathbf{R}^m$ generato dai vettori $f_j := L_{\mathcal{A}}(e_j)$, se $e_j, j = 1,\dots,n$ base (canonica) di $\mathbf{R}^n$; gli f_j sono le colonne di $\mathcal{A}$. Quindi la dimensione di $\Im L_{\mathcal{A}}$ é pari al rango di $\mathcal{A}$.

Matrice rappresentativa. Viceversa, se $e_i, i = 1,\dots,n$, $f_j, j = 1,\dots,m$ sono basi di V, W, rispettivamente, *ogni trasformazione lineare da V a W si rappresenta mediante una matrice $m \times n$.*
Sia infatti L trasformazione lineare da V a W. Siano, per ogni j, a_{ij}, $i = 1,\dots,m$ le componenti di Le_j nella base f_i, cioé

$$Le_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i$$

Allora, se $\quad u = \sum_{j=1}^n x_j e_j \quad$ e $\quad v := L(u) = \sum_{i=1}^m y_i f_i$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^m y_i f_i = Lu = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right) f_i$$

ovvero, se $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, posto $\mathcal{A}_L := (a_{ij})$, si ha $\quad y = \mathcal{A}_L x$
Cioé, identificando u ed Lu con le loro coordinate x ed y, L opera su x come $\mathcal{A}_L$, che si chiama quindi matrice rappresentativa di L nelle basi date.

PRODOTTO SCALARE

Sia V spazio lineare su $\mathbf{R}$. Una $b : V \times V \to V$ si dice prodotto scalare in V se é

simmetrica $\quad b(u, v) = b(v, u) \qquad \forall u, v \in V$
bilineare: $\quad b(su + tv, w) = sb(u, w) + tb(v, w), \qquad \forall u, v, w \in V, \forall s, t \in \mathbf{R}$
positiva $\quad b(u, u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$

Un prodotto scalare, se non c'é confusione, si indica usualmente $< ., . >$.

NOTA. Se $< ., . >$ é prodotto scalare in V, allora, per ogni $u \in V$,

le applicazioni $\quad v \to < u, v > \quad$ sono lineari.

Esempi. Sia $e_j : j = 1, \ldots, n$ base per V, vettoriale.
Dati $\quad u := u = \sum_{j=1}^n x_j e_j,\ v := u = \sum_{j=1}^n y_j e_j$,

$$< u, v > \ := \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{é prodotto scalare.}$$

Prodotto scalare in $C([a, b])$. $\quad < f, g > := \int_a^b f(x) g(x) dx$.

Norma.
Sia V vettoriale. Una applicazione di V in $\mathbf{R}$, $v \to \|v\|$ si dice norma in V se

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad$ e $\quad \|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$, (**positivitá**)
(ii) $\|tu\| = |t| \, \|u\| \quad \forall u \in V,\ t \in \mathbf{R}$ (**positiva omogeneitá**)
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (**diseguaglianza triangolare**)

Uno spazio vettoriale V, dotato di una norma, si dice **Spazio Normato**

Distanza, spazi metrici.

Dato un insieme X, una funzione $d : X \times X \to \mathbf{R}$ é una distanza (o matrica) su X se

(i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad$ e $\quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

L'insieme X, dotato della metrica d, si chiama spazio metrico e si indica (X, d).

Ogni norma genera una metrica: Se $\|.\|$ é una norma sullo spazio vettoriale V, allora

$$d(u, v) := \|u - v\|, \qquad u, v \in V$$

é una distanza su V.

CAUCHY-SCHWARTZ Sia $< ., . >$ prodotto scalare in V. Sia

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >} \quad \forall v \in V$$

Allora $\qquad | < u, v > | \ \leq \ \|u\| \ \|v\| \qquad \forall u, v \in V.$

Corollario: $\quad v \to \sqrt{< v, v >}$ é una norma.

Prova. $\quad 0 \ \leq < u + tv, u + tv > = \ \|u\|^2 \ + 2t \ < u, v > \ + t^2\|v\|^2 \quad \forall t$
$\Rightarrow \ < u, v >^2 - \|u\|^2 \ \|v\|^2 \ \leq \ 0.$

Inoltre, $\sqrt{< v, v >} \ \geq \ 0 \quad$ e $\quad \sqrt{< v, v >} = 0 \Rightarrow v = 0.$ $\quad$ Infine :

$$\|u+v\|^2 \ = \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \ \leq \ \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \, \|v\| \ = \ (\|u\| + \|v\|)^2$$

Esempi. In $\mathbf{R}^n$. $\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ é una norma (la *norma euclidea*). La diseguaglianza triangolare si scrive

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se $n = 2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del vettore (x, y), ovvero del segmento di estremi (x, y) e $(0, 0)$.

Prodotto scalare e norma in l^2 . Se $\alpha, \beta \in l^2$, allora, per ogni N risulta

$$\sum_{j=1}^{N} |\alpha(j)\beta(j)| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} |\beta(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Dunque $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j)\,\beta(j)$ é assolutamente convergente e dunque definisce un prodotto scalare su l^2, cui corrisponde la norma

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

In $C([a,b])$. La norma associata al prodotto scalare $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$ é $\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$. La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si scrive

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_a^b |f|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Norme che non derivano da un prodotto scalare

In $\mathbf{R}^n$. Se $p \geq 1, p \neq 2,\quad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}};\qquad \|x\|_\infty := max_j |x_j|$.

In $C([a,b])$: $\qquad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Ortogonalitá. Sia $< .,. >$ prodotto scalare in V. Due vettori u, v si dicono tra loro ortogonali se $< u, v >= 0$.

Se $A \subset V$, $A^\perp := \{v \in V :\ < v, h >= 0 \quad \forall h \in A\}$. Si vede subito che $A^\perp$ é sottospazio lineare.

Teorema di Pitagora. $\quad < u, v >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Infatti $\|u + v\|^2 =< u + v, u + v >= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$.

ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Siano V, W spazi vettoriali (reali). Sia L biiezione lineare da V a W. Provare che anche L^{-1} é lineare. Provare poi che V ha dimensione finita se e solo se W ha dimensione finita e V e W hanno la stessa dimensione.

2. Siano $p, q > 1$ *esponenti coniugati*, cioé $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R} \qquad$ (**diseguaglianza di Young**)

Prova. Una dimostrazione semplice via convessitá della funzione esponenziale:

$$|xy| = e^{\frac{1}{p}\ln|x|^p + \frac{1}{q}\ln|y|^q} \le \frac{1}{p}e^{\ln|x|^p} + \frac{1}{q}e^{\ln|y|^q} = \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q$$

Un'altra dimostrazione, che usa la convessitá della funzione $|x|^p$: per ogni $y \ge 0$ la funzione

$$x \to xy - \frac{x^p}{p}, \quad x \ge 0$$

é superiormente limitata e raggiunge il suo massimo in $x = x(y)$ sse $y = x^{p-1}$ ovvero $x(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ e tale massimo vale $y\, y^{\frac{1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = \frac{1}{q}\, y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^q}{q}$.
Da qui la diseguaglianza di Young: $xy - \frac{x^p}{p} \le \frac{y^q}{q} \qquad \forall x, y \ge 0$.
Tale dimostrazione continua a valere se si sostituisce a $\frac{1}{p}|x|^p$ una qualsiasi F di classe C^1, con F' strettamente crescente e tale che $F'(\pm\infty) = \pm\infty$. In tali ipotesi, esiste, ed é continua, la funzione inversa $(F')^{-1}$ e, per ogni fissato y, la funzione $x \to xy - F(x)$ ha un massimo massimo (globale) in $x = (F')^{-1}(y)$, ovvero, posto $G(y) := \sup_x[xy - F(x)] = (F')^{-1}(y)y - F((F')^{-1}(y))$ si trova

$$xy \le F(x) + G(y) \qquad \forall x, y \qquad (Y)$$

Nel caso $F(x) = \frac{|x|^p}{p}$, é $F'(\pm\infty) = \pm\infty$ ed anche $F(0) = F'(0) = 0$ e $F''(x) > 0$ per $x \ne 0$. Per tali F si trova $G'(y) = (F')^{-1}(y)$ per $y \ne 0$ e quindi $G(y) = \int_0^y (F')^{-1}(s)ds$ cosicché la (Y) assume la forma geometricamente evidente

$$xy \le \int_0^x F' + \int_0^y (F')^{-1}$$

3. Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, sia $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Allora

$$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \le \|x\|_p \; \|y\|_q \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$ (**diseguaglianza di Holder in $\mathbf{R}^n$**)

Infatti,

$$\left|\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\|x\|_p}\frac{y_j}{\|y\|_q}\right| \le \sum_{j=1}^n \frac{1}{p}\frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

4. Analogamente,

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^\infty$$ (**Holder in $\mathbf{R}^\infty$**)

Basta infatti passare al limite nella diseguaglianza

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

5. Infine, se $f, g \in C(I)$, I intervallo, allora

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Infatti,

$$\frac{|f(x)|}{\left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_I |f|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_I |g|^q}$$

Integrando su I, troviamo appunto

$$\int_I \frac{|f(x)|}{\left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

6. La Diseguaglianza di Minkovskii: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$

Segue da Holder: $\|x+y\|_p^p \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \leq$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p + \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \|y\|_p$$

Infatti, essendo $q(p-1) = p$, troviamo $\quad \|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Esercizio. Se $p \in (0,1)$, la diseguaglianza di Minkiwskii non vale piú.
Verificare, nel caso $p = \frac{1}{2}$ e $n = 2$, che

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \text{sse } x \text{ ed } y \text{ sono allineati (in } \mathbf{R}^2).$$

7. Alcune diseguaglianze integrali

Nel seguito scriveremo $f \in C_0([0,+\infty))$ se $f \in C([0,+\infty))$ e $\{x : f(x) \neq 0\}$ é contenuto in un intervallo limitato (brevemente: é limitato).

Diseguaglianze di Hardy

(*i*) Sia $E := \{f \in C([0,+\infty)) : \int_0^\infty |f|^2 < +\infty\}$. Allora

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right]^2 \leq 4\int_0^{+\infty} f^2 \qquad \forall f \in E$$

$$(ii) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2}dx \leq 4\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \qquad \forall f \in C^1([0,\infty)) \quad \text{con} \quad f(0) = 0$$

Prova di (i). Sia dapprima $f \in C_0([0,+\infty))$. Posto $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f$, per cui $F'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{F(x)}{x}$, si ha, integrando per parti,

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)dx = -2\int_0^{+\infty} xF(x)F'(x)dx = -2\int_0^{+\infty} Ff - F^2$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} F^2 = 2\int_0^{+\infty} Ff \leq 2(\int_0^{+\infty} F^2)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{+\infty} f^2)^{\frac{1}{2}}$$

Sia ora $f \in E$. Sia $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ non crescente e tale che $\phi(x) = 1$ per $x \leq 0$, $\phi(x) = 0$ se $x \geq 1$. Sia $\phi_n(x) = \phi(x - n)$. Sia $f_n = f\varphi_n$. Siccome $f_n \in C_0([0,+\infty))$ e $f_n \equiv f$ in $[0,n]$, si ha allora che

$$\int_0^n \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^2 = \int_0^n \left(\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt\right)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^2 dx \leq 4\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

La tesi si ottiene mandando n all'infinito.

Prova di (ii). Siano $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ e $\phi_n(x) = \phi(x - n)$ come sopra. Sia $g_n = f'\phi_n$. Dal TFC: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f'(t)dt = = \frac{1}{x}\int_0^x g_n(t)dt$ se $x \leq n$ e quindi, da (i),

$$\int_0^n \frac{f^2(x)}{x^2}dx = \int_0^n \left(\frac{1}{x}\int_0^x g_n(t)dt\right)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} |g_n(x)|^2 dx \leq 4\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$$

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{f^2(x)}{x^2}dx = \lim_n \int_0^n \frac{f^2(x)}{x^2}dx \leq 4\int_0^{+\infty} |f'|^2$$

Sia ora $f \in C^1(\mathbf{R}), \quad \xi \in \mathbf{R}$. Allora, usando prima il Teorema Fondamentale del calcolo e poi Cauchy-Schwartz, troviamo

$$|f(x) - f(\xi)| = |\int_\xi^x f'(t)dt| \leq$$

$$\leq (\int_\xi^x dt)^{\frac{1}{2}} (\int_\xi^x |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} = |x - \xi|^{\frac{1}{2}} (\int_\xi^x |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

In particolare, se $f(0) = 0$, preso $\xi = 0$ troviamo,

$$\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} \leq \left[\int_0^T |f'|^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in (0, T] \qquad (**)$$

Diseguaglianze di Poincaré Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Allora

$$(i) \qquad f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^T f^2 \leq \frac{T^2}{2} \int_0^T |f'|^2 \qquad \forall T \geq 0$$

$$(ii) \quad \overline{f} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f \quad \Rightarrow \quad \int_a^b |f - \overline{f}|^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'|^2$$

La (i) segue da $(**)$ integrando su $[0, T]$.

La (ii) segue, prendendo in $(*)$ $\xi \in [a, b]$ tale che $\quad f(\xi) = \overline{f}$ e quindi integrando, ottenendo cosi $\int\limits_a^b |f - \overline{f}|^2 \leq \int\limits_a^b |x - \xi| dx \ \int_a^b |f'|^2$