AM210 2013-2014: APPELLO A

TEMA/ESERCIZIO 1

1.1 Provare che l'immagine continua di un compatto é un compatto.

1.2 Dedurre che, se $f, g \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ e $f + g$ é coerciva, allora, posto $D_R := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad g(x,y) \leq R\}$ esiste, per R grande, $(x_R, y_R) \in D_R$ tale che $f(x_R, y_R) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D_R$
(Suggerimento: sia $(x_n, y_n) \in D_R$ *tale che* $f(x_n, y_n) \to \inf_{D_R} f$*)...*

1.3 Stabilire se la funzione

$$f(x,y) := \log(x^2 + y^2) \log\left(2 - \cos(2\pi xy)\right) \quad se \quad x^2 + y^2 > 0, \qquad f(0,0) = 0$$

é continua in $\mathbf{R}^2$.
Disegnare poi il sottolivello $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ f(x,y) \leq 0\}$ e la sua frontiera e provare che $\inf_{\mathbf{R}^2} f$ é finito ed é realizzato in un punto di $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) < 0\}$

TEMA/ESERCIZIO 2

2.1 Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$. Provare che, se esiste $r > 0$ tale che

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2 \quad \Rightarrow \quad f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$$

allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad < H_f(x_0, y_0)h, h > \ \leq \ 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$$

2.2 Provare, viceversa, che se

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad < H_f(x_0, y_0)h, h > \ > \ 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2, h \neq (0,0)$$

allora (x_0, y_0) é punto di minimo locale stretto per f.

2.3 Stabilire se la funzione

$$f(x,y) := \log(x^2 + y^2) \log\left(2 - \cos(2\pi xy)\right) \quad se \quad x^2 + y^2 > 0, \qquad f(0,0) = 0$$

-é differenziabile in $(0,0)$ o addirittura $C^1(\mathbf{R}^2)$
-ha punti critici in $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ f(x,y) \geq 0\}$.

2.4 Determinare e classificare i punti stazionari di $f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2$.

TEMA/ESERCIZIO 3

3.1 Enunciare e dimostrare il Lemma di Schwartz in $\mathbf{R}^2$.

3.2 Sia $f(x,y) = \frac{y^3 x}{y^2+x^2}$ se $x^2+y^2 > 0$, $f(0,0)=0$.

Stabilire se f é di classe $C^2(\mathbf{R}^2)$.

TEMA/ESERCIZIO 4 .

4.1 Enunciare e dimostrare la regola della catena.

4.2 Sia $\phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, $u, v \in C^2(\mathbf{R}^2)$. Supponiamo che

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \qquad (*)$$

Calcolare, usando le $(*)$,

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy}, \quad \Delta v := v_{xx} + v_{yy}, \qquad \det J_\phi(x,y)$$

Sia poi $f = f(u,v)$ di classe C^2 in $\mathbf{R}^2$. Posto $g := (f \circ \phi)$, provare, effettuando i calcoli, che

$$\Delta g := g_{xx} + g_{yy} = (\Delta f)(\phi(x,y)) \det J_\phi$$

TEMA/ESERCIZIO 5 .

5.1 Provare che tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti

5.2 Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. Provare che

K é chiuso e limitato $\Leftrightarrow$ ogni successione in K ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di K.

5.3 Mostrare che in 5.1 non si puó sostituire $\mathbf{R}^n$ con l^2.

5.4 Mostrare che il sottoinsieme di l^2 dato da $\{e_i \in l^2 : \quad e_i(j) = \delta_{ij}\}$ ha un ricoprimento numerabile che non ammette sottoricoprimenti finiti.

5.5 Mostrare che il sottoinsieme di l^∞ dato da $\{x \in l^\infty : \quad x(\mathbf{N}) \subset \{0,1\}\}$ ha un ricoprimento aperto privo di sottoricoprimenti numerabili.

Tema 4 .

Tema 5.   .

TEMA 2

Esercizio 2

TEMA 4.

SOLUZIONI

Esercizio 1

-$e^{-n^p x^2} \leq e^{-n^p \delta^2}$ se $x \geq \delta > 0$:   la serie é totalmente convergente in $[\delta, +\infty)$.

-$f_n(x) := e^{-n^p x^2}$ sono in $C(\mathbf{R})$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = +\infty \;\Rightarrow\;$ che la convergenza non é uniforme in $(0, \delta]$.

$$- \int\limits_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^p x^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-n^p x^2} dx \right) = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} < +\infty \;\Leftrightarrow\; p > 2$$

Esercizio 2

É $\limsup_n |\sin n|^{\frac{1}{n}} = 1$. Infatti, diviso $[0,1]$ in k parti uguali, troviamo n_k tale che

$\frac{n_k}{k} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{n_k}{k} + \frac{1}{k}$ ovvero $n_k \le \frac{k\pi}{4} \le n_k + 1$. Se $k = 2(4l+1)$,

$$n_l \le 2l\pi + \frac{\pi}{2} \le n_l + 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\pi}{2} - 1 \le n_l - 2l\pi \le \frac{\pi}{2}$$

e quindi $\sin(\frac{\pi}{2} - 1) \le \sin n_l \le 1$ e quindi $|\sin n_l|^{\frac{1}{n_l}} \to_l 1$

Dunque la serie ha raggio di convergenza 1 e la sua somma é una funzione analitica in $(-1,1)$.

Esercizio 3

$f(x,y) = (x^2+y^2)\log(3+\sin(xy)) \ge (x^2+y^2)\log 2 > 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \ne (0,0)$.

Dunque $(0,0)$ é di minimo assoluto e quindi é stazionario.

Argomento generale: se (x_n, y_n) é minimizzante allora $(x_n^2 + y_n^2)\log 2 \le f(x_n, y_n)$ é limitata e quindi si puó supporre convergente, necessariamente ad un punto di mionimo assoluto (che, come visto, é $(0,0)$).

Esercizio 4 Dal Tema 4:

$$\int_0^R \left(\int_0^R e^{-st} \sin t \, ds \right) dt = \int_0^R \left(\int_0^R e^{-st} \sin t \, dt \right) ds$$

Il primo integrale dá

$$\int_0^R \left(\int_0^R e^{-st} \sin t \, ds \right) dt = \int_0^R \left(\sin t \int_0^R e^{-st} \, ds \right) dt = \int_0^R \frac{\sin t}{t} [1 - e^{-Rt}] dt$$

$$\to_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

Poi, integrando per parti

$$\int_0^R e^{-st} \, \sin t \, dt = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-Rs} \cos R - e^{-Rs} s \sin R}{1+s^2} \to_R \frac{1}{1+s^2}$$

e quindi il secondo integrale dá

$$\int_0^R \left(\int_0^R e^{-st} \, \sin t \, dt \right) ds = \int_0^R \frac{ds}{1+s^2} + \int_0^R \frac{e^{-Rs} \cos R - e^{-Rs} s \sin R}{1+s^2} \, ds$$

$$\to_R \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}$$

TEMA/ESERCIZIO 1

(i) Mostrare che $\mathbf{R}^N$, dotato della norma euclidea $\|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, é spazio di Banach.

(ii) Sia $x_k \in \mathbf{R}^N$ successione limitata (cioé $\sup_k \|x_k\|_2 < \infty$). Mostrare che x_k ha una sottosuccessione convergente, esistono cioé k_j crescente e $x \in \mathbf{R}^N$ tali che $x_{k_j}(n) \to_j x(n) \quad \forall \, n = 1, \ldots, N$.

(iii) Sia $l^2 := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \;\; t.c. \; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty\}$. Provare che l^2, dotato della norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, é un Banach.
Lo é anche se dotato della norma $\|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$?

(iv) Mostrare che in $(l^2, \|.\|_2)$ esistono successioni limitate che non posseggono sottosuccessioni convergenti. Mostrare peró che se

$$x_k : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \quad x_k : n \to x_k(n), \qquad \sum_n n^2 (x_k(n))^2 \leq 1$$

allora esiste una selezione di indici k_j e una $x \in l^2$ tali che $\|x_{k_j} - x\|_2 \to_j 0$.

TEMA/ESERCIZIO 2.

(i) Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Provare che f é localmente Lipschitziana, ma non, in generale, uniformemente continua.

(ii) Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ tale che $\sup\limits_{(x,y)\ \in \mathbf{R}^2} \|\nabla f(x,y)\|_2 < \infty$. Provare che f é globalmente Lipschitziana. Provare anche che $\nabla f \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f$ é costante. Si otterrebbero le stesse conclusioni se al posto di $\mathbf{R}^2$ ci fosse $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

(iii) Sia $f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^4}$ se $x^2+y^2 > 0$, $f(0,0)=0$.
Stabilire se f é Lipschitziana, o anche solo uniformemente continua, in $\mathbf{R}^2$.

T1 . Provare che $\|f\| := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ é una norma sullo spazio $C([0,1])$.

Provare poi che, dotato di tale norma, $C([0,1])$ é spazio di Banach e dedurre che, se $f_n \in C([0,1])$ sono tali che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$, allora

$$\exists\, S \in C([0,1]) : \quad \lim_{N\to+\infty} \|S - \sum_{n=1}^{N} f_n\| = 0, \qquad \int_0^1 S(x)dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

T2 . Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$. Provare che $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \;:=\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$.

T3. Siano $a_{ij} \in C(\mathbf{R})$, $i,j = 1,\ldots,n$. Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema di n equazioni differenziali nelle incognite $x_1(t),\ldots,x_n(t)$

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t), \qquad i = 1,\ldots,n$$

é un sottospazio n-dimensionale di $C^1(\mathbf{R})$.

T4. Sia $\varphi \in C([0,T),\mathbf{R})$. Supponiamo che per certi $A,B,C > 0$ risulti

$$0 \le \varphi(t) \le A + Bt + C\int_0^t \varphi(\tau)d\tau \quad \forall t \in [0,T)$$

Provare che

$$\varphi(t) \le (A + BC^{-1})e^{Ct} - \frac{B}{C}^{-1} \quad \forall t \in [0,T)$$

Dedurre che se $f \in Lip\,(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ e $\gamma(t),\beta(t)$, $t \in [0,T]$ sono soluzioni del sistema differenziale $\dot{x}(t) = f(x(t))$ allora

$$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \le \|\gamma(0) - \beta(0)\| e^{Lt} \quad \forall t \in [0,T]$$

P1. Provare che $f_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge uniformemente, insieme a tutte le sue derivate, sugli intervalli limitati di $\mathbf{R}$.

P2. Sia $F(t) := \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx, \quad t \geq 0.$

(i) Provare che F é continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$.

(ii) Calcolare $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ e mostrare che $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$

(iii) utilizzare le precedenti informazioni per calcolare $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

P3. Sia $g(x,y) = x^2 - y^2 + x^4 + y^4$. Determinare per quali $h \in \mathbf{R}$ gli insiemi di livello $g^{-1}(h)$ sono, localmente attorno ad ogni proprio punto, grafici cartesiani.

P4. Trovare, se esistono, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''' - y = e^{-x}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

che soddisfano le condizioni $y(0) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

P5. Sia

$$f(x) = x(x-1)\log x^2, \quad f(0) = 0$$

Dato $x_0 \geq 0$, sia $x(t; x_0)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Stabilire, in dipendenza da x_0, se il problema ha una sola soluzione locale/ globale e, in caso di unicitá, determinare l'intervallo massimale di esistenza.