Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Tutorato 3 - 7 Marzo 2014

1. Calcolare i seguenti limiti applicando il teorema di De L'Hopital:

   (a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(x+1))}{\ln(x)}$

   (b) $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$

   (c) $\lim_{x\to 0} (\sin(x))^{\tan(x)}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$

   (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+3}-1}{4\sqrt[3]{2x+5}+7}$

   (f) $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

   (g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan(x))}{\cot(x)}$

   (h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-e^x}{x^3-1}$

   (i) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x^2-1}\right)$

   (j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

2. Trovare lo sviluppo di MacLaurin al quarto ordine delle seguenti funzioni:

   (a) $(e^{3x}-1)\sin(2x)$

   (b) $\ln(\cos(x))$

   (c) $\frac{1}{1+x+x^2}$

   (d) $\frac{\ln(1+\sin(x))}{e^{\tan(x)}}$

3. Trovare lo sviluppo di MacLaurin delle seguenti funzioni:

   (a) e^{-3x^2}

   (b) 2^{x-1}

   (c) $\sin(x^2) - \sinh(x^2)$

   (d) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

4. Trovare lo sviluppo di Taylor nel punto x_0 e fino all'ordine n assegnati:

   (a) $(x-6)^5;\quad x_0 = 6,\quad n = 4$

   (b) $\ln(x);\quad x_0 = 2,\quad n = 3$

   (c) $e^x;\quad x_0 = -1,\quad n = 3$

   (d) $\sin(x);\quad x_0 = \frac{\pi}{2},\quad n = 5$

5. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:

   (a) $\lim_{x\to 0} \left(\cot^2(x) - \frac{1}{x^2}\right)$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\ln(1-2x)+2x}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)-x^2}{\ln(3+2x)x^2(x^2-\sin^2(x))}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\ln(1+3x)-1}{\sin(x)-x}$

   (e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)[\cos(5\tan(x))-\cos(5\sin(x))]+5x^4}{2x^4+\sin(x^5)-x^6}$

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4)-1}{\sqrt{1+x^8}-\sqrt[3]{1+x^8}}$

   (g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin(x)\cos(x)-\sin(x)-\cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

   (h) $\lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right]x$

6. Usando la convessitá di un'opportuna funzione mostrare che:

   - $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ con $x, y \geq 0$ e $p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   - $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ con $a, b \geq 0$ e $p > 1$.

7. Calcolare massimi e minimi delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato:

   (a) $f(x) = x^4 - x^2$ in $[-2, 2]$

   (b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ in $[-2, 3]$

   (c) $h(x) = \sin|x| - |\sin(x)|$ in $[-9, 9]$

   (d) $v(x) = x - \ln(2+x)$ in $(-\infty, +\infty)$