Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Tutorato 2 - 28 Febbraio 2014

1. Dimostrare che se $f'(x) = 0$ in un intervallo $[a, b]$ allora $f(x)$ é costante.

2. Sia
$$f(x) := \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$
   (a) Dimostrare che non é continua in $x = 0$;
   (b) Calcolare $f'(x)$;
   (c) Tramite le informazioni ottenute dedurre la natura di $f(x)$.

3. Dimostrare che
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

4. Dire per quali valori dei parametri a e b le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

   (a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & x \geq 0 \\ 7e^x - 4 & x < 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{4a+b}{x^2+1} & x \geq 1 \\ x^2 + 2(a+b)x - 1 & x < 1 \end{cases}$

5. Verificare se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi dei teoremi di Rolle e di Lagrange negli intervalli indicati. Verificare poi, comunque, le tesi dei teoremi.
   (a) $f_1(x) = x - x^3 \quad \text{in} \quad [-2, 1]$
   (b) $f_2(x) = \cosh(x) \quad \text{in} \quad [-\ln(37), \ln(37)]$
   (c) $f_3(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \quad \text{in} \quad [0, 2]$
   (d) $f_4(x) = \sin(x) + \cos^2(x) \quad \text{in} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   (e) $f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

6. Verificare se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy. Verificare poi, comunque, la tesi del teorema.
   (a) $f_1(x) = \sqrt{-x^2 + 10x}, \quad g_1(x) = -x + 4 \quad \text{in} \quad [0, 1]$
   (b) $f_2(x) = \frac{2x-1}{x}, \quad g_2(x) = \frac{x+2}{x^2} \quad \text{in} \quad [1, 2]$
   (c) $f_3(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}), \quad g_3(x) = e^{x^2+2} \quad \text{in} \quad [-1, 1]$

7. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta > 0$, definiamo nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che:

- $f(x)$ é continua $\iff \alpha > 0$;
- $f'(0)$ esiste $\iff \alpha > 1$;
- $f'(x)$ é limitata $\iff \alpha \geq 1 + \beta$;
- $f'(x)$ é continua $\iff \alpha > 1 + \beta$;
- $f''(0)$ esiste $\iff \alpha > 2 + \beta$;
- $f''(x)$ é limitata $\iff \alpha \geq 2 + 2\beta$;
- $f''(x)$ é continua $\iff \alpha > 2 + 2\beta$.

8. Dimostrare che

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(-1)^n}{2^n} (2n-1)!! \; (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

ove $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

9. Dimostrare che $\forall x \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$