Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 9 - 2 Maggio 2014

1. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(3x+5)}$: Ricordiamo che $D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$ per la regola della catena, ergo, essendo $D[\tan(f(x))] = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$ abbiamo che

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+5)} = \frac{1}{3}\int \frac{3\ dx}{\cos^2(3x+5)} = \frac{1}{3}\tan(3x+5)\ +\ c\ ;$$

(b) $\displaystyle\int (x+1)^3 \cos(x)dx$: Qui dobbiamo applicare la regola di integrazione per parti con $f(x) = (x+1)^3$ e $g'(x) = \cos(x)$. Quindi

$$\int (x+1)^3 \cos(x)dx = (x+1)^3 \sin(x) - 3\int (x+1)^2 \sin(x)\ dx =_{(*)}$$

$$= (x+1)^3 \sin(x) + 3(x+1)^2 \cos(x) - 6\int (x+1)\cos(x)\ dx =_{(**)}$$

$$= (x+1)^3 \sin(x) + 3(x+1)^2 \cos(x) - 6(x+1)\sin(x) - 6\cos(x) +\ c$$

ove in $(*)$ abbiamo applicato la regola di integrazione per parti con $f(x) = (x+1)^2$ e $g'(x) = \sin(x)$ e in $(**)$ ancora una volta la stessa regola con $f(x) = (x+1)$ e $g'(x) = \cos(x)$;

(c) $\displaystyle\int \cosh^2(x)dx = \int \frac{\cosh(2x)+1}{2}\ dx = \frac{\sinh(2x)}{4} + \frac{x}{2} +\ c\ ;$

(d) $\displaystyle\int x^2 \sin(x)dx = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\ dx = c - x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)$ utilizzando due volte la regola di integrazione per parti in maniera analoga a quanto visto per l'esercizio (b) ;

(e) $\displaystyle\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2}dx = \int x - \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2}\ dx = \int x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2(x^2+1)}\ dx =$

$\displaystyle= \frac{x^2}{2} - \ln(x) + \int \frac{x^2 - x^2 + 1}{x^2(x^2+1)}\ dx = \frac{x^2}{2} - \ln(x) + \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\ dx =$

$\displaystyle= \frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{1}{x} - \arctan(x) +\ c\ ;$

(f) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^3 - 1}dx = \int \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\ dx$. Ora

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{x^2(A+B) + x(A+C-B) + A - C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\iff \begin{cases} A + B = 0 \\ A + C - B = 3 \\ A - C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\ dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}\ dx = \ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+1-1}{x^2+x+1}\ dx =$$

$$= \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) + \sqrt{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\,;$$

(g) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\,dx = \int \frac{3x-4}{(x-2)(x-4)}\,dx$. Abbiamo che

$$\frac{3x-4}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{x(A+B)-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -4A-2B=-4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=4 \end{cases} \qquad \text{quindi}$$

$$\int \frac{3x-4}{(x-2)(x-4)}dx = \int \frac{4}{x-4} - \frac{1}{x-2}\,dx = 4\ln(x-4) - \ln(x-2) + \ c\ ;$$

(h) $\displaystyle\int e^{\sin(x)}\cos(x)dx = e^{\sin(x)} + \ c\ ;$

(i) $\displaystyle\int x\cosh(3x)dx = \frac{x\sinh(3x)}{3} - \int \frac{\sinh(3x)}{3}\,dx = \frac{x\sinh(3x)}{3} - \frac{\cosh(3x)}{9} + \ c$
utilizzando la regola di integrazione per parti con $f(x)=x$ e $g'(x)=\cosh(3x)$;

(j) $\displaystyle\int \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\log(x) - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\log(x) - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$
$= 2\sqrt{x}\log(x) - 4\sqrt{x} + \ c\ = 2\sqrt{x}(\log(x)-2) + \ c$
utilizzando la regola di integrazione per parti con $f(x)=\log(x)$ e $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(k) $\displaystyle\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}dx$: Abbiamo che

$$\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{x^2(A+B)+x(C+5B)+9A+5C}{(x+5)(x^2+9)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ C+5B=11 \\ 9A+5C=-2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-4 \end{cases} \qquad \text{quindi}$$

$$\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}dx = \int \frac{2}{x+5} + \frac{3x-4}{x^2+9}\,dx = 2\ln(x+5) + \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - 4\int \frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= 2\ln(x+5) + \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{4}{3}\int \frac{\frac{dx}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = 2\ln(x+5) + \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c\,;$$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx = \int \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{(x-1)^2)}\,dx =$
$\displaystyle= \int \frac{x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+A+2C}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$ se e solo se

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B+C=0 \\ A+2C=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{9} \\ B=\frac{5}{9} \\ C=-\frac{2}{9} \end{cases} \qquad \text{quindi}$$

$$\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx = \frac{4}{9}\ln(x+2) + \frac{1}{9}\int \frac{5x-2}{x^2-2x+1}\ dx =$$
$$= \frac{4}{9}\ln(x+2) + \frac{1}{9}\ln(x^2-2x+1) + \frac{1}{3}\int \frac{x}{(x-1)^2}\ dx =_{(*)}$$
$$= \frac{4}{9}\ln(x+2) + \frac{2}{9}\ln(x-1) - \frac{x}{3(x-1)} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} =$$
$$= \frac{4}{9}\ln(x+2) + \frac{5}{9}\ln(x-1) - \frac{x}{3(x-1)} +\ c$$

ove in $(*)$ abbiamo usato la formula di integrazione per parti con $f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$;

(m) $\displaystyle\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\arcsin(x) + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\ dx} =$
$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\ +\ c$ applicando la regola di integrazione per parti con $f(x) = \arcsin(x)$ e $g'(x) = 1$;

(n) $\displaystyle\int \mathrm{sign}(x)dx = |x| +\ c$;

(o) $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)dx$: Applichiamo la regola di integrazione per parti con $f(x) = \arctan(x)$ e $g'(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ottenendo che

$$\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)\arctan(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)\arctan(x) - \int \frac{x^2}{2(x^2+1)} - \frac{1}{x(x^2+1)}\ dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\arctan(x) - \frac{x}{2} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)}\ .$$

Essendo

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x(x^2+1)} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +\ c\ = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) +\ c$$

e quindi

$$\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\arctan(x) - \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) +\ c\ ;$$

(p) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)(x^4+x^2+1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}.$
Ora

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} +$$

$$+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{x^2-x+1} \iff \begin{cases} A+B+C+E+G=0 \\ A-B+D-E+F+G+H=0 \\ 2A+2B+E-F+G+H=0 \\ 2A-2B+F+H=0 \\ 2A+2B-E-G=0 \\ 2A-2B+E-F-G-H=0 \\ A+B-C-E+F-G-H=0 \\ A-B-D-F-H=1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{1}{12} \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \\ E=-\frac{1}{3} \\ F=-\frac{1}{6} \\ G=\frac{1}{3} \\ H=-\frac{1}{6} \end{cases} \qquad \text{(dopo } \mathbf{MOLTI} \text{ conti)}$$

quindi

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)(x^4+x^2+1)} = \frac{1}{12}\ln(x-1)-\frac{1}{12}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\arctan(x)-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+$$

$$+\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan(x)+\ c\ .$$

2. (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log(\sinh(x)+\cosh(x))}{x^2}dx$: Essendo

$$\sinh(x)+\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

abbiamo che

$$\int_1^e \frac{\log(\sinh(x)+\cosh(x))}{x^2}dx = \int_1^e \frac{x}{x^2}dx = \int_1^e \frac{dx}{x} = [\log(x)]_1^e = 1\ ;$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x+1} = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x-e^x+1}{e^x+1}\,dx = \int_0^{\ln(2)} 1-\frac{e^x}{e^x+1}\,dx =$
$= [x-\ln(e^x+1)]_0^{\ln(2)} = \ln(2)-\ln(3)+\ln(2) = 2\ln(2)-\ln(3)$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\arccos(x))dx$: Essendo

$$\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} \Longrightarrow \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

abbiamo che

$$\int_0^1 \sin(\arccos(x))dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx\ .$$

Quando $x\in[0,1]$ la funzione $y=\sqrt{1-x^2}$ rappresenta il quarto di circonferenza unitaria che si trova nel primo quadrante. Pertanto il valore dell'integrale é pari ad un quarto dell'area della circonferenza unitaria! Essendo l'area della circonferenza di raggio r pari a πr^2 abbiamo che

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{4}\ ;$$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\sin^2(x)}{1+\sin(x)} dx = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{1+\sin(x)} dx =$
$\displaystyle = \int_0^{2\pi} 1-\sin(x)\ dx = [x+\cos(x)]_0^{2\pi} = 2\pi + 1 - 1 = 2\pi\ ;$

(e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2(x)}} = [\arcsin(\log(x))]_1^{\sqrt{e}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\ ;$

(f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-2}{x(x^2-1)} dx$: Abbiamo che

$$\frac{x-2}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{x^2(A+B+C)+x(B-C)-A}{x(x^2-1)}$$

$$\iff \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=2 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\int_2^3 \frac{x-2}{x(x^2-1)} dx = \left[2\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x+1)\right]_2^3 = \frac{7}{2}\ln(3) - \frac{11}{2}\ln(2)\ ;$$

(g) $\displaystyle\int_2^{10} 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)}\right]_2^{10} = \frac{2^{10}-2^2}{\ln(2)} = \frac{1020}{\ln(2)}\ ;$

(h) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e^{4096})} \frac{dx}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e^{4096})} \frac{dx}{\sin(x)\cos(x)} =$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e^{4096})} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}\ dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e^{4096})} \cot(x)+\tan(x)\ dx =$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e^{4096})} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\tan(x)\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e^{4096})} = 2048\ .$

3. • Per iniziare il calcolo di questo integrale dobbiamo effettuare una integrazione per parti con $f(x) = \cos^{n-1}(x)$ e $g'(x) = \cos(x)$. In tal modo abbiamo che

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n(x)\ dx = \left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{2\pi} + (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\ dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^{n-2}(x)\ (1-\cos^2(x))\ dx = (n-1)\ I_{n-2} - (n-1)\ I_n$$

$$\Longrightarrow nI_n = (n-1)\ I_{n-2} \Longrightarrow I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}\ .$$

A questo punto dobbiamo fare una piccola distinzione tra n pari ed n dispari : il procedimento di iterazione, difatti, ci permette di continuare ad applicare la formula fino a che $n=1$ per gli n dispari e fino ad $n=2$ per gli n pari.

(a) Sia $n = 2k+1$: In tal caso abbiamo che

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\ I_{2k-1} = \cdots\cdots = \frac{2k}{2k+1} \cdots\cdots \frac{2}{3}\ I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\ I_1\ .$$

Tuttavia

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos(x)\ dx = [\sin(x)]_0^{2\pi} = 0$$

quindi possiamo concludere che $I_{2k+1} \equiv 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

(b) Sia $n = 2k$: In tal caso abbiamo che

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\ I_{2k-2} = \cdots\cdots = \frac{2k-1}{2k} \cdots\cdots \frac{3}{4}\ I_2 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ 2\ I_2\ .$$

Essendo

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx = \left[\frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

abbiamo che

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ 2\pi \quad \forall k \geq 1\ .$$

- Anche in questo caso effettuiamo l'integazione per parti con $f(x) = \sin^{n-1}(x)$ e $g'(x) = \sin(x)$. Con gli stessi conti dell'integrale precedente otteniamo che

$$I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}\ .$$

Essendo

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx = -\left[\cos(x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

e

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx = \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(x)\ dx = 2\pi - \pi = \pi$$

possiamo concludere che

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(x)\ dx = \int_0^{2\pi} \cos^n(x)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{se}\ \ n = 2k+1 \\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ 2\pi & \text{se}\ \ n = 2k \end{cases}\ .$$