Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 5 - 21 Marzo 2014

1. Al solito specificheremo gli sviluppi utilizzati per lo svolgimento dei limiti esercizio per esercizio :

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \ln\left(\frac{x+1}{e}\right)}{2(\cosh(x)-1)\sinh(x)}$: Gli sviluppi che ci interessa utilizzare sono

   - $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
   - $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
   - $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
   - $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

   Utilizzandoli abbiamo che

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \ln\left(\frac{x+1}{e}\right)}{2(\cosh(x)-1)\sinh(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 1 + o(x^3)}{2\left(1 + \frac{x^2}{2} - 1 + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} =$$

   $$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{(x^2 + o(x^3)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{1}{6}\ ;$$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{4\left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) - 1\right]}{x(e^{2x} - \cosh(2x) - 2x)}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

   - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
   - $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
   - $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
   - $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

   cosí da ottenere che

   $$\lim_{x\to 0} \frac{4\left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) - 1\right]}{x(e^{2x} - \cosh(2x) - 2x)} =$$

   $$= \lim_{x\to 0} \frac{4\left[1 - 2x^2 + \frac{2}{3}\ x^4 + \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{3}\ x^3 + o(x^3)\right)^2 - 1 + o(x^4)\right]}{x\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}\ x^3 - 1 - 2x^2 - 2x + o(x^4)\right)} =$$

   $$= \lim_{x\to 0} \frac{4\left[-2x^2 + \frac{2}{3}\ x^4 + 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\right]}{\frac{4}{3}\ x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8}{3} - \frac{16}{3} + o(1)}{\frac{4}{3} + o(1)} = -2\ ;$$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{(6\cosh(\sqrt{x}) - 6\cos(\sqrt{x}))\tan(x^3)}{15\sin^2(x) - 15\arcsin^2(x)}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

   - $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
   - $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
   - $\tan(x) = x + o(x)$
   - $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
   - $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

per concludere che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(6\cosh(\sqrt{x})-6\cos(\sqrt{x}))\tan(x^3)}{15\sin^2(x)-15\arcsin^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(6\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)-6\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right))\left(x^3+o(x^3)\right)}{15\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2-15\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(6x+o(x))(x^3+o(x^3))}{15\left(x^2-\frac{x^4}{3}-x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^4+o(x^4)}{-10x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{6+o(1)}{-10+o(1)}=-\frac{3}{5}\,;$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(\sin(x))-x\cos(x)}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos(x))},\quad \alpha\in\mathbb{R}$: Gli sviluppi da utilizzare sono

- $\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

Applicandoli abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(\sin(x))-x\cos(x)}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^3+\frac{1}{5}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^5+o(x^5)}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos(x))}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{x^5}{2}+o(x^5)\right)+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos(x))}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^5}{5}+o(x^5)}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{|\alpha|-1}+o(x^{|\alpha|-1})}{3\arctan(\cos(x))}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ \frac{4}{3\pi} & \text{se } \alpha=\pm 1\\ +\infty & \text{se } \alpha\in(-1,1)\end{cases}\;;$$

NB. In questo esercizio, fermando gli sviluppi prima del quinto ordine avremmo semplicemente scoperto che il numeratore é un o-piccolo di x^4. Sono cose come queste a doverci far capire che dobbiamo aggiungere termini allo sviluppo, perché altrimenti non giungiamo ad una determinazione precisa del limite.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x^3}}-1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}\left[\ln\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x\right]$: Essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x^3}}-1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}\left[\ln\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x\right]=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x^3}}-1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}\;.$$

Applicando il cambio di variabile $x = \frac{1}{y}$ abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{x^3}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x\right] = \frac{1}{4} \lim_{y\to 0} \frac{e^{2y^3} - 1}{\sin(y) - y} \ .$$

A questo punto utilizziamo gli sviluppi di Taylor

- $e^y = 1 + y + o(y)$
- $\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$

per ottenere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{x^3}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x\right] = \frac{1}{4} \lim_{y\to 0} \frac{2y^3 + o(y^3)}{-\frac{y^3}{6} + o(y^3)} = \frac{1}{4} \lim_{y\to 0} \frac{2 + o(1)}{-\frac{1}{6} + o(1)} = -3 \, ;$$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(2x+1)) - e^{2x} + 1}{\tan(x^2)}$: Gli sviluppi che ci servono sono

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\sin(x) = x + o(x)$
- $\tan(x) = x + o(x)$

Tramite essi troviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(2x+1)) - e^{2x} + 1}{\tan(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(2x - 2x^2 + o(x^2)\right) - 1 - 2x - 2x^2 + o(x^2) + 1}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x^2 - 2x - 2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-4 + o(1)}{1 + o(1)} = -4 \, .$$

2. (a) Come giá visto nell'esercizio 3. (d) del tutorato 3 abbiamo che

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \tanh^{-1}(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ .$$

Il nostro scopo é calcolare $\ln(3)$, cioé $\tanh^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ essendo

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 3 \iff \frac{1+x}{1-x} = 9 \iff 1 + x = 9 - 9x \iff x = \frac{4}{5} \ .$$

In questo caso é arduo capire chi é $f^{(n+1)}(\xi), \xi \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$, perció tenteremo un approccio numerico .
Essendo

$$\sum_{k\geq 0} \frac{4^{2k+1}}{(2k+1)5^{2k+1}} \approx 1,098$$

per trovare l'n tale che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4^{2k+1}}{(2k+1)5^{2k+1}} \approx 1,09?$$

possiamo procedere aumentando via via il valore di n fino a giungere al valore desiderato.

Procedendo in tale maniera scopriremo che il minimo n che soddisfa quanto richiesto é $n = 6$. Per tale valore di n abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{4^{2k+1}}{(2k+1)5^{2k+1}} \approx 1,093$$

mentre per $n = 5$ il valore della serie é $1,088\cdots$;

(b) $\frac{x-\sin(x)}{x^2}$: Essendo

$$\sin(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1}$$

abbiamo che

$$\frac{x-\sin(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k-1}$$

cioé

$$\frac{x-\sin(x)}{x^2} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\ x^{2k-1}$$

Ovviamente dal risultato ottenuto, per calcolare $\sin(2)$ ci basta inanzitutto ritornare alla formula dello sviluppo in serie di McLaurin di $\sin(x)$ per ottenere che

$$\sin(2) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ 2^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ 2^{2k+1} + R_n(2)\ .$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel tutorato scorso andiamoci a stimare $|R_n(2)|$:

$$|R_n(2)| = \left| \frac{\left[\frac{d^{2n+3}}{dx^{2n+3}}\ \sin(x)\right]_{x=\xi}}{(2n+3)!}\ 2^{2n+3} \right| \leq \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!},\ \xi \in (0,2)\ .$$

Ora

$$\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 10^{-2} \iff 800 \leq \frac{(2n+3)!}{4^n} \iff n \geq 3\ .$$

Vediamo se il risultato é soddisfacente :

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ 2^{2k+1} = 2 - \frac{4}{3} + \frac{4}{15} - \frac{8}{315} = \frac{286}{315} \approx 0,907$$

e poiché $\sin(2) \approx 0,909$ abbiamo svolto il nostro lavoro correttamente .

3. Il raggio di convergenza r di una serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n\ x^n$ é pari a

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}\ .$$

Trovato il valore di tale limite avremo che la serie converge per $|x| < r$. Per vedere cosa accade sul bordo dell'intervallo di convergenza $(-r, r)$ bisogna studiare la serie con $x = \pm r$ e vedere se converge .

(a) $\sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)^n x^n$: Abbiamo che la serie converge $\forall\ x \in \mathbb{R}$ in quanto

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n}-1)^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)} = \infty \ ;$$

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$ per gli sviluppi in serie di McLaurin, ergo la serie converge $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^{3n}}{3^n}$: Sia $x^3 = y$ cosí da avere che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^{3n}}{3^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n+2}\frac{y^n}{3^n} \ .$$

Calcoliamo il raggio di convergenza di questa serie :

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}\ \frac{1}{3^n}}{\frac{n+2}{n+3}\ \frac{1}{3^{n+1}}} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = 3$$

quindi la serie converge per $y \in (-3, 3)$. Tornando alla variabile di partenza possiamo concludere che la serie converge per $x \in (-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. Vediamo il comportamento al bordo dell'intervallo di convergenza :

$$\text{Se} \quad x = \sqrt[3]{3} \Longrightarrow \text{abbiamo} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n+2}$$

che non converge in quanto il termine n-esimo non tende a 0 per $n \to \infty$.

$$\text{Se} \quad x = -\sqrt[3]{3} \Longrightarrow \text{abbiamo} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n+2}(-1)^n$$

che non converge in quanto il termine n-esimo non ammette limite per $n \to \infty$.

(d) $\sum_{n\geq 1} x^{n!}$: Pare evidente che se $|x| \geq 1$ la serie non puó convergere. Se $x \in (0, 1)$ abbiamo che

$$\sum_{n\geq 1} x^{n!} < \sum_{n\geq 1} x^n < +\infty$$

in quanto, tolti i primi due termini che sono uguali, per il resto la serie di destra contiene tutti i termini della serie di sinistra piú molti altri e poiché la serie di destra converge, non puó non convergere anche quella di sinistra.
Se $x = 0$ ovviamente la serie é nulla, mentre se $x \in (-1, 0)$ la serie converge per il criterio di Leibniz . Dunque la serie converge se $|x| < 1$;

(e) $\sum_{n\geq 1} n!\ x^n$: Abbiamo che

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

ergo la serie converge solo per $x = 0$;

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$: Essendo

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{n}}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{\alpha\ln(n)}{n}}}}=1\quad\forall\ \alpha\ .$$

Dunque la serie converge per $|x|<1\ \ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}^+$.
Vediamo cosa accade per $x=\pm 1$:

$$\text{Se}\quad x=1\Longrightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}<\infty\Longleftrightarrow\alpha>1\ ;$$

$$\text{Se}\quad x=-1\Longrightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}<\infty\ \ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}^+\quad\text{per il criterio di Leibniz}\ .$$

Dunque

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^\alpha}<\infty\ \ \text{per}\ \ \begin{cases}x\in[-1,1) & \text{se}\quad\alpha\in(0,1]\\ x\in[-1,1] & \text{se}\quad\alpha>1\end{cases}\ ;$$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n^{\sqrt{n}}x^n$: Essendo

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}}=1$$

abbiamo che la serie converge per $|x|<1$. Sul bordo dell'intervallo di convergenza abbiamo che

$$\text{se}\quad x=1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}n^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\sqrt{n}\ln(n)}=\infty\ ;$$

$$\text{se}\quad x=-1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^{\sqrt{n}}=\nexists\ .$$

Dunque la serie non converge per $x=\pm 1$ in quanto in entrembi i casi il termine n-esimo non tende a 0 ;

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\ln(n+1)}$: Essendo

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n+1)}}}=1$$

abbiamo che la serie converge per $|x|<1$.
Vediamo cosa accade per $x=\pm 1$:

- se $x=-1$ possiamo dire che la serie converge per il criterio di Leibniz ;
- Se $x=1$ possiamo notare che, essendo $\ln(n+1)<n\ \forall\ n$, abbiamo che $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$. Essendo le serie a termini positivi possiamo concludere che

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\ln(n+1)}>\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=\infty$$

e quindi la serie non converge .

Dunque la serie converge per $x\in[-1,1)$.

(i) $\sum_{n\geq 1}[\ln(\ln(3n))]x^n$: Al solito usando il criterio della radice n-esima scopriamo che $r = 1$. Anche in questo caso, possiamo usare le stesse argomentazioni dell'esercizio (g) per concludere che la serie diverge sul bordo dell'intervallo di convergenza ;

(j) $\sum_{n\geq 2}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-2}x^n$: Abbiamo che

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-2}}{\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{2n^2+4n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-1}\;\frac{n^2+2n}{n+1+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2-1}\;\frac{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\;\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^3\;\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}\;\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}\;\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)} = 1$$

dunque la serie converge per $|x| < 1$.
Per $x = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz.
Essendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

abbiamo che

$$\sum_{n\geq 2}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-2} \approx \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n} = \infty$$

ergo la serie non converge per $x = 1$, e quindi possiamo concludere che la serie converge per $x \in [-1, 1)$;

(k) $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2}$: La serie converge per $|x| \leq 1$ per quanto visto nell'esercizio (f) ;

(l) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)x^n = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\;x^n := \alpha_n + \beta_n$: Analizziamo le due serie distintamente :

- α_n : Per l'esercizio (f) la serie converge per $x \in [-1, 1)$;
- β_n : Essendo

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

  abbiamo che la serie converge per $|x| < 1$. Analizziamo il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza :
  - Per $x = 1$ la serie converge per il criterio di Leibniz ;
  - Per $x = -1$ la serie diverge banalmente .

  Dunque β_n converge per $x \in (-1, 1]$.

Dunque la serie $\alpha_n + \beta_n$ convergerá per gli x per cui convergono entrambe le serie, ergo per $|x| < 1$;

(m) $\sum_{n\geq 1}(2^n+3^n)x^n = \sum_{n\geq 1}2^n x^n + \sum_{n\geq 1}3^n x^n := \alpha_n + \beta_n$: Anche in questo caso analizziamo le due serie separatamente :

- α_n : Essendo
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$
abbiamo che la serie converge per $|x| < \frac{1}{2}$. Essendo per $x = \pm 1$ la serie pari a
$$\sum_{n\geq 1} 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \quad \text{rispettivamente}$$
abbiamo che la serie non converge per $x = \pm 1$;
- β_n : Essendo
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$
abbiamo che la serie converge per $|x| < \frac{1}{3}$. Essendo per $x = \pm 1$ la serie pari a
$$\sum_{n\geq 1} 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \quad \text{rispettivamente}$$
abbiamo che la serie non converge per $x = \pm 1$.

Dunque la serie $\alpha_n + \beta_n$ convergerá per gli x per cui convergono entrambe le serie, ergo per $|x| < \frac{1}{3}$;

(n) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^n(n^2+2)}$: Essendo
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n(n^2+2)}}{\frac{1}{2^{n+1}(n^2+2n+3)}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+2} = 2$$
abbiamo che la serie converge per $|x| < 2$.
Sul bordo dell'intervallo di convergenza abbiamo che la serie converge perché per $x = \pm 2$ la serie é pari a
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+2} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+2} \quad \text{rispettivamente}$$
e
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ che converge ;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ converge per il criterio di Leibniz .

Dunque la serie converge per $|x| \leq 2$;

(o) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^n}{\beta^{-\sqrt{n}}}$, $\beta > 0$: Effettuiamo la sostituzione $x - 1 = y$ e studiamo la serie
$$\sum_{n\geq 1} y^n \beta^{\sqrt{n}} .$$
Essendo
$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \beta^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1$$
abbiamo che la serie converge per $|y| < 1$. Per vedere cosa accade sul bordo distinguiamo in piú casi :

- Se $\beta \in (0,1)$ abbiamo che
  - Se $y = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz ;
  - Se $y = 1$ la serie converge in quanto $\beta^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, difatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2 \beta^{\sqrt{n}} = 0$$

quindi

$$\sum_{n\geq 1} \beta^{\sqrt{n}} < \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \ .$$

Dunque, per $\beta \in (0,1)$ la serie converge per $|y| \leq 1$;

- Se $\beta = 1$ la serie non converge per $y = \pm 1$ per gli stessi motivi dell'esercizio (m) ;
- Se $\beta > 1$ la serie non converge per $y = \pm 1$ per le stesse argomentazioni dell'esercizio (g) .

Dunque

$$\sum_{n\geq 1} y^n \beta^{\sqrt{n}} < \infty \quad \text{per} \quad \begin{cases} y \in [-1,1] & \text{se} \quad \beta \in (0,1) \\ y \in (-1,1) & \text{se} \quad \beta \geq 1 \end{cases} .$$

Torniamo ora alla serie di partenza : essendo $x = y + 1$ abbiamo dunque che

$$\sum_{n\geq 1} (x-1)^n \beta^{\sqrt{n}} < \infty \quad \text{per} \quad \begin{cases} x \in [0,2] & \text{se} \quad \beta \in (0,1) \\ x \in (0,2) & \text{se} \quad \beta \geq 1 \end{cases} .$$

4. Seguiremo la stessa scaletta presentata nelle soluzioni dello scorso tutorato :

(a) $f_1(x) = e^{e^x}$: La funzione non ha punti di discontinuitá . Inoltre, essendo l'esponenziale sempre positivo, avremo che $f_1(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Poiché la funzione non ha punti di discontinuitá, non ha nemmeno asintoti verticali. Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} e^{e^x} = 1$$

$y = 1$ é un asintoto orizzontale per $f_1(x)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} e^{e^x} = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{e^x}}{x}$$

dunque la funzione va a $+\infty$ per $x \to +\infty$ senza avvicinarsi un asintoto obliquo. Essendo $f_1'(x) = f_1(x)e^x > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ la funzione é strettamente crescente e poiché $f_1''(x) = f_1'(x)e^x + f_1(x)e^x = f_1(x)e^x(e^x+1) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ la funzione é sempre convessa. Nella Figura 1. possiamo vedere il grafico tracciabile mediante le informazioni ottenute ;

(b) $f_2(x) = (x-1)\sqrt[3]{2-x}$: La funzione non ha punti di discontinuitá, indi $D \equiv \mathbb{R}$. Studiamone il segno :

$$f_2(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \iff x \in [1,2] \ .$$

Quindi nell'intervallo $[1,2]$ la funzione é positiva, annullandosi agli estremi dell'intervallo, e fuori da tale intervallo é negativa.

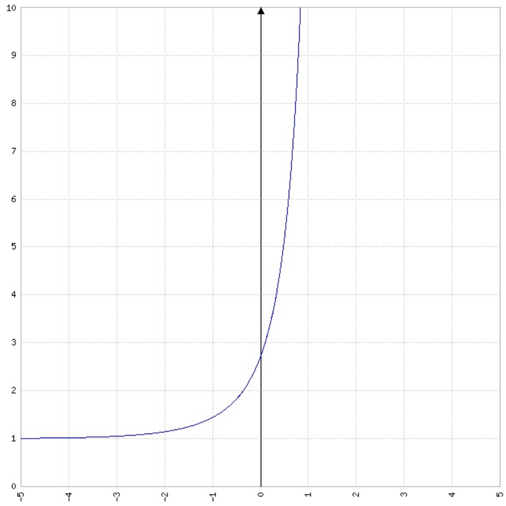

Figura 1: Grafico della funzione $f_1(x) = e^{e^x}$.

Essendo $D \equiv \mathbb{R}$ la funzione non ha asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = -\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$$

ergo la funzione non ha nemmeno asintoti orizzontali/obliqui.
Studiamo la derivata :

$$f_2'(x) = \frac{7-4x}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$$

quindi la funzione ha un massimo per $x = \frac{7}{4}$. Vediamo anche il segno di $f_2''(x)$:

$$f_2''(x) = \frac{4x-10}{9\sqrt[3]{(2-x)^5}} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x-10 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 2 < x \leq \frac{5}{2} \; .$$

Dunque quando $x = 2$ la funzione ha un flesso a tangente verticale (vedere esercizio 1. (c) dello scorso tutorato), mentre quando $x = \frac{5}{2}$ ha un punto di flesso. Tra tali valori di x la funzione é convessa, altrove é concava. In Figura 2. é possibile vedere il grafico della funzione ;

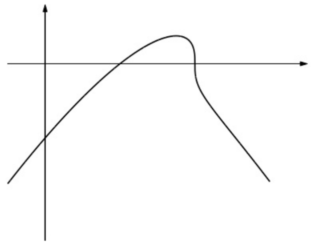

Figura 2: Grafico della funzione $f_2(x) = (x-1)\sqrt[3]{2-x}$.

(c) $f_3(x) = 2\ln|\ln(x+2)| + \ln(2+x)$: La funzione ha un problema se $x+2 \leq 0$ in quanto il logaritmo non é definito per tali valori di x. Inoltre deve essere $\ln(x+2) \neq 0$ altrimenti il primo dei due logaritmi “esplode“. Quindi la funzione

ha un punto di discontinuitá in $x = -1$. Mettendo insieme queste informazioni possiamo concludere che $D = (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.
Il segno della funzione non é facilmente visibile, quindi cercheremo di trarre informazioni al riguardo mediante lo studio dei punti successivi della scaletta. Passiamo a vedere gli asintoti della funzione : essa ha ben 2 asintoti verticali, cioé $x = -2$ ed $x = -1$ in quanto

$$\lim_{x \to -2^+} f_3(x) = -\infty = \lim_{x \to -1^\pm} f_3(x)$$

mentre non ha asintoti orizzontali/obliqui giacché

$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = 0 \ .$$

Passiamo allo studio della derivata :

$$f_3'(x) = \frac{2 + \ln(x+2)}{(x+2)\ln(x+2)} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(x+2) > 0 \\ 2 + \ln(x+2) \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \leq -2+e^{-2} \wedge x > -1$$

quindi per $x = -2 + e^{-2}$ la funzione ha un massimo, mentre dopo l'asintoto $x = -1$ risulta essere strettamente crescente.
Essendo

$$f_3''(x) = -\frac{\ln^2(x+2) + 2\ln(x+2) + 2}{(x+2)^2 \ln^2(x+2)} < 0 \ \ \forall \, x \in D$$

possiamo concludere che la funzione é sempre concava.
Notiamo che $f_3(-2 + e^{-2}) = 2(\ln(2) - 1) < 0$ per affermare che la funzione é sempre negativa tra i due asintoti, quindi diventerá positiva da un certo $x = \alpha \in (-1, +\infty)$ in poi.
Mettendo insieme tutte le informazioni ottenute possiamo tracciare il grafico in Figura 3. ;

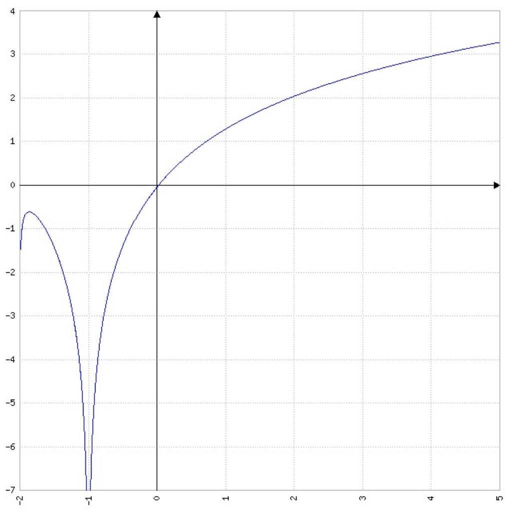

Figura 3: Grafico della funzione $f_3(x) = 2\ln|\ln(x+2)| + \ln(2+x)$.

(d) $f_4(x) = \frac{\ln^3|x|}{x|x|} = \begin{cases} \frac{\ln^3(x)}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ -\frac{\ln^3(-x)}{x^2} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$: Il punto $x = 0$ é da escludere dal dominio in quanto in esso il logaritmo "esplode" ed il denominatore non é

definito. Dunque $D \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Notiamo che la funzione é dispari, quindi possiamo limitarci a studiarla per $x > 0$ e per tracciare il grafico di $f_4(-x)$ basterá ribaltare i risultati ottenuti. Consideriamo dunque solamente $f_4^+(x) = \frac{\ln^3(x)}{x^2}$.
Partiamo dal segno :

$$f_4^+(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(x) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \geq 1.$$

Dunque $f_4(x) \geq 0$ se $x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$.
$x = 0$ é un asintoto verticale, difatti

$$\lim_{x \to 0^\pm} f_4(x) = \mp\infty$$

e $y = 0$ é un asintoto orizzontale in quanto

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_4(x) = 0 \ .$$

Non vi sono, dunque, asintoti obliqui. Studiamo la derivata di $f_4(x)$:

$$D[f_4^+(x)] = \frac{\ln^2(x)\ (3 - 2\ln(x))}{x^3} \geq 0 \Longleftrightarrow 3 - 2\ln(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq e^{\frac{3}{2}} \ .$$

Pertanto per $x = e^{\frac{3}{2}}$ la funzione ha un massimo. Per simmetria in $x = -e^{\frac{3}{2}}$ ha un minimo. Derivando ancora scopriamo che

$$D[D[f_4^+(x)]] = \frac{3\ln(x)(2\ln^2(x) - 5\ln(x) + 2)}{x^4} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(x) \geq 0 \\ 2\ln^2(x) - 5\ln(x) + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \sqrt{e} \ \wedge \ x \geq e^2 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [1, \sqrt{e}] \cup [e^2, +\infty)$$

quindi, quando $x = 1, \sqrt{e}, e^2$ abbiamo che $f_4^+(x)$ ha un punto di flesso (in particolare in $x = 1$ vi é un **flesso a tangente orizzontale** in quanto
$D[f_4^+(1)] = 0,$ ma in tal punto la derivata non cambia segno).
Complessivamente dunque la funzione ha 6 punti di flesso quando $x = \pm 1, \pm\sqrt{e}, \pm e^2$.
Dall'analisi effettuata possiamo concludere che $f_4(x)$ é convessa se
$x \in [-e^2, -\sqrt{e}] \cup [-1, 0) \cup [1, \sqrt{e}] \cup [e^2, +\infty)$ e concava altrove. Dunque il grafico di $f_4(x)$ é quello visibile in Fiugura 4. .
NB. I punti di flesso non sono ben visibili in quanti i valori in cui la funzione cambia concavitá sono tutti molto vicini tra di loro.

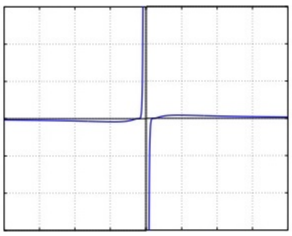

Figura 4: Grafico della funzione $f_4(x) = \frac{\ln^3 |x|}{x|x|}$.