Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 2 - 28 Febbraio 2014

1. Si considerino due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in [a, b]$. Supponiamo che sia $x_1 < x_2$. Nell'intervallo $[x_1, x_2]$ vale il teorema di Lagrange, per cui esiste almeno un punto $x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che
$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
Per ipotesi $\forall\ x \in [a, b]$ vale $f'(x) = 0$, per cui $f(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Siccome i punti x_1 e x_2 sono stati presi a piacere, si puó concludere che la funzione assume lo stesso valore in tutti i punti di $[a, b]$, perció é costante.

2. (a) Abbiamo che
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$
ergo la funzione non é continua in $x = 0$.

   (b) $D[f(x)] = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$

   (c) Dal punto precedente é evidente che la funzione risulta essere costante. Dal punto (**a**) possiamo dedurre (giacché tolto lo 0 la funzione non ha punti di discontinuitá) che
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

3. La funzione $\arcsin(x) + \arccos(x)$ non ha punti di discontinuitá. Essendo
$$D[\arcsin(x) + \arccos(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
deduciamo che la funzione risulta essere costante $\forall\ x \in [-1, 1]$.
Calcoliamola, dunque, in un punto qualsiasi per sapere il valore di tale costante:
$$\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$
indi l'asserto.

4. Una funzione $f(x)$ si dice continua in x_0 se
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Una funzione $f(x)$ si dice derivabile in x_0 se esiste ed é finito il limite
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
$f(x)$ si dice derivabile in (a, b) se é derivabile in ogni punto di (a, b).

(a) Abbiamo che $f(0) = 3$. Essendo

$$\lim_{x\to 0} 7e^x - 4 = 3$$

abbiamo che la funzione $f(x)$ é continua $\forall\ a, b$.
La funzione $f(x)$ é derivabile sicuramente in ogni punto $x \neq 0$ essendo ax^2+bx+3 e $7e^x - 4$ funzioni derivabili $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Vediamo cosa succede in $x = 0$:

$$D[ax^2 + bx + 3] = 2ax + b \Longrightarrow f(0^+) = b$$

$$D[7e^x - 4] = 7e^x \Longrightarrow f(0^-) = 7$$

Pertanto perché sia $f(x)$ derivabile deve essere $b = 7$.
Concludendo, la funzione risulta essere continua e derivabile per $b = 7$ e $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

(b) Abbiamo che $g(1) = \frac{4a+b}{2}$. Essendo

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 2(a + b)x - 1 = 2(a + b) = 2a + 2b.$$

$$\frac{4a + b}{2} = 2a + 2b \Longleftrightarrow \frac{b}{2} = 2b \Longleftrightarrow b = 0.$$

Dunque $g(x)$ é continua $\forall\ a \in \mathbb{R}$ e per $b = 0$.
Come per l'esercizio precedente abbiamo che $g(x)$ é derivabile sicuramente $\forall\ x \neq 1$. Ora

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{8ax}{(x^2+1)^2} & \text{se } x \geq 1 \\ 2x + 2a & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$g'(1) = -2a$, ed essendo

$$\lim_{x\to 1^-} 2x + 2a = 2 + 2a$$

abbiamo che $g(x)$ é derivabile se e solo se $-2a = 2 + 2a \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}$.
Dunque $g(x)$ é continua e derivabile se e solo se $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 0$.

5. Per essere valido il teorema di Lagrange $f(x)$ deve essere continua nell'intervallo $[a, b]$ indicato e derivabile in (a, b). Per il teorema di Rolle a queste condizioni va aggiunto che deve essere $f(a) = f(b)$.

(a) $f_1(x) = x - x^3$ é continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Essendo $f_1'(x) = 1 - 3x^2$ continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$, sicuramente si ha che $f_1(x)$ é derivabile $\forall\ x \in (-2, 1)$. Ergo le ipotesi del sistema di Lagrange sono soddisfatte.

$$f_1(-2) = -2 - (-2)^3 = 8 - 2 = 6 \neq 1 - 1 = 0 = f_1(1)$$

indi le ipotesi del teorema di Rolle non sono verificate. Verifichiamo la tesi del teorema di Lagrange: deve esistere un $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$1 - 3c^2 = f_1'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 6}{1 + 2} = -2 \Longleftrightarrow 3c^2 = 3 \Longleftrightarrow c^2 = 1$$

indi il c cercato é pari a -1.
La tesi del teorema di Rolle ci dice che esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

$$f_1'(c) = 1 - 3c^2 = 0 \Longleftrightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Questi 2 valori di c sono in $(-2, 1)$, indi, nonostante le ipotesi del teorema di Rolle non valgano, comunque la tesi é verificata.

(b) Essendo $f_2(x) = \cosh(x)$ una funzione pari, sicuramente $f_2(-\ln(37)) = = f_2(\ln(37))$. Inoltre é continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e lo stesso si puó dire di $f_2'(x) = \sinh(x)$, ergo $f_2(x)$ é derivabile $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Dunque le ipotesi di entrambi i teoremi sono verificate. Ora

$$f_2'(c) = \sinh(c) = 0 \iff \frac{e^c - e^{-c}}{2} = 0 \iff c = 0.$$

Dunque i teoremi sono verificati per $c = 0$ (quando vale il teorema di Rolle la c che lo verifica é necessariamente la stessa del teorema di Lagrange poiché la tesi di Lagrange diventa: $\exists\ c \in (a, b) : f'(c) = 0$).

(c) $f_3(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ é una funzione continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$D[f_3(x)] = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

ergo $f_3(x)$ é derivabile in $(0, 2)$ essendo $f_3'(x)$ continua in tale intervallo. Dunque le ipotesi del teorema di Lagrange sono verificate. L'ultima ipotesi del teorema di Rolle non é, invece, verificata poiché

$$f_3(0) = \sqrt[3]{4} \neq 0 = f_3(2).$$

In tal caso non esiste una $c \in (0, 2)$ che verifica comunque la tesi del teorema giacché la derivata di $f_3(x)$ non si annulla mai. Verifichiamo la tesi del teorema di Lagrange:

$$f_3'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c-2}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \iff -\frac{4}{3} = \sqrt[3]{4c-8} \iff$$

$$\iff -\frac{64}{27} = 4c - 8 \iff 4c = 8 - \frac{64}{27} = \frac{152}{27} \iff c = \frac{38}{27}.$$

(d) $f_4(x) = \sin(x) + \cos^2(x)$ é una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre

$$f_4'(x) = \cos(x) - \sin(2x)$$

é continua su tutto $\mathbb{R}$, ergo $f_4(x)$ é derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre

$$f_4(0) = f_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

che ci assicura che valgono le ipotesi di entrambi i teoremi. Dobbiamo dunque, per verificare la tesi di entrambi i teoremi, trovare un $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ che annulli $f_4'(x)$:

$$f_4'(c) = \cos(c) - 2\sin(c)\cos(c) = \cos(c)(1 - 2\sin(c)) = 0 \iff \begin{cases} \cos(c) = 0 \\ \text{oppure} \\ 1 - 2\sin(c) = 0 \end{cases}$$

Essendo $\cos(c) \neq 0\ \forall\ c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dovrá valere $\sin(c) = \frac{1}{2} \implies c = \frac{\pi}{6}$.

(e) $f_5(x)$ é continua nell'intervallo considerato, giacché la sua unica discontinuitá é in $x = 0$ (non contenuto in esso), e

$$\lim_{x\to 1} 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2 = f_5(1).$$

Essendo

$$f_5'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

tale che

$$\lim_{x\to 1} \pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 = f_5'(1)$$

abbiamo che $f_5(x)$ é derivabile nell'intervallo indicato. Tuttavia

$$f_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \neq 0 = f_5(2)$$

indi sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, ma non quelle del teorema di Rolle. Verifichiamo comunque la tesi di Rolle:

$$f_5'(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{c^2-1}{c^2} = 0 \\ \text{oppure} \\ \pi\cos\left(\frac{\pi c}{2}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow c = 1$$

verifica la tesi del teorema.
Verifichiamo, ora, la tesi del teorema di Lagrange:

$$f_5'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\frac{\frac{5}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{5}{3} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{c^2-1}{c^2} = -\frac{5}{3} \\ \text{oppure} \\ \pi\cos\left(\frac{\pi c}{2}\right) = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo che

$$3(c^2 - 1) + 5c^2 = 0 \Longrightarrow 8c^2 = 3 \Longrightarrow c^2 = \frac{3}{8} \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Giacché

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 1$$

tale c verifica la tesi del teorema di Lagrange.

6. Il teorema di Lagrange é un caso particolare del teorema di Cauchy. Le ipotesi di quest'ultimo teorema sono le stesse per la $f(x)$ e per la $g(x)$ (continuitá in $[a, b]$ e derivabilitá in (a, b)) con la condizione aggiuntiva che sia $g'(x) \neq 0 \; \forall \; x \in (a, b)$.

   (a) $f_1(x)$ e $g_1(x)$ sono ovviamente continue nell'intervallo considerato. Essendo $D[g_1(x)] = -1 \neq 0$, continua in $(0, 1)$ abbiamo che $g_1(x)$ verifica tutte le ipotesi richieste. Inoltre $f_1'(x) = \frac{5-x}{\sqrt{-x^2+10x}}$ é continua nell'intervallo considerato, ergo anche $f_1(x)$ verifica tutte le ipotesi richieste. Dunque possiamo verificare la tesi, cioé vedere che esiste $c \in (0, 1)$ tale che

$$f_1'(c)(g_1(b) - g_1(a)) = g_1'(c)(f_1(b) - f_1(a)).$$

Ció é vero se e solo se

$$\frac{5-c}{\sqrt{10c-c^2}} = 3 \iff (5-c)^2 = 9(10c-c^2) \iff 2c^2 - 20c + 5 = 0.$$

Tale equazione risulta essere vera se e solo se $c = 5 - \frac{3\sqrt{10}}{2}$ nell'intervallo considerato.

(b) Sicuramente entrambe le funzioni sono continue nell'intervallo considerato. Inoltre sono anche entrambe derivabili, essendo le loro derivate continue fuori dall'origine. Essendo

$$g_2'(x) = -\frac{(x+4)}{x^3} \neq 0 \ \forall \ x \neq -4$$

abbiamo che tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Cerchiamo il c che risolve la tesi:

$$-\frac{2}{c^2} = -\left(\frac{(c+4)}{2c^3}\right) \iff 2 = \frac{c+4}{2c} \iff 3c = 4 \iff c = \frac{4}{3}.$$

(c) Le due funzioni sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

$$f_3'(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{e} \quad g_3'(x) = 2xe^{x^2+2}$$

sono continue su tutto $\mathbb{R}$, ergo $f_3(x)$ e $g_3(x)$ sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia $g_3'(0) = 0$, quindi le ipotesi del teorema non sono verificate. Vediamo se la tesi vale comunque: essendo le due funzioni pari, abbiamo che la tesi é verificata per ogni punto di $(-1,1)$.

7. Notiamo che le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono limitate $\forall\ x$. Inoltre x^c definita nell'intervallo $[-1,1]$ é limitata se e solo se $c \geq 0$, poiché per $c < 0$ esplode nell'origine. Con queste piccole osservazioni possiao partire:

   (a) Perché $f(x)$ sia continua dovrá essere

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) = 0.$$

   Questo accade solamente per $\alpha > 0$ perché se $\alpha = 0$ il limite non esiste e per $\alpha < 0$ la funzione esplode.

   (b) Per esistere $f'(0)$ dovrá esistere finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{h^\beta}\right)$$

   Per lo stesso discorso fatto in (**a**), abbiamo che ció accade se e solo se $\alpha > 1$.

   (c) Derivando otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   $f'(x)$ risulta essere limitata se

$$\begin{cases} \alpha - 1 \geq 0 \\ \alpha - \beta - 1 \geq 0 \end{cases}$$

   ed essendo $\beta > 0$ dovrá dunque essere $\alpha \geq \beta + 1$.

(d) Per essere $f'(x)$ continua dovrá essere

$$\lim_{x\to 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) = 0$$

Analogamente a quanto visto in (**a**) abbiamo che questo avviene se e solo se $\begin{cases} \alpha - 1 > 0 \\ \alpha - \beta - 1 > 0 \end{cases}$ ed essendo $\beta > 0$, dovrá essere $\alpha > \beta + 1$.

(e) Per esistere finito $f''(0)$ dovrá esistere finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha h^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{h^\beta}\right) - \beta h^{\alpha-\beta-2} \cos\left(\frac{1}{h^\beta}\right) ,$$

cosa che accade solo se $\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \alpha - \beta - 2 > 0 \end{cases}$ per gli stessi motivi del punto (**b**). Al solito, poiché $\beta > 0$, dovrá, dunque, essere $\alpha > 2 + \beta$.

(f) Derivando $f'(x)$ otteniamo

$$f''(x) = \begin{cases} \left[\alpha(\alpha-1)x^{2\beta} - \beta^2\right] x^{\alpha-2\beta-2} \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) - \beta\left[\alpha + (\alpha-\beta-1)\right] x^{\alpha-2-\beta} \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

limitata solo per $\begin{cases} \alpha - 2\beta - 2 \geq 0 \\ \alpha - 2 - \beta \geq 0 \end{cases}$ e poiché $\beta > 0$ dovrá essere $\alpha \geq 2 + 2\beta$.

(g) Per essere $f''(x)$ continua dovrá essere

$$\lim_{x\to 0} \left[\alpha(\alpha-1)x^{2\beta} - \beta^2\right] x^{\alpha-2\beta-2} \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) - \beta\left[\alpha + (\alpha-\beta-1)\right] x^{\alpha-2-\beta} \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) = 0$$

e come visto per i punti (**a**) e (**d**) dovrá essere $\begin{cases} \alpha - 2 - \beta > 0 \\ \alpha - 2 - 2\beta > 0 \end{cases}$ e per il solito discorso sul fatto che $\beta > 0$ otteniamo che dovrá essere $\alpha > 2 + 2\beta$.

8. Procediamo per induzione:

- Per $n = 1$ abbiamo che

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

quindi ci siamo;

- Supponiamolo vero per $n - 1$ e vediamolo per n:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(2n-3)!!\frac{1}{\sqrt{(1+x)^{2n-1}}}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(2n-3)!!\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{(1+x)^{2n-1}}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(2n-3)!!\left(-\frac{2n-1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^{2n+1}}}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}(2n-1)!!\frac{1}{\sqrt{(1+x)^{2n+1}}}$$

come volevamo.

9. Poniamo $f(x) = \ln(x)\ \forall\ x \in (0, +\infty)$.
   Per il teorema di Lagrange:

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta), \quad \text{con} \quad \theta \in (0,1)$$

   Quindi:

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{x+\theta} \Longleftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\theta},$$

   cioé l'asserto, poiché, essendo $\theta \in (0,1)$ é ovvio che

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+\theta} < \frac{1}{x} \quad \forall\ x \in (0, +\infty).$$