

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 10 - 9 Maggio 2014

1. • Se f é pari abbiamo che $f(t) = f(-t)$, dunque

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{(*)}{=} - \int_0^x f(-y) dy = - \int_0^x f(y) dy = -F(x),$$

cioé $F(x)$ é dispari.

NB. In $(*)$ abbiamo effettuato la sostituzione $t = -y$. Inoltre

l'ultimo integrale é pari a $F(x)$ perché la variabile di integrazione é "muta".

- Se f é dispari abbiamo che $f(t) = -f(-t)$, dunque

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{(*)}{=} - \int_0^x f(-y) dy = \int_0^x f(y) dy = F(x),$$

cioé $F(x)$ é pari.

2. Ricordiamo come applicare la regola di integrazione per sostituzione :

ponendo $f(x) = g(t)$ possiamo cosí sostituire all'interno dell'integrale ogni x con la t . Per fare ciò dobbiamo, però, modificare anche il dx in funzione del dt e gli estremi di integrazione : da $f(x) = g(t)$ otteniamo (derivando il termine sulla sinistra in x ed il termine sulla destra in t) $f'(x)dx = g'(t)dt$.

Gli estremi di integrazione variano, invece, nella seguente maniera : se la x varia tra α e β , sostituendo tali valori in $f(x) = g(t)$ otterremo che la t varierá tra $g^{-1}(f(\alpha))$ e $g^{-1}(f(\beta))$. Se l'integrale é indefinito, una volta completata l'operazione di integrazione bisognerà ritornare nella variabile di integrazione di partenza, cioè riporre $t = g^{-1}(f(x))$.

Il primo passaggio di ogni integrale di questo esercizio sará l'applicazione della sostituzione indicata:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int dt = t + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c ;$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int dt = t + c = \operatorname{settcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + c = c + \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) ;$$

$$(c) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int dt = t + c = \operatorname{settsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + c = c + \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) ;$$

$$\begin{aligned} (d) \int \sqrt{a^2 + x^2} &= a^2 \int \cosh^2(t) dt = \frac{a^2}{2} \int \cosh(2t) + 1 dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sinh(2t)}{2} + t \right) + c = \frac{a^2}{2} (\sinh(t) \cosh(t) + t) + c = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{x \sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \ln\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) \right) + c = \\ &= \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) + c ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} &= a^2 \int \cos^2(t) dt = \frac{a^2}{2} (t + \sin(t) \cos(t)) + c = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} &= a^2 \int \sinh^2(t) dt = \frac{a^2}{2} \int \cosh(2t) - 1 dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sinh(2t)}{2} - t \right) + c = \frac{a^2}{2} (\sinh(t) \cosh(t) - t) + c = \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + c . \end{aligned}$$

3. Con la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ abbiamo che

$$\bullet \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \bullet \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \bullet dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Usiamo queste nozioni per svolgere i seguenti esercizi :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \frac{3 + \sin(x)}{1 + \cos(x)} dx &= \int \frac{3 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{3t^2 + 2t + 3}{t^2 + 1} dt = \\ &= \int 3 + \frac{2t}{t^2 + 1} dt = 3t + \ln(t^2 + 1) + c = c + 3 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) ; \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \int \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{2t}{t^4 + 1} dt.$$

Effettuiamo la sostituzione $t^2 = s$ per ottenere che

$$\int \frac{2t}{t^4 + 1} dt = \int \frac{ds}{s^2 + 1} = \arctan(s) + c = \arctan(t^2) + c = \arctan\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c ;$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \int \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 - \sin(x)}} dx &= \int \frac{\sqrt{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2t}{1+t^2}}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \sqrt{\frac{2t^2}{t^2 - 2t + 1}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \\ &= 2\sqrt{2} \int \frac{t dt}{(t-1)(t^2+1)}. \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \iff \frac{t^2(A+B) + t(-B+C) + A-C}{(t-1)(t^2+1)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\implies 2\sqrt{2} \int \frac{t dt}{(t-1)(t^2+1)} = \sqrt{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+1} dt = \\ &= \sqrt{2} \ln(t-1) - \sqrt{2} \int \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt = \sqrt{2} \ln(t-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(t^2+1) + \sqrt{2} \arctan(t) + c = \\ &= \sqrt{2} \ln\left(\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}\right) + \sqrt{2} \arctan(t) + c = \sqrt{2} \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x}{\sqrt{2}} + c ; \end{aligned}$$

$$(d) \int \frac{dx}{4\sin(x) + 3\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -2 \int \frac{dt}{3t^2 - 8t - 3} =$$

$$= -2 \int \frac{dt}{(t-3)(3t+1)}.$$

Ora

$$\frac{1}{(t-3)(3t+1)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{3t+1} = \frac{t(3A+B) + A - 3B}{(t-3)(3t+1)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3A+B=0 \\ A-3B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{10} \\ B=-\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\implies -2 \int \frac{dt}{(t-3)(3t+1)} = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{t-3} - \frac{3}{3t+1} dt =$$

$$= -\frac{1}{5} (\ln(t-3) - \ln(3t+1)) + c = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{3t+1}{t-3}\right) + c = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{3\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right) + c.$$

4. (a) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$: Effettuiamo la sostituzione $e^x = t$ ottenendo che

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)}.$$

Ora

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{t(A+B) - 2A - B}{(t-1)(t-2)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\implies \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} = \ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right) + c = \ln\left(\frac{e^x-2}{e^x-1}\right) + c;$$

(b) $\int \frac{2}{(1+\tan(x))^2} dx$: Effettuiamo la sostituzione $t = \tan(x)$ ottenendo che

$$\int \frac{2}{(1+\tan(x))^2} dx = 2 \int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{(1+t)^2} = 2 \int \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)^2}.$$

Ora

$$\frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t+1)^2} =$$

$$= \frac{t^3(A+C) + t^2(2A+B+D) + t(A+2B+C) + B+D}{(t^2+1)(t+1)^2}$$

$$\iff \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ A+2B+C=0 \\ B+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{1}{2} \\ D=1 \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$2 \int \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)^2} = \int \frac{t+2}{t^2+2t+1} - \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2+2t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{2t}{t^2+1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1} \right) - \frac{1}{t-1} + c = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\tan(x) + 1)^2}{\tan^2(x) + 1} \right) - \frac{1}{\tan(x) - 1} + c = \\
&= \ln(\sin(x) + \cos(x)) - \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} + c ;
\end{aligned}$$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x} + 1)}$: Effettuiamo la sostituzione $2x = t^6$ ottenendo che

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x} + 1)} &= 3 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 3 \int 1 - \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\
&= 3t - 3 \arctan(t) + c = 3\sqrt[6]{2x} - 3 \arctan \left(\sqrt[6]{2x} \right) + c ;
\end{aligned}$$

(d) $\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx$: Effettuiamo la sostituzione $x-1 = t^2$ ottenendo che

$$\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx = 2 \int \frac{t^3 + t^2 + t}{t^2 - 4} dt = 2 \int t + 1 + \frac{5t + 4}{t^2 - 4} dt.$$

Ora

$$\frac{5t + 4}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{t(A+B) + 2A - 2B}{(t-2)(t+2)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A + B = 5 \\ 2A - 2B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{7}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned}
2 \int t + 1 + \frac{5t + 4}{t^2 - 4} dt &= t^2 + 2t + \int \frac{7}{t-2} + \frac{3}{t+2} dt = t^2 + 2t + 7 \ln(t-2) + 3 \ln(t+2) + c = \\
&= x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 7 \ln(\sqrt{x-1} - 2) + 3 \ln(\sqrt{x-1} + 2) + c ;
\end{aligned}$$

(e) $\int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$: Effettuiamo la sostituzione $x = \sinh^2(t)$ così da ottenere

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx &= 2 \int \sinh^2(t) dt = \int \cosh(2t) - 1 dt = \frac{\sinh(2t)}{2} - t + c = \\
&= \sinh(t) \cosh(t) - t + c = \sqrt{x} \cosh(\operatorname{settsinh}(\sqrt{x})) - \operatorname{settsinh}(\sqrt{x}) + c = \\
&= \sqrt{x} \sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + c = \sqrt{x^2 + x} - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + c ;
\end{aligned}$$

(f) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 13} dx = \int \sqrt{(x+2)^2 + 9} dx = 3 \int \sqrt{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} dx$.

Effettuiamo la sostituzione $\frac{x+2}{3} = \sinh(t)$ ottenendo che

$$\begin{aligned}
3 \int \sqrt{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} dx &= 9 \int \cosh^2(t) dt = \frac{9}{2} \int \cosh(2t) + 1 dt = \\
&= \frac{9}{4} \sinh(2t) + \frac{9}{2} t + c = \frac{9}{2} (\sinh(t) \cosh(t) + t) + c = \\
&= \frac{9}{2} \left(\left(\frac{x+2}{3} \right) \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}{3} + \ln \left(\frac{x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}}{3} \right) \right) + c = \\
&= \frac{(x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 13}}{2} + \frac{9}{2} \ln \left(\frac{x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}}{3} \right) + c.
\end{aligned}$$

5. (a) $\int_0^{2\pi} \max\{\sin(x), \cos(x)\} dx$: Come possiamo notare nella Figura 1, $\cos(x) > \sin(x)$ fino a che i grafici non si intersecano: come sappiamo bene, tale intersezione é il punto $x = \frac{\pi}{4}$ ove entrambe le funzioni assumono il valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Successivamente $\sin(x) > \cos(x)$ fino al punto di intersezione successivo, che altro non é se non $x = \frac{5}{4}\pi$, ove entrambe le funzioni assumono il valore $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dopo tale punto torna ad essere $\cos(x) > \sin(x)$ fino alla fine (ed oltre) dell'intervallo considerato. Dunque

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \max\{\sin(x), \cos(x)\} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin(x) dx + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi} \cos(x) dx = \\ &= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} + [\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}; \end{aligned}$$

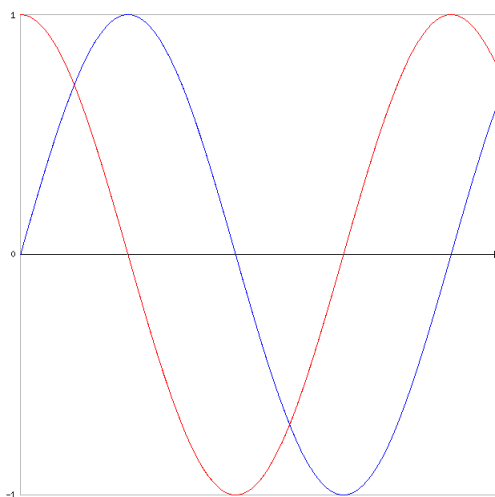


Figura 1: Grafico delle funzioni $\sin(x)$ (Blu) e $\cos(x)$ (Rosso).

- (b) $\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}} dx$: Effettuiamo una sostituzione che ci permetta di non avere piú radici di alcun tipo, cioè $x = t^{\text{mcm}(3,4,6)} = t^{12}$. Così facendo otteniamo che

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \int_0^1 \frac{t^2 - 1}{t^4 + t^3} 12t^{11} dt = 12 \int_0^1 t^9 - t^8 dt = 12 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{9} \right) = -\frac{2}{15};$$

- (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)}$: La sostituzione da effettuare in questo caso é $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, così da ottenere che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)} = \int_0^1 \frac{\frac{2 dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1}} = -2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2 \int_0^1 \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}$$

Ora

$$\frac{1}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} = \frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}} = \frac{t(A+B) + A(\sqrt{2}-1) - B(1+\sqrt{2})}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A(\sqrt{2} - 1) - B(\sqrt{2} + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{quindi}$$

$$-2 \int_0^1 \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{t-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1-\sqrt{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1);$$

- (d) $\int_0^1 \sqrt[6]{x+1} dx$: Effettuiamo la sostituzione $x = (t^2 - 1)^6$ in maniera da avere che $\sqrt[6]{x+1} = t$. Con tale sostituzione abbiamo che

$$\int_0^1 \sqrt[6]{x+1} dx = 12 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 (t^2 - 1)^5 dt = 12 \int_1^{\sqrt{2}} t^{12} - 5t^{10} + 10t^8 - 10t^6 + 5t^4 - t^2 dt =$$

$$= 12 \left[\frac{t^{13}}{13} - \frac{5}{11} t^{11} + \frac{10}{9} t^9 - \frac{10}{7} t^7 + t^5 - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 12 \left(\frac{64\sqrt{2}-1}{13} - \frac{5(32\sqrt{2}-1)}{11} + \frac{10(16\sqrt{2}-1)}{9} - \frac{10(8\sqrt{2}-1)}{7} + 4\sqrt{2}-1 - \frac{(2\sqrt{2}-1)}{3} \right) =$$

$$= 12 \left(\sqrt{2} \left(\frac{64}{13} - \frac{160}{11} + \frac{160}{9} - \frac{80}{7} + 4 - \frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{1}{13} + \frac{5}{11} - \frac{10}{9} + \frac{10}{7} - 1 + \frac{1}{3} \right) \right) =$$

$$= 12 \left(\sqrt{2} \left(\frac{542}{9009} \right) + \frac{256}{9009} \right) = \frac{8(271\sqrt{2} + 128)}{3003};$$

- (e) $\int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}} dx = \int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{(x+1)^2+9}} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}} dx.$

Effettuiamo la sostituzione $\frac{x+1}{3} = \sinh(t)$ ottenendo che

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^2 \frac{x+3}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}} dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 3 \sinh(t) + 2 dt = [3 \cosh(t) + 2t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= 3 \cosh(\ln(1+\sqrt{2})) - 3 + 2 \ln(1+\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}-1) + 2 \ln(1+\sqrt{2});$$

- (f) Per calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2(x)+1}$$

dobbiamo anzitutto osservare (vedere Figura 2) che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2(x)+1} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2(x)+1}.$$

Per vedere questo basta pensare che la funzione integranda é sempre positiva, che assume il suo minimo, 1, in $0, \pi, 2\pi$ e che assume il suo massimo, 2, in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ (se non si crede a questo basta studiare la funzione).

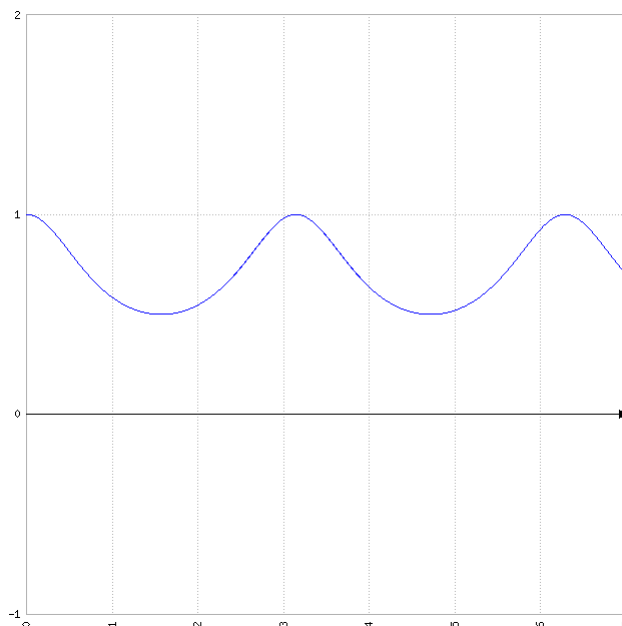


Figura 2: Grafico della funzione $\frac{1}{1+\sin^2(x)}$.

Applichiamo ora all'integrale la sostituzione $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ per ottenere che

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2(x) + 1} = 4 \int_0^1 \frac{1}{\frac{4t^2}{(t^2+1)^2} + 1} \frac{2 dt}{t^2 + 1} = 8 \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{t^4 + 6t^2 + 1} dt$$

Osserviamo che

$$t^4 + 6t^2 + 1 = (t^2 + 3 + 2\sqrt{2})(t^2 + 3 - 2\sqrt{2})$$

e cerchiamo A, B, C e D tali che

$$\frac{At + B}{t^2 + 3 + 2\sqrt{2}} + \frac{Ct + D}{t^2 + 3 - 2\sqrt{2}} = \frac{t^2 + 1}{t^4 + 6t^2 + 1}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 6t^2 + 1} &= \frac{At + B}{t^2 + 3 + 2\sqrt{2}} + \frac{Ct + D}{t^2 + 3 - 2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(A + C)t^3 + (B + D)t^2 + [(3 - 2\sqrt{2})A + (3 + 2\sqrt{2})C]t + (3 - 2\sqrt{2})B + (3 + 2\sqrt{2})D}{t^4 + 6t^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 1 \\ (3 - 2\sqrt{2})A + (3 + 2\sqrt{2})C = 0 \\ (3 - 2\sqrt{2})B + (3 + 2\sqrt{2})D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \\ C = 0 \\ D = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 + 1}{t^4 + 6t^2 + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 + 3 + 2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 + 3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\implies 8 \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{t^4 + 6t^2 + 1} dt = 8 \left[\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3 + 2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3 - 2\sqrt{2}} \right] = \\
&= 2\sqrt{2} \left[(\sqrt{2} + 1) \int_0^1 \frac{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^2 + 1} dt + (\sqrt{2} - 1) \int_0^1 \frac{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)^2 + 1} dt \right] = \\
&= 2\sqrt{2} \left[\frac{(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^2 + 1} dt + \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)^2 + 1} dt \right] = \\
&= 2\sqrt{2} \left[\frac{(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \right) + \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \right) \right]_0^1 = \\
&= 2\sqrt{2} \left[\frac{(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \right) + \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Ma, tramite la formula del doppio radicale, abbiamo che

$$\begin{cases} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2(x) + 1} &= 2\sqrt{2} \left[\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \right) + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \right) \right] = \\
&= 2\sqrt{2} \left[\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \right) + \arctan \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right) \right] = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

essendo

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0.$$