AM120 2013-2014: I ESONERO

TEMA 1. Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$ iniettiva.

1.a. Enunciare e dimostrare la regola di derivazione per f^{-1}.

1.b. Dedurre che se f é convessa lo é anche $-f^{-1}$.

1.c. Sia $g \in C(\mathbf{R})$ tale che $f \circ g$ sia derivabile in $\mathbf{R}$. Provare, usando 1.a, che se $f'(g(x_0)) \neq 0$ allora g é derivabile in x_0. Mostrare con un controesempio che l' ipotesi $f'(g(x_0)) \neq 0$ é essenziale.

TEMA 2. Sia $f \in C^\infty(\mathbf{R})$.

2.a. Enunciare e dimostrare le regole di de l'Hopital.

2.b. Dedurre che se f é nulla in $x = 0$ insieme a tutte le sue derivate allora $f = \circ(x^n)$ per ogni n. Mostrare con un esempio che una tale f non é necessariamente identicamente nulla. Provare infine che se f é, di piú, anche analitica allora f é identicamente nulla.

TEMA 3 . Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Provare che se f é convessa allora f é continua e l'insieme $\{x \in \mathbf{R} : \quad f \text{non é derivabile in } x\}$ é al piú numerabile.

TEMA 4 . Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Provare che

$$\exists\ M,\ r > 0 : \qquad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \ \leq\ \frac{Mn!}{r^n} \ \ \forall\ n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{é analitica in } (a,b)$$

Sia poi $g \in C^1(\mathbf{R})$ tale che $f(g(x)) = 0 \quad \forall x$. Provare che se f é analitica e g non é costante allora $f \equiv 0$. Mostrare che l'analiticitá di f é essenziale.

TEMA 5. Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, mostrare che l'insieme su cui converge é un intervallo centrato nell'origine. Determinare quindi il raggio r di tale intervallo (Formula di Cauchy-Hadamard).
Definita poi $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ in $I := (-r, r)$, provare che f é analitica in I.
Infine, provare che $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ é una funzione periodica.

ESERCIZIO 1. Siano $f_n \in C^1((-1,1))$ tutte nulle in $x=0$. Supposto che f_n
Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[(1-x)^{-1}+e^x]^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x\log(\cos x)}$$

ESERCIZIO 2. Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-i)^{-n}z^n, z \in \mathcal{C}$$

Si determini l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n^2+2)2^n}, z \in \mathcal{C}$$

ESERCIZIO 3. Detto $\log x$ il logaritmo naturale di x, studiare il dominio, eventuali asintoti, massimi e minimi locali/globali, della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\log x}{e + x\log x}.$$

Disegnarne un grafico qualitativo.

ESERCIZIO 4. Data $f \in C^2(\mathbf{R})$, siano

$$\forall\alpha \in \mathbf{R}, \quad f_\alpha(x) := f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) \qquad\qquad \tilde{f}(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \quad \alpha \in \mathbf{R}\}$$

Fissato x, trovare i punti stazionari di $\alpha \to g_x(\alpha) := f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}$
e mostrare che
(i) $\alpha = x$ é punto di massimo (locale) per la funzione $\alpha \to g_x(\alpha)$ se $f''(x) > 0$
mentre é di minimo (locale) se $f''(x) < 0$
(ii) se $f''(x) > 0$ per $|x|$ grande, allora

$$(*) \quad \forall x \in \mathbf{R}, \exists\alpha(x) : \quad \tilde{f}(x) = g_x(\alpha(x)) \quad e \quad f''(\alpha(x))(x-\alpha(x)) = 0$$

$$(**) \quad \tilde{f}(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) \quad \forall\alpha \quad t.c. \quad f''(\alpha) = 0$$

Calcolare infine $\tilde{f}$ nei casi $f(x) = \frac{3}{3+x^2}$, $f(x) = \cosh x - x^2$.