2014-AM120: Settimana 11

INTEGRALI IMPROPRI

Integrali impropri (su intervalli illimitati) per funzioni non negative.

Vogliamo estendere la nozione di integrabilitá ed integrale a funzioni f localmente integrabili, tali cioé che $f\chi_E$ risulti integrabile per ogni E misurabile, ovvero per ogni $E \in \Sigma$ (a funzioni quindi non necessariamente a supporto compatto). Consideriamo dapprima funzioni $f \in \mathcal{I}_{loc}$, non negative.

Definizione 1 Sia $f \in \mathcal{I}_{loc}$, $f \geq 0$. Allora

$$\int_{\mathbf{R}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \sup_{E\in\Sigma} \int_E f$$

ed f si dice integrabile in senso improprio (o generalizzato, o a integrale convergente) su $\mathbf{R}$ se tale sup é finito e scriveremo

$$f \quad \text{é a integrale convergente su } \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{R}} f < +\infty$$

Siccome la funzione di insieme $\Sigma \ni E \to \int_E f$ é, se $f \geq 0$, monotona, nel senso che

$$A, B \in \Sigma,\ A \subset B \quad \Rightarrow \quad \int_B f = \int_{B\setminus A} f + \int_A f \geq \int_A f$$

le funzioni $R \to \int_{-R}^{R} f$, $R \to \int_0^R f$, $R \to \int_{-R}^{0} f$, sono non decrescenti e quindi ammettono limite e

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

E ció perché $E \in \Sigma \Rightarrow \exists R = R(E) : E \subset [-R, R] \Rightarrow \int_E f \leq \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f \Rightarrow \sup_{E\in\Sigma} \int_E f \leq \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f$. La diseguaglianza opposta é ovvia. Dunque

Proposizione 1 f é a integrale convergente sse

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} f < +\infty$$

Definizione 2 Sia f integrabile su $[a,b]$ $\forall b \geq a$ (risp. su $[a,b]$ $\forall a \leq b$).
Diremo che f é integrabile a $+\infty$ se $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f < +\infty$.

Diremo che f é integrabile a $-\infty$ se $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^b f < +\infty$.

La Prop 1 dice allora che f é integrabile su $\mathbf{R}$ sse é integrabile a piú e a meno infinito.

ESEMPI.

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \pi.$

b) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é a integrale convergente in $[1,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$, giacché

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1} \qquad se \quad \alpha > 1$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad se \quad \alpha < 1$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

c) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n!$ d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{1}{n}$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(s)ds = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$

f) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2 x\, dx = \frac{2}{5}$, $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\cos x}{x^2}|dx \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$

L'integrale di Gauss: $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cominciamo con la diseguaglianza elementare

$$(*) \qquad 1-x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}, \qquad \forall x \geq 0$$

La diseguaglianza di sinistra dice che il grafico della funzione (convessa) : e^{-x} sta sopra la sua retta tangente in $(0,1)$.
La diseguaglianza di destra dice che il grafico della funzione (convessa) : e^{x} sta sopra la sua retta tangente in $(0,1)$.

Sostituendo x con x^2 in $(*)$, elevando alla n ed integrando, si ottiene

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \;\leq\; \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \;\leq\; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Effettuando il cambio di variabile $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ in $\int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$, otteniamo

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx \;\leq\; \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \;\leq\; \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ricordiamo che $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \;+\; \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Inoltre, effettuando il cambio di variabile $x = \cos t$, otteniamo

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt \;=\; \frac{2\,\ldots 2n}{3\,\ldots(2n+1)} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \;+\; \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Wallis. Riassumendo:

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} \;+\; \circ(1) \;\leq\; \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \;\leq\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n\pi}{2n+1}} \;+\; \circ(1)$$

Passando al limite per n tendente all'infinito si ottiene $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Teorema del Confronto. Siano f, g localmente integrabili e non negative.

(i) $\exists R \geq a :\; f(x) \;\leq g(x) \;\; \forall x \geq R,\;\; \int\limits_a^{+\infty} g \;<\; +\infty \;\;\Rightarrow\;\; \int\limits_a^{+\infty} f \;<\; +\infty$

(ii) $\exists R \geq a :\; g \;\leq f \;\; \forall x \geq R,\;\; \int\limits_a^{+\infty} g \;=\; +\infty \;\;\Rightarrow\;\; \int\limits_a^{+\infty} f \;=\; +\infty$

Prova. (i) $\int\limits_R^x f \leq \int\limits_R^x g \;\;\Rightarrow\;\; \sup\limits_{x\geq R} \int\limits_R^x f \;\leq\; \int\limits_R^{+\infty} g \;<\; +\infty$

(ii) Analogo: $\int\limits_a^{+\infty} g \;=\; +\infty \;\;\Leftrightarrow\;\; \sup\limits_{x\geq a} \int\limits_a^x g \;=\; +\infty \;\;\Rightarrow \sup\limits_{x\geq a} \int\limits_a^x f \;=\; +\infty$ perché $f \geq g$ per x grande e quindi $\int\limits_a^{+\infty} f \;=\; +\infty$

Dal Teorema del confronto e dall'Esempio b), seguono subito

Corollario A.

(i) $\exists M, R > 0,\ \alpha > 1:\ \ f(x) \le \frac{M}{x^\alpha}\ \ \forall\, x \ge R\ \ \Rightarrow\ \ f$ é integrabile in $[a, +\infty)$

(ii) $\exists M, R > 0:\ \ f(x)\ \ge\ \frac{M}{x},\ \ \forall\ x \ge R\ \ \Rightarrow\ \ \int\limits_a^{+\infty} f\ =\ +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

Sia $f \in C([a, +\infty)$. Allora

(i) $\exists \alpha > 1:\ \ x^\alpha |f(x)|\ \ \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ c\ <\ +\infty\ \ \Rightarrow\ \ f$ integrabile in $[a, +\infty)$.

(ii) $x|f(x)|\ \ \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ c\ >\ 0\ \ \Rightarrow\ \ \int\limits_a^{+\infty} |f|\ =\ +\infty$

(i) Infatti, : $x^\alpha |f(x)|\ \ \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ c\ <\ +\infty\ \ \Rightarrow |f(x)| \le \frac{2c}{|x|^\alpha}$ per $x \ge x_c$. Siccome $\alpha > 1$, $f = f[\chi_{[x_c,+\infty)} + \chi_{[a,x_c]}]$ é integrabile in $[a, +\infty)$. Analogamente per (ii).

Condizione di Cauchy per l' integrabilitá.

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f \ \text{ esiste finito } \Leftrightarrow \left[\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon:\ x_\epsilon \le x_1 \le x_2 \Rightarrow \int\limits_{x_1}^{x_2} f\ \le \epsilon\ \right]$$

Infatti, se $F(x) := \int\limits_a^x f$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ esiste finito sse $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon$: $x_\epsilon \le x_1 \le x_2 \Rightarrow \int\limits_{x_1}^{x_2} f = F(x_2) - F(x_1) \le \epsilon$.

Integrali impropri (per funzioni localmente limitate).

Sia $f\chi_{[a,+\infty)}$ localmente integrabile, di modo che é definita in $[a, +\infty)$ la funzione integrale $F(x) := \int\limits_a^x f$. Diremo che f é **integrabile in senso improprio** (o generalizzato) **se esiste finito** $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f$.

Notiamo che, in generale, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f$ non esisterá. Ció accade, ad esempio, se $f(x) = \sin x$. Come sopra si ottiene la caratterizzazione dell'integrabilitá

Condizione di Cauchy per l' integrabilitá.

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f \ \text{ esiste finito } \Leftrightarrow \left[\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon:\ x_\epsilon \le x_1 \le x_2 \Rightarrow |\int\limits_{x_1}^{x_2} f|\ \le \epsilon\ \right]$$

Per stabilire se una data f é a integrale convergente su un intervallo illimitato si puó ricorrere al criterio del confronto, applicato a $|f|$. Conviene prima dare una definizione e un Teorema:

Definizione di assoluta integrabilitá.

Diremo che f é **assolutamente integrabile** in $[a, +\infty)$ se $\int\limits_a^{+\infty} |f| < +\infty$.

Teorema: Assoluta integrabilitá implica integrabilitá.

Segue da Cauchy: $x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad |\int\limits_{x_1}^{x_2} f| \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} |f|$.

...ma si vede anche cosí: $\int\limits_a^{+\infty} |f| = \int\limits_a^{+\infty} f^+ + f^- < \infty \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} f^{\pm} < \infty \quad \Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^{x} f^+ - f^- = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^{x} f^+ - \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^{x} f^- = \int\limits_a^{+\infty} f^+ - \int\limits_a^{+\infty} f^-$.

Teorema del Confronto.

(i) $\exists R \geq a: \ |f(x)| \leq g(x) \ \ \forall x \geq R, \quad \int\limits_a^{+\infty} g < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} |f| < +\infty$

(ii) $\exists R \geq a: \ 0 \leq g \leq f \ \ \forall x \geq R, \quad \int\limits_a^{+\infty} g = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} f = +\infty$

Prova. (i) $\int\limits_R^{x} |f| \leq \int\limits_R^{x} g \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_{x\geq R} \int\limits_a^{x} |f| \leq \int\limits_a^{+\infty} g < +\infty$

(ii) Analogo: $\int\limits_a^{+\infty} g = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup\limits_{x\geq a} \int\limits_a^{x} g = +\infty \quad \Rightarrow \sup\limits_{x\geq a} \int\limits_a^{x} f = +\infty$ perché $f \geq g$ per x grande e quindi $\int\limits_a^{+\infty} f = +\infty$

Dal Teorema del confronto e dall'Esempio b), seguono subito

Corollario A.

(i) $\exists M, R > 0, \ \alpha > 1: \ |f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha} \ \ \forall\, x \geq R \ \Rightarrow \ |f|$ é integrabile in $[a, +\infty)$

(ii) $\exists M, R > 0: \ |f(x)| \geq \frac{M}{x}, \ \ \forall\ x \geq R \ \Rightarrow \ \int\limits_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

Sia $f \in C([a,+\infty)$. Allora

(i) $\exists \alpha > 1 :\ x^\alpha |f(x)| \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ c\ <\ +\infty\ \ \Rightarrow\ f$ integrabile in $[a,+\infty)$.

(ii) $x|f(x)| \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ c\ >\ 0\ \ \Rightarrow\ \int\limits_a^{+\infty} |f|\ =\ +\infty$

(i) Infatti, : $x^\alpha |f(x)| \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ c\ <\ +\infty\ \ \Rightarrow |f(x)| \le \frac{2c}{|x|^\alpha}$ per $x \ge x_c$. Siccome $\alpha > 1$, $f = f[\chi_{[x_c,+\infty)} + \chi_{[a,x_c]}]$ é integrabile in $[a,+\infty)$. Analogamente per (ii).

Quanto sopra mostra come sia importante, per l'integrabilitá di f, quella di f^+ ed f^- (e quindi quella di $|f|$!): se, viceversa, $\int\limits_a^{+\infty} f^+ = \int\limits_a^{+\infty} f^- = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^+ - f^- = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^+ - \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^-$ si presenta come limite in forma indeterminata, e quindi non esisterá, in generale. Tuttavia, puó accadere che $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f$ esista finito anche se $\int\limits_a^{+\infty} f^+ = \int\limits_a^{+\infty} f^- = +\infty$ (e quindi anche senza che f sia assolutamente integrabile).

ESEMPIO 1. Sia

$$f(x)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\ \chi_{[n,n+1)}(x)$$

(cioé f é la funzione che vale $\frac{(-1)^n}{n+1}$ in $[n,n+1)$). Allora

$$\int\limits_0^\infty f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

(serie convergente) perché, se $x > 1$ e $[x]$ é la parte intera di x,

$$\int\limits_0^x f\ =\ \int\limits_0^{[x]} f\ +\ \int\limits_{[x]}^x f\ =\ \sum_{n=0}^{[x]-1} \frac{(-1)^n}{n+1}\ + \circ(1)$$

($|\int\limits_{[x]}^x f\,| \le \frac{1}{1+[x]} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0$!).

Poi, chiaramente, $\int\limits_0^\infty |f| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$.

Dunque f é integrabile su $[0,+\infty)$ ma non assolutamente integrabile.

ESEMPIO 2. (**Integrale di Dirichlet**) Sia $f(x) := \frac{\sin x}{x}\chi_{(0,+\infty)}$. Allora

(i) $\int\limits_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt \; = \; +\infty$ (ii) $\exists I := \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \in (0,+\infty)$ (infatti $I = \frac{\pi}{2}$).

Prova di (i). Sia $I_1 := [\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$, $I_n := I_1 + (n-1)\pi$, $\sin x \; \geq \frac{1}{2} \; \forall x \in I_n, \forall n$. É $l(I_n) = \frac{2}{3}\pi \;\; \forall n \in \mathbf{N}$ e $|\frac{\sin x}{x}| \; \geq \; \frac{1}{2n\pi}$, $\forall x \in I_n$. Dunque, per ogni n,

$$\int\limits_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt \; \geq \; \int\limits_0^{n\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j\pi}\chi_{I_j}(t)dt \; \geq \; \frac{2}{3}\pi \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j\pi} \; \to_n \; +\infty$$

Prova di (ii). Integrando per parti

$$\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt \; = \; - \int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt - \; \frac{\cos t}{t}|_1^x \; \to \; - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt \; + \; \cos 1.$$

Poi, $\forall k \in \mathbf{N}$: $\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \; + \int\limits_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \; = \; \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} [\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t+\pi}]dt > 0.$

ESEMPIO 3. (**Integrali di Fresnel**)) Sia $f(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t^2)$. f é integrabile in senso improprio su tutto $\mathbf{R}$ perché, effettuando il cambio di variabile $\frac{\pi}{2}t^2 = s$, si trova

$$\int\limits_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

che ha limite (finito) per R che va all'infinito, come si vede effettuando una integrazione per parti. Di piú, tale limite é positivo. Infatti, usando il cambio $s := t - \pi$, si trova

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \lim_n \sum_{k=1}^n \left[\int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int\limits_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt \right] =$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \left[\int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\sin(s+\pi)}{\sqrt{s+\pi}}ds \right] = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin t \left[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right] dt$$

che é serie a termini positivi ed infatti convergente perché il termine k-esimo é maggiorato da $\frac{1}{k\sqrt{k}}$. Siccome f é pari, é anche $\int\limits_{-\infty}^0 \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt = \int\limits_0^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt$. Si puó piú precisamente provare che

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt = 2 \int\limits_0^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt = 1, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

INTEGRALI IMPROPRI PER FUNZIONI NON LIMITATE
e/o
SU INTERVALLI NONLIMITATI

Sia $a \geq -\infty$, f integrabile in $(a, b-\delta]$ per ogni δ piccolo. f si dice integrabile in senso improprio (o in senso generalizzato) in $(a, b]$ se

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f \quad \text{esiste finito, e} \qquad \int_a^b f := \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$$

é l'integrale improprio (o in senso generalizzato) di f su $[a, b]$.
Definizione analoga di $\int_a^b f$ se f é integrabile in $[a+\delta, b)$, $b \leq +\infty$ per ogni δ piccolo.
Poi, dato un intervallo aperto (eventualmente illimitato, superiormente e/o inferiormente) I, $x_0 \in I$, f integrabile in $(\inf I, x_0 - \delta]$ ed in $[x_0 + \delta, \sup I)$ per ogni δ piccolo, diremo che f é integrabile in senso improprio su I se lo é in $(\inf I, x_0]$ ed in $[x_0, \sup I)$ e scriveremo

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f := \int_{\inf I}^{x_0} f + \int_{x_0}^{\sup I} f$$

Se $f \geq 0$ l'integrale di f, definito con il procedimento di limite come sopra, esiste ma potrá essere infinito. L'integrabilitá di f consiste in tal caso nella finitezza dell'integrale $\int_{\inf I}^{\sup I} f$ e diremo dunque che f é integrabile sse $\int_{\inf I}^{\sup I} f < +\infty$.

Definizione di assoluta integrabilitá. Data $f : I \to \mathbf{R}$, f si dice assolutamente integrabile (in senso generalizzato) sull'intervallo (eventualmente aperto e/o illimitato) I se e solo se

$$\int_{\inf I}^{\sup I} |f| < +\infty$$

ESEMPI .

a) $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t|^\alpha} = +\infty \quad \forall\, \alpha$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$ Infatti, $\int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{\delta}}^{\sqrt{R}} \frac{2dt}{(1+t^2)} =$
$2(\arctan\sqrt{\delta} - \arctan\sqrt{R}) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} := \lim_{\delta \to 0}(\lim_{R \to +\infty} \int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}) = \pi.$

Proposizione (condizione di Cauchy).

(i) $\int\limits_a^b |f| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : \ b - \delta \le x_1 < x_2 < b \Rightarrow \int\limits_{x_1}^{x_2} |f| \le \epsilon$

(ii) $\int\limits_a^b f$ esiste $\quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : \ b - \delta \le x_1 < x_2 < b \Rightarrow |\int\limits_{x_1}^{x_2} f| \le \epsilon$

Dimostrazione. (i) É la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente a b da sinistra, di $F(x) := \int\limits_a^x |f|$ giacché $F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} |f|$.

(ii) Come in (i)

Come giá visto, dalla condizione di Cauchy deriva che

Corollario. Se f é assolutamente integrabile allora é anche integrabile (ma non viceversa!).

Teorema del Confronto.

(i) $\exists\delta > 0 : \ |f(x)| \le g(x) \ \ \forall x \in [b - \delta, b), \ \int\limits_a^b g < +\infty \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b |f| < +\infty$

(ii) $\exists\delta > 0 : \ f(x) \ge g(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [b - \delta, b), \ \int\limits_a^b g = +\infty \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b |f| = +\infty$

Corollario A. Sia f integrabile in $[a, x], \ \ \forall x < b$.

(i) $\exists M, \delta > 0, \ \alpha < 1 : \ |f(x)| \le \frac{M}{|x-b|^\alpha} \ \ \forall\, x \in [b - \delta, b) \ \Rightarrow \ f$ é integrabile in $[a, b]$

(ii) $\exists M, \delta > 0, : \ |f(x)| \ge \frac{M}{|x-b|} \ \ \forall\, x \in [b - \delta, b) \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b |f| = +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\exists\alpha < 1 : \ |x - b|^\alpha |f(x)| \to_{x\to+\infty} c < +\infty \ \Rightarrow \ f$ integrabile

(ii) $: \ |(x - b)\, f(x)| \to_{x\to+\infty} c > 0 \ \Rightarrow \ \int\limits_a^{+\infty} |f| = +\infty$

APPENDICE

1) **Una variante nel calcolo dell'integrale di Gauss:**

$$(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx)^2 = (\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt)^2 \overset{!?!}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x)\, \sqrt{x}} = \pi$$

La prima uguglianza segue dalla paritá e dal cambio $x^2 = t$. Per vedere la seconda, osserviamo che, usando il cambio $\quad t := \tau\theta, \quad$ troviamo che $\quad \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right)^2 =$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right) d\tau \overset{t:=\tau\theta}{=} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta\right) d\tau = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau(1+\theta)}}{\sqrt{\theta}} d\theta\right) dt$$

$$\overset{?FUBINI?}{=} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau(1+\theta)}}{\sqrt{\theta}} d\tau\right) d\theta = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau(1+\theta)} d\tau\right) d\theta = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\theta}{(1+\theta)\sqrt{\theta}}$$

c) $\quad f_\alpha(x) = \frac{\sin(\log^2 t)}{t^\alpha}, \quad t \in (0,1] \quad$ é $\quad$ assolutamente integrabile se $\alpha < 1$, integrabile se $\alpha = 1$, $\quad$ e $\quad \int\limits_0^1 |f_\alpha| = +\infty$ se $\alpha \geq 1$.

Infatti, effettuando il cambio $\log^2 t = x$, l'integrale (su $[\epsilon, 1]$) diventa $\int\limits_0^{\log^2 \epsilon} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{(\alpha-1)\sqrt{x}} dx.$ Se $\alpha < 1$, il decadimento esponenziale assicura assoluta integrabilitá. Se $\alpha = 1$, si vede che il limite, per ϵ che va a zero, esiste finito, mentre $\int\limits_0^\infty |\frac{\sin x}{\sqrt{x}}| dx = +\infty$ (argomentare come per $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$). A maggior ragione, $\int\limits_0^1 |f_\alpha| = +\infty$ se $\alpha > 1$.

2. $\int_0^\infty |\sin(x^2)| dx = +\infty$. $\quad$ Infatti, posto $\quad I_j = [\sqrt{(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{j\pi}, \quad$ risulta

$$\int_0^\infty |\sin(x^2)| dx \geq \int_{\cup_{j=1}^n I_j} |\sin(x^2)| dx = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} |\sin(x^2)| dx \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Ma $\quad x \in I_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sin(x^2), \quad (\sin(x)^2)'' = 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) \leq 0 \quad \forall x \in I_j$ se n é pari,
e $\quad x \in I_j \quad \Rightarrow \quad 0 \geq \sin(x^2), \quad (-\sin(x)^2)'' = -2\cos(x^2) + 4x^2 \sin(x^2) \leq 0 \quad \forall x \in I_j$ $\quad$ se n é dispari $\quad$ ovvero $\quad |\sin(x^2)| \quad$ é concava in I_j e quindi il grafico di $|\sin(x^2)| : \quad x \in I_j$, stá al di sopra del segmento che unisce i due punti di tale grafico, $(\sup I_j, 0)$ e $(\sqrt{(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}}, 1)$ e quindi il sottografico di $|\sin(x^2)| : \quad x \in I_j$ contiene il triangolo di vertici $(\sqrt{(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}}, 0), \quad (\sqrt{(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}}, 1)$ e $(\sup I_j, 0) \quad$ e quindi

$$\int_{I_j} |\sin(x^2)| dx \geq \frac{1}{2} l(I_j) = \frac{1}{2}[\sqrt{j\pi} - \sqrt{(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}}] = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{\sqrt{j\pi} + \sqrt{(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}}}] = O(\frac{1}{\sqrt{j}})$$

e quindi la serie, e quindi l'integrale, divergono.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)dx$ esiste perché la funzione integranda decade esponenzialmente a $-\infty$ mentre l'integrabilitá a $+\infty$ si vede effettuando il cambio di variabile $e^x = t$ che trasforma $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)dx$ in $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}$.
Esattamente come sopra si vede che l'integrale $\int_0^\infty |\sin(e^x)|dx = +\infty$.