AM120-2014 Settimana 5

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

Sia $f \in C^\infty((a,b))$, $\quad (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$. Sia $h := x - x_0$.

SERIE DI TAYLOR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \qquad x \in \mathbf{R}$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0.

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR, ANALITICITÁ

f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r > 0 : \quad f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n, \qquad \forall h \in (-r, r)$$

f si dice **analitica in** (a,b) se é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad ogni $x_0 \in (a,b)$.

NOTA. $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $\quad f(0) = 0 \quad$ é $C^\infty(\mathbf{R})$ ma non é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad $x_0 = 0 \quad$ perché $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

ESEMPIO 1 $\quad f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$
serie di Mac Laurin (cioé di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$) perché $\quad f^{(n)}(0) = n!$
Notiamo che il resto n-esimo nella formula di Taylor (di punto iniziale zero) é $R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \to_n 0 \quad \forall x \in (-1,1)$.

Quindi $\qquad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad \forall x \in (-1,1)$

ESEMPIO 2. $\quad \log(1-x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad$ per $\quad |x| < 1$

Notiamo che, per il criterio della radice, la serie di Taylor converge se $|x| < 1$. Che la serie abbia per somma la funzione data, segue derivando la formula di Taylor

$$-\log(1-x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n+1}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + R'_{n+1}(x) \qquad \forall x \in (-1,1)$$

e quindi $\quad R'_{n+1}(x) = \frac{x^n}{1-x} \to_n 0 \quad \forall x \in (-1,1) \quad$ Ora, se $|x| < 1$, per Lagrange, esiste ξ con $|\xi| < |x|$ tale che

$$|R_{n+1}(x)| \le |\frac{R_{n+1}(x)}{x}| = |R'_{n+1}(\xi)| = |\frac{\xi^{n+1}}{1-\xi}| \le |\frac{x^{n+1}}{1-x}| \to_n 0$$

La convergenza della serie di Taylor ad f segue allora da

Proposizione $\quad f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r > 0 : \quad R_n(x_0,h) \to_{n\to+\infty} 0 \ \forall h \in [-r,r]$.

Infatti $f(x_0+h) - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \ = \ R_N(x_0,h)$.

- **(criterio di sviluppabilitá)** In particolare, se $\exists r > 0, M_r > 0$:

$$\sup_{|h|\le r} |f^{(n)}(x_0+h)| \ \le \ \frac{M_r n!}{r^n} \quad \forall \ n \in \mathbf{N}$$

allora f é somma, per ogni $|h| < r$, della sua serie di Taylor centrata in x_0.
Infatti, $|R_n(x_0,h)| = |\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\bar{t}h)| \le \frac{M_r |h|^{n+1}}{r^{n+1}} \to_n 0$ se $|h| < r$.

ESEMPIO. La funzione $\ln x$ é sviluppabile in serie di potenze attorno ad ogni $x_0 > 0$, cioé é analitica in $\mathbf{R}^+$.
Infatti, siccome $\quad D^{n+1} \ln x = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \quad$ fissato $x_0 > 0$, risulta

$$|h| < \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad |D^n \ln(x_0+h)| = \frac{n-1!}{|x_0+h|^n} < (n-1)!(\frac{2}{x_0})^n$$

Quindi la serie di Taylor di $\ln x$ centrata in x_0 ha per somma $\ln x$ in $|x-x_0| < \frac{x_0}{2}$.
Nota. La serie di Taylor di $\ln x$ centrata in $x_0 > 0$, e data da $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-x_0)^n}{n x_0^n}$ converge in effetti se $|x-x_0| < x_0$. Vedremo che ció, insieme all'analiticitá di $\ln x$, implica che $\ln x$ coincide con la somma della sua serie di Taylor, centrata in x_0, in tutto l'intervallo in cui tale serie converge, cioé, in questo caso, in $|x-x_0| < x_0$.

- **(criterio di analiticitá)** In particolare, se $\exists M, r > 0$ tali che:

$$|f^{(n)}(x)| \ \le \ \frac{M n!}{r^n} \quad \forall \ n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in (a,b) \qquad e \quad (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b), \delta \le r$$

allora $\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad$ cioé f é analitica in (a,b).

• **(criterio di 'interezza')** Se per ogni $r > 0$ esiste $M_r > 0$ tale che

$$\max_{|x|\le r} |f^{(n)}(x)| \le M_r \quad \forall n$$

allora f é **intera**, cioé é somma della sua serie di Mac Laurin su tutto $\mathbf{R}$.

Infatti, $|x| \le r \;\Rightarrow\; |R_n(x)| \le \frac{r^{n+1}}{n+1!} \sup_{|x|\le r} |f^{(n+1)}(x)| \le \frac{M_r\, r^{n+1}}{n+1!} \to_n 0 \;\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie validi in tutto $\mathbf{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

SERIE BINOMIALE

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad \forall x \in (-1,1) \qquad (*)$$

Si ha, $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Siccome $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to |x|$ ove $a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)||x|^n}{n!}$, la serie converge per $|x| < 1$. Inoltre, $\forall r > 1$, $\exists c_r > 0 :$ $\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!} \le c_r r^n$ e quindi $0 < \delta < 1$, $\delta \le 1 + x < 2$, $\Rightarrow$

$$\Big|\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha\Big| \le \frac{max(\delta^\alpha, 2^\alpha)\, c_r\, r^n\, n!}{\delta^n} \quad \Rightarrow \quad (1+x)^\alpha \text{ é analitica in } (-1,1)$$

Dunque $(1+x)^\alpha$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno a $x_0 = 0$. Come vedremo, l'analiticitá piú la convergenza della serie di Taylor in $|x| < 1$ dá $(*)$. Di qui si ottiene anche che, per $x \in (-1,1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n-1!!}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n}$$

NOTA. In tutti gli esempi visti il resto converge a zero per tutti e solo gli h in un intervallo del tipo $|h| < r$. Non é un caso....

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots,\quad x \in \mathbf{R}$, chiameremo serie di potenze la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad\qquad (SP)$$

L'insieme delle x per cui (SP) converge é necessariamente un intervallo centrato nell'origine, detto intervallo di convergenza. Il suo raggio si chiama raggio di convergenza della serie.
Infatti, se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n$ converge, allora $|a_n x_0^n|$ é limitata e quindi

$$|x| < |x_0| \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;\le\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x_0^n|\, |\frac{x}{x_0}|^n \;\le\; \sup_n |a_n\, x_0^n| \;\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x}{x_0}|^n < +\infty$$

Dunque il raggio di convergenza é $\quad \sup\{|x| : \;\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad converge\}$.

Proposizione (Formula di Cauchy-Hadamard).

Il raggio di convergenza r di (SP) é dato dalla formula

$$r \;=\; \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$(\frac{1}{0} \;:=\; +\infty,\;\; \frac{1}{\infty} \;:=\; 0)$. $\quad$ Infatti

$$|x| \;<\; r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;<\; +\infty, \qquad\qquad |x| \;>\; r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;=\; +\infty$$

Ció segue subito dal criterio della radice:

$$|x|\; \limsup_n\, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_n\, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;<\; 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;<\; +\infty$$

$$|x|\; \limsup_n\, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_n\, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;>\; 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;=\; +\infty$$

Dunque $\{|x| < r\}$ é l' intervallo di convergenza.

NOTA. $\exists\, r := \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \;\Rightarrow\; |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; r$ é raggio di convergenza.
Ad esempio, la serie di Mac Laurin di $\frac{1}{1-x}$, di $\log(1+x)$, di $(1+x)^{\alpha}, \alpha \notin \mathbf{N}$ hanno raggio di convergenza 1 (é utile ricordare che $n^{\frac{1}{n}} \to_n 1$).

ESEMPI (di serie di potenze).

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^\alpha\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}.$$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$ (serie di Mac Laurin di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$). Ha raggio di convergenza 1 (come tutte le serie binomiali).

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.
In (3) :
se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$
Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$ (Leibnitz)
se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.

In (4) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\ \frac{1}{e^n} = +\infty$ perché, da

$$n! = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\left(\sqrt{2\pi} + O(\frac{1}{n})\right) \qquad \textbf{(formula di Stirling)}$$

segue $\frac{n^n}{n!\, e^n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} + \circ(\sqrt{n})}$. Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ (Leibnitz).

In (5) : siccome

$$\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

la serie converge in $x = 1$ (criterio di Leibnitz) mentre in $x = -1$ diverge perché, per Stirling,

$$\frac{2n-1!!}{2n!!} = \frac{2n!}{(2n!!)^2} = \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Proposizione. Sia $r > 0$ il raggio di convergenza di $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Allora

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\ [a_n\, x^n] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n x^{n-1}$$

NOTA $\quad \limsup |n\, a_n|^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ e quindi le 'serie derivate' (ovvero le 'serie delle derivate') $\quad D^k f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} D^k(a_n x^n) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$ hanno lo stesso raggio di convergenza della serie data.

Prova. Sia $\; f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < r.$ Essendo le due serie assolutamente convergenti per ogni $|x| < r$, si ha

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \right| =$$

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n\, x^{n-1} \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}}{h} \right|$$

Dal binomio di Newton, ed effettuando il cambio di indici $m := n-2$, $j := k-2$, troviamo

$$\left| (x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} \right| =$$

$$= \left| x^n + nx^{n-1}h + h^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!\; n-k!}\, x^{n-k}\, h^{k-2} - (x^n + nhx^{n-1}) \right|$$

$$= h^2 \left| \sum_{j=0}^{m} \frac{m+2!}{j+2!\; m-j!}\, x^{m-j}\, h^j \right| = h^2 \left| \sum_{j=0}^{m} \frac{(m+2)(m+1)m!}{(j+2)(j+1)j!\; m-j!}\, x^{m-j}\, h^j \right| \leq$$

$$h^2 n(n-1) \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!\; m-j!}\, |x|^{m-j}\, |h|^j = h^2 n(n-1)(|x| + |h|)^{n-2}$$

Dunque, se $|x| + |h| < r$, e quindi $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1)(|x| + |h|)^{n-2} < +\infty$, troviamo

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1)(|x| + |h|)^{n-2} \to_{h\to 0} 0$$

Corollario Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Allora, se $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad |x| < r$, si ha che $\quad f \in C^\infty((-r,r)) \quad$ e $\quad f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ é la serie di Mac Laurin di f. Inoltre

$$D^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, a_{j+k}\, x^j$$

ESEMPIO $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j \;=\; \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1)$

PROPRIETÁ DELLE FUNZIONI ANALITICHE

Come giá detto, $f \in C^\infty((a,b))$ é analitica in (a,b) se é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad ogni $x_0 \in (a,b)$:

$$\forall x_0 \ \in I, \ \exists\, r = r(x_0): \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Ricordiamo che

Proposizione Se $f \in C^\infty((a,b))$ é tale che

$$\exists\ M,\ r > 0: \qquad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \le \frac{Mn!}{r^n} \ \ \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a,b)$$

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \ \ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \ \ \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \ \text{in}(a,b)$$

Prova. Posto $h(x) := f(x) - g(x)$, si tratta di provare che

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \ \ h^{(n)}(x_0) = 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad h \equiv 0 \ \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : h(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b: \ h(t) = 0 \quad \forall t \in [x_0, x]\} \ \ge \ x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow h \equiv 0$ in $[x_0, x] \Rightarrow h^{(n)}(x) = 0$ in $[x_0, b')$, $\forall n$. Se fosse $b' < b$, sarebbe, per continuitá, $h^{(n)}(b') = 0 \ \ \forall n$ e quindi $h \equiv 0$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Corollario Sia f analitica in I. Sia $(a,b) \subset I \subset (a', b')$. Allora

(i) (continuazione unica) $f \equiv 0$ in $(a,b) \quad \Rightarrow f \equiv 0$ in I

(ii)(unicitá del prolungamento analitico) Se f_1, f_2 sono analitiche in (a', b') e $f_1 \equiv f \equiv f_2$ in I (cioé f_1, f_2 sono prolungamenti analitici di f ad (a', b')) allora $f_1 \equiv f_2$ in (a', b').

Zeri di funzioni analitiche

Una funzione analitica in (a, b) e non identicamente nulla, ha, in (a, b), solo zeri isolati.

Prova. Supponiamo che esistano $x_n \in (a, b)$ zeri di f e tali che $x_n \to x_0 \in (a, b)$. Per continuitá, $f(x_0) = 0$. Inoltre, per Rolle, esiste x'_n tra x_n e x_{n+1} tale che $f'(x'_n) = 0$. Per la continuitá di f', si ha che é anche $f'(x_0) = 0$. Iterando il ragionamento, si conclude che $f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Dal principio di identitá segue allora che $f \equiv 0$ in (a, b).

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica

Prova. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r} =< \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists\ \overline{k} : \qquad |a_{j+k}| \leq \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $\qquad f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} (x - x_0)^j \qquad$ segue

$$|x - x_0| \leq \underline{r} \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1, 1), \quad$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{\overline{r}^k (1 - \underline{r}\ \overline{r}^{-1})^{k+1}} = \frac{\overline{r}\ k!}{(\overline{r} - \underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \geq \overline{k}, \ |x| \leq \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Corollario

Se f é analitica in (a, b) e la sua serie di Taylor di punto iniziale x_0 ha raggio di convergenza $r > 0$, allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$