I Esonero di AM110 - 30/10/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

Per $n = 1$ la disuguaglianza vale. Se vale per n, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n+1}$$

poiché

$$\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dal Principio di Induzione segue che la disuguaglianza vale per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio 2

Dai limiti notevoli ed usando il Teorema del confronto, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3+1)}{\log(2n^5-6)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\log n + \log(1+\frac{1}{n^3})}{5\log n + \log(2-\frac{6}{n^5})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3 + \frac{\log(1+\frac{1}{n^3})}{\log n}}{5 + \frac{\log(2-\frac{6}{n^5})}{\log n}} = \frac{3}{5}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{8^n+n^2} - \sqrt[3]{8^n+n}} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2-n}{(8^n+n^2)^{\frac{2}{3}} + (8^n+n^2)^{\frac{1}{3}}(8^n+n)^{\frac{1}{3}} + (8^n+n)^{\frac{2}{3}}}} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2-n}{(1+\frac{n^2}{8^n})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{n^2}{8^n})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{n}{8^n})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{n}{8^n})^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

in vista di $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

Esercizio 3

Risolvendo la disequazione $(\ln x)^3 - 2\ln x = \ln x[(\ln x)^2 - 2] \le 0$, si ottiene che

$$E = (0, e^{-\sqrt{2}}] \cup [1, e^{\sqrt{2}}],$$

e quindi $\inf E = 0$, $\sup E = \max E = e^{\sqrt{2}}$.

Siccome $\frac{2}{m} - \frac{1}{n^2} > -\frac{1}{n^2} \ge -1$ e (per $n = 1$) $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{2}{m} - 1 = -1$ otteniamo che $\inf F = -1$. Similmente, da $\frac{2}{m} - \frac{1}{n^2} < \frac{2}{m} \le 2$ e (per $m = 1$) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n^2} = 2$ otteniamo che $\sup F = 2$.