Appello B di AM110 - 5/2/2014 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $2\cos(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) = \sin(\frac{2}{n})$ basta studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{2}{n}).$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}} = 1$$

abbiamo che la serie dei moduli diverge, e quindi la serie di partenza non converge assolutamente. Poiché $\sin(\frac{2}{n})$ è infinitesima e decrescente, otteniamo invece la convergenza semplice della serie dal criterio di Leibnitz.

Esercizio 2 Poiché $a_{n+1} \geq a_n$ equivale a $(a_n - 1)^2 \geq 0$, che è sempre valida, otteniamo che la successione a_n è crescente, ed ammette quindi sempre limite l. Se l è finito, risolve l'equazione $l = 1 - l + l^2$, ossia $l = 1$. Siccome per $0 \leq \alpha \leq 1$ per induzione si puó mostrare che $a_n \leq 1$, allora a_n deve tendere a 1 per $n \to +\infty$. Se $\alpha > 1$, la successione non puó tendere a 1 e quindi tende a $+\infty$.

Esercizio 3 Per il primo limite abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{n!(n+1)^n\sin(\frac{7n}{(n+1)!})}{2^n+(n+2)^n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{7n}{n+1}(\frac{n+1}{n+2})^n\frac{1}{1+(\frac{2}{n+1})^n}\frac{\sin(\frac{7n}{(n+1)!})}{\frac{7n}{(n+1)!}}\\
&= 7\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}} = \frac{7}{e}
\end{aligned}$$

dalla definizione di e e dal limite notevole del seno in vista di $\frac{7n}{(n+1)!} \to 0$ per $n \to +\infty$. Per il secondo limite abbiamo che

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{\log(2-\cos x)}{x(\sqrt{\ln^2 x+1}-1)\sin x}} = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{\log(2-\cos x)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}\frac{|\ln x|}{\sqrt{\ln^2 x+1}-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

dai limiti notevoli del seno, coseno e logaritmo e da $\ln x = -|\ln x|$ per $x > 0$ piccolo.

Esercizio 4 Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0}\frac{(\sin(2x)-\sin x+3\tan x)(1-\cos x)}{(\tan^2 x+x^3)(e^x-1)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-\sin x+3\tan x}{x}\frac{1}{\frac{\tan^2 x}{x^2}+x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x}{e^x-1}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-\sin x+3\tan x}{x} = 2
\end{aligned}$$

dal limite notevole del seno, coseno ed esponenziale, mentre

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\sin(2x) - \sin x + 3\tan x)(1-\cos x)}{(\tan^2 x + x^3)(e^x - 1)} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2\cos^2 x - \cos x + 3}{\tan x + \frac{x^3}{\tan x}} = 0$$

poiché $\tan x \to +\infty$ per $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \beta\frac{\pi}{2} + 1$, otteniamo che f è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta = -\frac{2}{\pi}$. Avendo f un asintotico obliquo a $\pm\infty$, otteniamo che f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.