AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sulla topologia di $\mathbb{R}$

Esercizio svolto 1. Sia A un insieme al più numerabile. Dimostrare che A non può essere aperto. È necessariamente chiuso?

Soluzione.
A non può essere aperto, anzi deve avere parte interna vuota: $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$. Infatti, se $a \in \mathrm{Int}(A)$, allora dovrebbe esistere un intorno di a tutto contenuto dentro A: $\exists\, r > 0$ tale che $(a-r, a+r) \subset A$. Ma la cardinalità dell'intervallo $(a-r, a+r)$ è più che numerabile, quindi non può essere contenuto in A (che stiamo assumendo essere al più numerabile).

Osserviamo che A non è necessariamente chiuso. Ad esempio: se $A = \mathbb{Q}$, allora la sua chiusura è tutto $\mathbb{R}$. Oppure, se $A = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$, allora 0 è un punto di accumulazione per A, ma non appartiene ad A (che quindi non può essere chiuso, altrimenti conterrebbe tutti i suoi punti di accumulazione).

Si può dimostrare facilmente che se A è finito, allora è chiuso.

Esercizio svolto 2. Si consideri l'insieme

$$E := \{\sqrt{n} - \sqrt{m} : \ n, m \in \mathbb{N}\}.$$

(*i*) Calcolare l'estremo superiore ed inferiore di E.
(*ii*) E è aperto? Trovarne la parte interna.
(*iii*) E è chiuso? Trovarne la chiusura.

Soluzione.

(*i*) Ovviamente $\sup E = +\infty$ e $\inf E = -\infty$.
(*ii*) E non può essere aperto, in quanto numerabile (si veda esercizio precedente). Inoltre, per quanto detto prima, ha parte interna vuota.
(*iii*) Dimostriamo ora che E non è chiuso. In particolare, vogliamo dimostrare che la sua chiusura è tutto $\mathbb{R}$ (notare che questo implica che ogni numero reale si può approssimare arbitrariamente bene con differenze di radici di interi).
Sia $\varepsilon > 0$. Osserviamo che

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

quindi esiste un N_ε tale che $0 < \sqrt{N_\varepsilon + 1} - \sqrt{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Si osservi inoltre che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \left(\sqrt{k^2(n+1)} - \sqrt{k^2 n}\right) \in E.$$

Definiamo la successione di numeri reali $a_{\pm k} := \pm k(\sqrt{N_\varepsilon + 1} - \sqrt{N_\varepsilon}) \in E$ al variare di $k \in \mathbb{N}$. Si osservi che $0 < |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e che $\lim_{k \to \pm\infty} a_k = \pm\infty$. Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste k_0 tale che $x \in [a_{k_0}, a_{k_0+1}]$ e di conseguenza possiamo trovare un elemento di E (si scelga ad esempio a_{k_0} oppure a_{k_0+1}) a distanza minore di ε da x. Poichè ε può essere preso arbitrariamente piccolo, possiamo dedurre che ogni $x \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per E. E questo completa la dimostrazione.

Esercizio svolto 3. Dimostrare che ogni successione reale $\{a_n\}_n$ ammette una sotto-successione monotòna crescente o decrescente. Si deduca da ciò il teorema di Bolzano–Weierstrass.

Soluzione. Innanzitutto, diremo che a_N *è un "picco" della successione* se $a_N \geq a_n$ per ogni $n \geq N$.

Bisogna distinguere vari casi: i) esistono infiniti picchi della successione; ii) esiste un numero finito di picchi; iii) non esistono picchi. Osserviamo che tutte e tre le ipotesi possono presentarsi. Ad esempio, se la successione è decrescente, allora ogni elemento è un picco (caso i)); se la successione è strettamente crescente, allora non esistono picchi (caso iii)); è facile combinare i due casi per ottenere un esempio in cui ci sono solamente un numero finito di picchi (esercizio).

- Caso i): Denotiamo i picchi con $a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_k}, \ldots$, dove $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots$.
  Segue facilmente dalla definizione di picco che $a_{N_1} \geq a_{N_2} \geq \ldots \geq a_{N_k} \ldots$.
  Quindi $\{a_{N_k}\}_k$ è una sottosuccessione monotòna decrescente.

- Caso ii): Denotiamo i picchi con $a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_k}$, dove $N_1 < N_2 < \ldots < N_k$.
  Segue dalla definizione di picco che $a_{N_1} \geq a_{N_2} \geq \ldots \geq a_{N_k}$.
  Osserviamo ora che a_{N_k+1} non può essere un picco. Quindi esisterà $n_1 > N_k + 1 =: n_0$, tale che $a_{n_1} > a_{n_0}$. Allo stesso modo a_{n_1} non può essere un picco. Quindi esisterà $n_2 > n_1$, tale che $a_{n_2} > a_{n_1}$. E cosi' via... Concludendo, otteniamo una sottosuccessione $\{a_{n_j}\}_j$ che è monotòna (strettamente) crescente.

- Caso iii): È completamente analogo al caso ii). Basta scegliere $n_0 = 1$ e procedere come sopra.

Vediamo ora come dedurre il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Sia $\{a_n\}_n$ una successione limitata (superiormente ed inferiormente). Per il punto precedente, sappiamo che esiste una sottosuccessione monotòna $\{a_{n_j}\}_j$. Tale sottosuccessione è anch'essa limitata, quindi è convergente.

Esercizio svolto 4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme con cardinalità più che numerabile. Si dimostri che esiste $\{a_n\}_n \subset A$ convergente.

Soluzione. Osserviamo che A non è necessariamente limitato. Riscriviamo A nel seguente modo:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A \cap [n, n+1) =: \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n.$$

Possiamo concludere che almeno uno degli A_n deve avere cardinalità più che numerabile. Se così non fosse, infatti, si avrebbe un'unione numerabile di insieme con cardinalità al più numerabile; tale unione – cioè A – avrebbe cardinalità al più numerabile (contraddizione!).

Supponiamo che $A_{n_0} = A \cap [n_0, n_0 + 1)$ abbia cardinalità più che numerabile. Scegliamo una qualsiasi successione a valori in A_0. Segue dal teorema di Bolzano Weierstrass che tale successione ammette una sottosuccessione convergente. E questo conclude la dimostrazione.

Esercizio aggiuntivo 1[1]**.** Si può scrivere l'intervallo aperto $(0, 1)$ come unione disgiunta (eventualmente più che numerabile) di intervalli chiusi non degeneri (cioè, non costituiti da un solo punto) ?

[1] Un caffè in premio al primo che lo risolve.