AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sul Principio d'Induzione

Esercizio svolto 1. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $\alpha(n) := n^3 + 5n$ è divisibile per 6.

Soluzione. Dimostriamolo usando il Principio d'induzione. Per $n = 1$ si ha $\alpha(1) = 6$, che è chiaramente divisibile per 6. Quindi la base dell'induzione è verificata. Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n = k$ e dimostriamolo per $n = k + 1$. Osserviamo innanzitutto che

$$\alpha(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1) = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6 = \alpha(k) + 3k(k+1) + 6.$$

Quindi $\alpha(k + 1)$ è somma di tre termini tutti divisibili per 6. Infatti:

- $\alpha(k)$ è divisibile per 6 per l'ipotesi induttiva;
- $3k(k + 1)$ è divisibile per 6 in quanto è chiaramente divisibile per 3 ed almeno uno tra k e $k + 1$ deve essere pari.

Ne segue che $\alpha(k + 1)$ è divisibile per 6. In base al principio d'induzione $\alpha(n)$ è quindi divisibile per 6 per ogni $n \geq 1$.

Esercizio svolto 2. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $\beta(n) := 10^n - 1$ è divisibile per 9.

Soluzione. Dimostriamo questa affermazione usando il Principio d'induzione. Per $n = 1$ si ha $\beta(1) = 9$, che è chiaramente divisibile per 9. Quindi la base dell'induzione è verificata. Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n = k$ e dimostriamolo per $n = k + 1$. Osserviamo innanzitutto che

$$\beta(k+1) = 10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 = 10 \cdot (10^k - 1) + 9 = 10 \cdot \beta(k) + 9.$$

Segue dall'ipotesi induttiva che $\beta(k)$ è divisibile per 9, di conseguenza anche $\beta(k+1)$ lo è. In base al principio d'induzione, quindi, $\beta(n)$ è divisibile per 9 per ogni $n \geq 1$.

Esercizio svolto 3. Dimostrare che:

$$2^{n-1} \leq n! \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Soluzione. Dimostriamo questa affermazione usando il Principio d'induzione. Per $n = 1$ è chiaramente vera:

$$2^0 = 1 = 1!.$$

Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per $n = k$ e dimostriamolo per $n = k+1$. Infatti:

$$\begin{aligned} 2^{(k+1)-1} &= 2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \overset{(1)}{\geq} 2 \cdot k! \leq \\ &\overset{(2)}{\leq} (k+1) \cdot k! = (k+1)! \end{aligned}$$

dove in (1) abbiamo usato l'ipotesi induttiva ed in (2) il fatto che $2 \leq k+1$ (in quando $k \geq 1$).

Esercizio svolto 4. Sia $a \geq -1$. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+a)^n \geq 1 + na \qquad \forall n \geq 0.$$

Soluzione. Dimostriamola usando il Principio d'induzione. Per $n = 0$ la disuguaglianza è ovvia (è in realtà un'uguaglianza):

$$(1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot a.$$

Supponiamo ora che la disuguaglianza sia vera per $n = k$ e dimostriamo che rimane vera per $n = k+1$. Infatti:

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} &= (1+a) \cdot (1+a)^k \overset{(1)}{\geq} (1+a) \cdot (1+ka) = \\ &= 1 + ka + a + ka^2 \overset{(2)}{\geq} 1 + (k+1)a, \end{aligned}$$

dove in (1) è stata usata l'ipotesi induttiva ed in (2) il fatto che $ka^2 \geq 0$. In base al principio d'induzione, quindi, la disuguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$.

Domanda. Dove è stato usato il fatto che $a \geq -1$?

Esercizio aggiuntivo 1. Utilizzando la disuguaglianza dell'esercizio 4, dimostrare che:

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n} \qquad \forall\, n \geq 1 \quad \text{e} \quad x \in [1, +\infty).$$

Esercizio svolto 5. Dimostrare che ogni intero $n \geq 2$ può essere scritto come prodotto di uno o più primi.

Soluzione. Dimostriamo quest'affermazione usando il Principio d'induzione forte. Per $n = 2$ l'affermazione è vera, in quanto 2 è primo. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per ogni k compreso tra 2 ed n e dimostriamo che rimane vera per $n+1$. Dobbiamo distinguere due casi:

- se $n+1$ è primo, allora non c'è nulla da dimostrare;
- se $n+1$ non è primo, allora si può scrivere come prodotto di due fattori a e b, compresi tra 2 ed n:

$$n + 1 = a \cdot b \qquad a, b \in \{2, \ldots, n\}$$

(tale scomposizione non è ovviamente unica). Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva ad a e b:

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m_a} \qquad \text{e} \qquad b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_{m_b},$$

con $p_1, \ldots, p_{m_a}, q_1, \ldots, q_{m_b}$ primi; di conseguenza l'affermazione è vera per $n+1$:

$$n + 1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m_a} \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_{m_b}.$$

In base al principio d'induzione forte, è quindi vera per ogni $n \geq 2$.

Esercizio svolto 6. Sia $a \neq 1$. Dimostrare che vale la seguente uguaglianza (somma dei primi n termini di una progressione geometrica):

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Soluzione. Dimostriamo quest'affermazione usando il Principio d'induzione. Per $n = 0$ l'affermazione è ovviamente vera:

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = 1 = \frac{1 - a^1}{1 - a}.$$

Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per n e dimostriamo che rimane vera per $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \\ &= \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}. \end{aligned}$$

In base al principio d'induzione, tale formula è vera per ogni $n \geq 0$.

Esercizio svolto 7. Siano date n rette nel piano, con $n \geq 1$. Supponiamo che:

(i) siano a due a due non parallele;
(ii) siano a tre a tre non secanti in uno stesso punto.

Dimostrare che tali rette dividono il piano in $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioni.

Soluzione. Dimostriamo quest'affermazione usando il Principio d'induzione. Per $n = 1$ l'affermazione è ovviamente vera: una retta divide il piano in $\frac{1^2+1+2}{2} = 2$ regioni. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per n e dimostriamo che rimane vera per $n + 1$ rette. Partiamo da n rette che soddisfano le condizioni (i) e (ii); se a queste aggiungiamo una $(n + 1)$-esima retta, in modo che le condizioni (i) e (ii) rimangano soddisfatte, allora quest'ultima intersecherà le altre n rette in esattamente n punti. In particolare, si formeranno ulteriori $(n + 1)$ regioni nel piano. Quindi, al fine di dimostrare il nostro asserto, è sufficiente dimostrare la seguente identità:

$$\frac{n^2 + n + 2}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2}.$$

Un semplice conto mostra che è verificata.

Esercizio svolto 8. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$,

$$r_n := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}_{n \text{ volte}} \notin \mathbb{Q}.$$

Soluzione. Dimostriamolo usando il principio d'induzione. Per $n = 2$, troviamo $r_2 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Supposiamo ora che sia vero per n (cioè $r_n \notin \mathbb{Q}$) e dimostriamo per $n+1$. Osserviamo che:

$$r_{n+1} := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}_{(n+1) \text{ volte}} = \sqrt{1+r_n}.$$

Se per assurdo r_{n+1} fosse razionale, ad esempio $r_n = \frac{p}{q}$, allora:

$$\frac{p^2}{q^2} = r_{n+1}^2 = 1 + r_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_n = \frac{p^2}{q^2} - 1 \in \mathbb{Q},$$

che è una chiara contraddizione all'ipotesi induttiva ($r_n \notin \mathbb{Q}$).

Esercizio svolto 9. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0.$$

Soluzione. Dimostriamolo per induzione forte. Per $n = 1$ è ovvio:

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 \geq 0.$$

Supponiamo che sia vero per $1 \leq \ell \leq n$ e dimostriamolo per $n+1$. Distinguiamo due casi:

- se n è pari, allora:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \geq 0$$

  (nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi induttiva (per $\ell = n$) ed il fatto che $\frac{1}{n} \geq 0$).
- se n è dispari, allora:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

  (nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi induttiva (per $\ell = n-1$) ed il fatto che $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$).

Esercizio svolto 10 (Numeri di Fibonacci). Definiamo la seguente successione di numeri $\{F_n\}_{n \geq 0}$, definita in maniera ricorsiva:

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ si ha $F_n \geq \Phi^{n-2}$, dove $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (sezione aurea).

Soluzione. Dimostriamolo usando il principio d'induzione forte. Per $n = 0, 1$ è ovvio:

$$F_0 = 1 > \Phi^{-2} \qquad \text{e} \qquad F_1 = 1 > \Phi^{-1},$$

in quanto $\Phi > 1$. Supponiamo ora che sia vero per $0 \leq k \leq n$ e dimostriamolo per $n + 1$. Usando l'ipotesi induttiva, si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \geq \Phi^{n-2} + \Phi^{n-3} = \\ &= \Phi^{n-3}(1 + \Phi) = \Phi^{n-3} \cdot \Phi^2 = \\ &= \Phi^{n-1} = \Phi^{(n+1)-2}, \end{aligned}$$

dove nel terzultimo passaggio abbiamo usato che $1+\Phi = \Phi^2$ (si verifica facilmente). E questo conclude la dimostrazione.