Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. U.Bessi

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 2 - 11 Marzo 2013

1. Si consideri la curva di $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2, x + y + z = 0\}.$$

   (a) Fare un disegno approssimativo delle due superifici la cui intersezione é Γ.

   (b) Dimostrare che in ogni punto di Γ si possono esplicitare due variabili rispetto ad una terza.

   (c) Trovare i punti della curva dove z é massimo o minimo.

2. Trovare Sup ed Inf di $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ vincolata a

$$P = \{(x,y,z) : x + y + z = 3\}.$$

3. Sia $f(x,y) = \sin^2 x + y \sin y$.
Consideriamo l'insieme

$$L = \{(x,y) : |x| \leq \pi, |y| \leq \frac{\pi}{2}, f(x,y) = 1\}.$$

   (a) Dimostrare che sull'asse x ci sono solo due punti dove la funzione vale 1. Dire se in essi si puó esplicitare una variabile rispetto all'altra.

   (b) Dimostrare che :

   - $\exists!\ y_+ \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\ : f(0, y_+) = 1;$
   - $\exists!\ y_- \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) : f(0, y_-) = 1.$

   (c) Dimostrare che in un intorno di $(0, y_+)$ e in un intorno di $(0, y_-)$ si puó esplicitare $y(x)$.

   (d) Fare un grafico qualitativo di L.
   (**Suggerimento**: Poiché $\nabla f(x,y)$ é ortogonale alla curva, la curva é parallela al campo di vettori

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin y - y \cos y \\ 2 \sin x \end{pmatrix}.$$

   Studiare i segni di questo campo di vettori.)

4. Trovare masssimi e minimi di $f(x,y) = x^2 - y^2$ vincolata a

$$M = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

5. Dopo aver esaminato se le seguenti equazioni definiscono implicitamente $y = y(x)$ o $x = x(y)$ in un intorno dei punti indicati, scrivere (se esiste) l'equazione della retta tangente in tali punti :

   - $b(x, y) = e^{xy} - y^2$ in $(0, 1)$.
   - $d(x, y) = y - x^2 + 1$ in $(1, 0)$.

6. Dimostrare che in un intorno di $(0, 0, 1)$ l'equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0$$

   definisce una funzione implicita $z = z(x, y)$. Calcolare $\nabla z(0, 0)$.

7. Studiare, in un intorno di $(1, 1)$, l'insieme

$$M = \{(x, y) : x \sin x - y \sin y = 0\}.$$

   Inoltre:

   (a) Dimostrare che, se $(x, y) \in M$, allora $(y, x), (-x, -y), (-y, -x) \in M$.

   (b) Dimostrare che se $A = \{(x, y) : x = y\}$, si ha che $A \subseteq M$.

   (c) Dimostrare che le ipotesi del teorema della funzione implicita valgono in un intorno di $(1, 1)$.

   (d) Dedurre dai punti (b) e (c) che, per r piccolo,

$$M \cap B_r((1, 1)) = A \cap B_r((1, 1)).$$

8. Studiare, $\forall c \geq 0$, l'insieme

$$A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = c\}.$$