Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. U.Bessi

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 1 - 4 Marzo 2013

1. Si dimostri che $\exists!\ g \in C([0,1],\mathbb{R})$ tale che $g(x) = x + \frac{1}{2}\sin(g(x))$.

2. Dimostrare che la mappa
$$\phi : S^1 \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$$
tale che $\phi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, é biettiva ed ha inversa C^1.

3. Dimostrare che la mappa
$$\phi : S^1 \times (0,+\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x,y,,z) : x = y = 0\}$$
tale che $\phi(\theta, r, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, é biettiva ed ha inversa C^1.

4. Dimostrare che la mappa
$$\phi : S^1 \times (0,\pi) \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$$
tale che $\phi(\theta,\psi,r) = (r\cos\theta\sin\psi, r\sin\theta\sin\psi, r\cos\psi)$, é invertibile ed ha inversa C^1.

5. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto. Si supponga che $f''(x)$, che é una matrice 2×2, sia invertibile ogni volta che $f'(x) = 0$.
Dimostrare che f' ha al piú finiti zeri in K.

6. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Sia $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy$.
   (a) Se $\alpha = a + ib$ dimostrare che:
   $$A^{-1}\left[\alpha A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
   (b) Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ differenziabile. Tale mappa si puó vedere come una applicazione da $\mathbb{R}^2$ in se : $\tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\left[f\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right]$.
   Dimostrare che $\tilde{f}'(z)$ é una matrice invertibile $\Longleftrightarrow f'(z) \neq 0$.
   (c) Dimostrare che se $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é una mappa C^1 e se $f'(z_0) \neq 0$, allora f é invertibile in un intorno di $f(z_0)$.
   (d) Considerare $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, data da $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
   Dimostrare che $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$.

7. Sia $f(x,y) = (1-x+y)e^x + e^y - \frac{1}{2}$.

(a) Studiare l'insieme $L = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$.

(b) Dimostrare che c' é un punto $x_0 > -1$ tale che:

$$\begin{cases} f(x,0) < 0 & x > x_0 \\ f(x,0) > 0 & x < x_0 \end{cases}$$

(c) Usando il punto (b) ed il teorema del valore intermedio, dimostrare che:

$$\begin{cases} y(x) > 0 & x > x_0 \\ y(x) < 0 & x < x_0 \end{cases}$$

(d) Dimostrare che:

$$\begin{cases} y'(x) \leq 0 & y(x) \geq x \\ y'(x) \geq 0 & y(x) \leq x \end{cases}$$

(e) Dimostrare che $y(x) = x \Longleftrightarrow x = \ln(\frac{1}{4})$.

(f) Dimostrare che:

$$\begin{cases} f(x,x) > 0 & x > \ln(\frac{1}{4}) \\ f(x,x) < 0 & x < \ln(\frac{1}{4}) \end{cases}$$

e dedurre che:

$$\begin{cases} y(x) < x & x > \ln(\frac{1}{4}) \\ y(x) > x & x < \ln(\frac{1}{4}) \end{cases}$$

(g) Dimostrare che $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

(h) Dimostrare che $\lim_{x \to \infty} y(x) = +\infty$.