AM210 2012-2013: VI Settimana

Il TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, O aperto convesso in $\mathbf{R}^n$. Allora

$$|f(u) - f(v)| \leq ||u - v|| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Infatti $$|f(u) - f(v)| = |\int_0^1 [\frac{d}{dt} f(v + t(u - v))]\, dt| =$$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u - v)), u - v > dt| \leq ||u - v|| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Corollario 1 Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso. Allora

$$\nabla f(u) = 0 \ \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{cost.} \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi contenuti in O:

$$x \in B_r(x_0) \subset O \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| \leq \sup_{\|x - x_0\| < r} \|\nabla f(x)\| = 0$$

In particolare, se $x_0 \in O$, $\{x \in O : f(x) = f(x_0)\}$ é aperto. Ma, per la continuitá di f, é aperto anche $\{x \in O : f(x) \neq f(x_0)\}$. Siccome O é connesso, e

$$O = \{x \in O : f(x) = f(x_0)\} \cup \{x \in O : f(x) \neq f(x_0)\} \text{ (unione disgiunta)}$$

concludiamo che uno dei due aperti, ovviamente $\{x \in O : f(x) \neq f(x_0)\}$, é vuoto .

Corollario 2. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f é **localmente Lipschitziana** in O:

$$\forall \ \overline{B}_r(x_0) \subset O, \exists L = L(r, x_0) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Prova. Intanto, dal Teorema del valor medio

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \sup_{z \in \overline{B}_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\| \quad \|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Quindi, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \leq \quad \|x - y\|^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right| \right]^2$$

Lipschitzianitá sui compatti

Se $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ allora f é Lipschitziana sui compatti di O :

$$\forall K \subset O \,\text{compatto}\;\; \exists L = L(K): \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in K$$

Prova. Siccome $x, y \in K, \|x - y\| \geq r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|} \leq \frac{2}{r} \sup\limits_{z \in K} \|f(z)\|$, basta provare che

$$\exists r > 0, \quad L > 0: \quad x', x'' \in K, \quad \|x' - x''\| \leq r \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$

Dalla compattezza di K segue che

$$\exists x_j \in K,\; r_j > 0,\; j = 1, \ldots, p \quad \text{tali che} \quad \overline{B}_{r_j}(x_j) \subset O \quad \text{e} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{r_j}{2}}(x_j).$$

Per quanto sopra,

$$\exists L_j > 0: \quad x', x'' \in K \cap \overline{B}_{r_j}(x_j) \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L_j\|x' - x''\|$$

Sia $0 < r \leq r_j \forall j$, $L := maxL_j$. Se $x', x'' \in K, \|x' - x''\| \leq \frac{r}{2}$ e, diciamo, $x' \in B_{\frac{r_j}{2}}(x_j)$ si ha quindi che

$$\|x'' - x_j\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r_j}{2} \leq r_j \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $\quad f \in C^1(O, \mathbf{R}), \quad O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se esistono $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_j}$ allora

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n \qquad\qquad \textit{sono le derivate seconde}$$

$H_f(x) := \left(f_{x_i x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ é la *matrice Hessiana* e $f \in C^2(O)$ sse $f_{x_i x_j} \in C(O), \forall i, j.$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad \forall x \in O$$

Campi conservativi: una condizione necessaria. Una $F \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ si chiama anche 'campo vettoriale' in $\mathbf{R}^n$. Tale 'campo' si dice conservativo se

$$\exists f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) : \quad F = \nabla f$$

Tale f, se esiste, é anche unica (a meno di una costante additiva), e si chiama 'potenziale' del campo F. L'unicitá sussiste anche nel caso $F \in C(O, \mathbf{R}^n)$, O aperto connesso di $\mathbf{R}^n$.
Se $n = 1$, ogni F ammette potenziale (ovvero una primitiva). Dal Lemma di Schwartz segue che ció non é piú vero, in generale, se $n \geq 2$:

$$F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), \quad F(x) = \nabla f \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Osservazione e un controesempio. Supponiamo $n = 2$. Per definizione $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ esistono se e solo se esistono i limiti

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}[\tfrac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{k \to 0} \tfrac{1}{k}[\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)] =$$

$$= \lim_{k \to 0} \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+k,y) + f(x,y)}{hk} \right]$$

Inoltre, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ se e solo se i due limiti sono uguali.

Ció suggerisce che, in generale, risulti $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, ma che possa anche accadere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$ esistano entrambe ma siano diverse perché due successivi passaggi al limite non si possono in generale scambiare. Ad esempio,

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0}[\lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}] = \lim_{x \to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{y \to 0}[\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}] = \lim_{y \to 0}(-1) = -1$$

Notiamo che f non ha limite per (x,y) tendente a zero. Questo esempio suggerisce anche un esempio in cui l'invertibilitá nell'ordine di derivazione non vale. Sia

$$g(x,y) := xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{e, quindi,} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^5 - y^4 x - 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si vede subito che g, g_x, g_y hanno limite zero in $(0,0)$, e quindi g ha un prolungamento C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$. Poi, in $(0,0)$, troviamo $g_{xx} = g_{yy} = 0$ e

$[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}](0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -1$ mentre $[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}](0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = 1$

Coerentemente, g non é di classe C^2. Infatti,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{non é continua in } (0,0), \text{ perché}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,0) \;=\; -1 \quad \forall x\neq 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(0,y) \;=\; 1 \quad \forall y\neq 0$$

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;<\nabla f(u)\,,\, h>\; + \frac{1}{2} < H_f(u)\,h,\; h> \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $u=(x_1,\ldots,x_n)$, $h=(h_1,\ldots,h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u+th)$, é

$$\varphi(0) \;=\; f(u), \quad \varphi(1) \;=\; f(u+h), \qquad \frac{d\varphi}{dt}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j \;=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\;\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(u+th)h_ih_j \;\; =< H_f(u \;+\; t\,h)\,h,\; h>$$

Ma $\varphi(1) \;=\; \varphi(0) \;+\; \varphi'(0) \;+\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$ e quindi

$$f(u+h) \;\;=\;\; f(u) \;+ <\nabla f(u)\,,\,h> + \frac{1}{2} < H_f(u)h, h> \;+$$

$$+\int_0^1 (1-t) \;\; < \;[H_f(u+th) \;-\; H_f(u)]\,h,h> \;\; dt$$

Stima del resto: $\forall \epsilon>0\ \exists \delta_\epsilon>0 :\ |t|\le\delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f_{x_ix_j}(u+th)-f_{x_ix_j}(u)|\le\epsilon \Rightarrow$

$$|\sum_{i,j=1}^{n}\Big[f_{x_ix_j}(u+th)-f_{x_ix_j}(u)\Big]\; h_ih_j\;| \;\le n^2\epsilon||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \Leftrightarrow \exists \delta > 0: \; f(u) \le f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\, h > \ge 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \le \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \le f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 = \tfrac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} = < \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\nabla f(u) = 0, \quad 0 \le f(u+h) - f(u) =$

$$\nabla f(u) + ||h||^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > + \circ(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > \ge 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:

$$< H_f(u)\, h, h > \, > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\; h \ne 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale}$$

Prova. $h \to < H_f(u) h, h >$ continua, $< H_f(u) h, h > \, > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \ne 0, \; \Rightarrow$

$$\exists\, m := \min_{\|h\|=1} < H_f(u)\, h, h > \, > 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \, \ge m\, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| << 1 \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) = \|h\|^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > + \circ(1)] \ge \|h\|^2 \, [m + \circ(1)] > 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0: \; f(u) \ge f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $< H_f(u)\, h,\, h > \le 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \, < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\; h \ne 0$$

Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \dots, x_n)$ di f dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > \ = \ \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \ = \qquad\qquad h = (h_1, \dots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Le proprietá di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\dots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ h,\, h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n \qquad\qquad \text{si dice}$$

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > > 0\, (< 0),\ \ \forall\, h \neq (0,0)$
semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > \geq 0\, (\leq 0),\ \ \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$\lambda_1 = \inf\limits_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup\limits_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$

Prova. Sia $\overline{h}$ di norma 1 tale che $m := < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >= \inf\limits_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h >$.

Sia $f(h) = \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2} =< \mathcal{A}\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} >$, $h \neq 0$ e quindi $f(\overline{h}) = \min\limits_{h\neq 0} f(h)$ e quindi

$$0 = \frac{d}{dt} f(\overline{h}+th)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > +t(< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h >) + t^2 < \mathcal{A}h, h >}{1 + 2t < \overline{h}, h > +t^2 \|h\|^2}\right]_{|t=0} =$$

$$< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h > -2 < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >= 2[< \mathcal{A}\overline{h}, h > - < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >]$$

$\forall h \in \mathbf{R}^n$perché $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$. Dunque

$$\mathcal{A}\overline{h} =< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \ \overline{h} = m\overline{h}$$

cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, ed é necessariamente il piú piccolo, giacché

$$\mathcal{A}h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda \ =< \mathcal{A}h, h > \geq \ m$$

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0$ $(\lambda_n < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $(\lambda_n = 0)$

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Sia Λ un insieme, I un intervallo e $f : \Lambda \times I \to \mathbf{R}$ una famiglia di funzioni reali di variabile reale dipendente da un 'parametro' $\lambda \in \Lambda$. Ad esempio, se $\Lambda = \mathbf{N}$, si tratta di una successione di funzioni in I; se $f(\lambda, x) = x^2 - 2\lambda x + \log \lambda$, si tratta di una famiglia di polinomi, dipendenti dal parametro (reale positivo) λ (qui, $I = \mathbf{R}^+$).
Se, per ogni fissato λ, la funzione $x \to f(\lambda, x)$ é continua in $I = [a, b]$ e quindi integrabile in $[a, b]$, resta definita la funzione nella variabile λ, data da

$$\lambda \to \int_a^b f(\lambda, t) dt$$

Parleremo anche di *integrale dipendente da parametro* (il parametro λ).
Naturalmente si potrá considerare anche il caso in cui I sia un intervallo aperto e/o illimitato, ed in tal caso richiederemo alla funzione $x \to f(\lambda, x)$ di essere integrabile in senso improprio (o generalizzato) in I. Ad esempio, la funzione

$$\lambda \to \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt$$

é definita per ogni valore del parametro λ in $[0, +\infty)$. Qui $I = [0, +\infty)$.
Se $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, potremo chiederci quale 'regolaritá' (continuitá, derivabilitá..) abbia tale funzione, ovvero con quale regolaritá l'integrale dipenda dal parametro λ.

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $\overline{B_r(x_0)} \subset \mathbf{R}^n$. Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a, b], \mathbf{R})$. Allora

$$x \to \int_a^b f(x, t)\, dt \qquad \text{é continua in} \quad \overline{B_r(x_0)}$$

ovvero $\quad x_k \to x \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x_k, t)\, dt \to_k \int_a^b f(x, t)\, dt$

Segue dalla uniforme continuitá di f in $\overline{B_r(x_0)} \times [a, b]$. Infatti,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \text{tale che:} \qquad \|x' - x''\| \le \delta_\epsilon, \quad t \in [a, b] \quad \Rightarrow$$

$$|f(x', t) - f(x'', t)| \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x', t)\, dt - \int_a^b f(x'', t)\, dt \right| \le \epsilon(b - a).$$

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

Sia $\overline{B_r(x_0)} \subset \mathbf{R}^n$. Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a,b], \mathbf{R})$. Supponiamo inoltre che

per ogni $t \in [a,b]$ esiste $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $\overline{B_r(x_0)}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a,b])$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt \quad \text{esiste in} \quad B_r(x_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt$$

Qui useremo la uniforme continuitá di $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $\overline{B_r(x_0)} \times [a,b]$:

$$|s| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{s} \left[\int_a^b f(x+se_j,t)\, dt - \int_a^b f(x,t)\, dt \right] - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{s} \int_a^b \left[\int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\sigma e_j,t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \right) d\sigma \right] dt \right| \leq \epsilon(b-a).$$

Una applicazione: Invertibilitá nell'ordine di integrazione (Fubini) e quindi nell'ordine di derivazione (Schwartz)

(FUBINI). Sia $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Allora

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

($[a,b] \ni x \to \int_c^d f(x,y)dy$, $[c,d] \ni y \to \int_a^b f(x,y)dx$ sono continue e quindi integrabili!)

Prova . Dal TFC: $\frac{d}{dy} \int_c^y f(s,t)dt = f(s,y)$; quindi, derivando sotto segno di integrale,

$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)dt \right) ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_c^y f(s,t)dt \right) ds = \int_a^b f(s,y)ds.$

D'altra parte, dalla continuitá di $t \to \int_a^b f(s,t)ds$ segue, grazie al TFC, che

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt = \int_a^b f(s,y)ds. \qquad \text{Dunque,}$$

$\frac{d}{dy} \left[\int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt - \int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)dt \right) ds \right] \equiv 0$ e quindi (presi $y=c, y=d$): $0 =$

$$\int_c^c \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt - \int_a^b \left(\int_c^c f(s,t)dt \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt - \int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)dt \right) ds$$

(SCHWARTZ). Sia $f \in C^2((x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\delta,y_0+\delta))$. Una ripetuta applicazione del Teorema Fondamentale del Calcolo dice che

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y}[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt\right)ds = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y}\frac{d}{dt}[\frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt\right)ds =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(s,y_0)\right]ds = f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)$$

e quindi
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y}[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt\right)ds =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y}\left(\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt\right)ds \quad = \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Integrali impropri dipendenti da parametro. Qui ha un ruolo fondamentale la **'equidominatezza'**. Una $f \in C(\overline{B_r(x_0)}\times(a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ si dice **equidominata** in (a,b) (dominata, in (a,b), *uniformemente* rispetto a $x \in K$), se

$$\exists \;\; g \in C((a,b)): \quad |f(x,t)| \;\le\; g(t) \quad \forall x \in K, \quad t \in (a,b) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(t)dt < +\infty$$

Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)}\times(a,b))$ ed equidominata. Allora $\quad x \to \int_a^b f(x,t)\,dt\;$ é continua :

$$x_j \in \overline{B_r(x_0)}, \quad x_j \to_j x \quad \Rightarrow \quad \lim_j \int_a^b f(x_j,t)\,dt = \int_a^b \lim_j f(x_j,t)\,dt$$

Se di piú esiste $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\overline{B_r(x_0)}\times[a,b],\mathbf{R})$ ed é equidominata, allora

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^b f(x,t)\,dt \qquad \text{esiste in} \quad B_r(x_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^b f(x,t)\,dt \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt$$

NOTA. L'equidominatezza é essenziale. Sia ad esempio

$$f(x,t)=\frac{\sin(x^2t)}{t}, \quad t\in\mathbf{R}, t\neq 0, \quad x\in\mathbf{R}, \qquad f(x,0)=x^2$$

f é continua, ma non equidominata: $\int_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\sin(x^2t)}{t}|dt=+\infty$. Posto $I(x) := \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x^2t)}{t}dt$, I non é continua in $x=0$, perché $I(0)=0$, mentre, posto $\tau = x^2t$, troviamo

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x^2t)}{x^2t}x^2dt = \lim_{x\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \quad = \pi$$

Prova. Notiamo innanzi tutto che $\int\limits_a^b |f(x,t)|\,dt \le \int\limits_a^b g(t)\,dt < +\infty \quad \forall x \in \overline{B_r(x_0)}$, cioé, per ogni $x \in \overline{B_r(x_0)}$, la funzione $\quad t \to f(x,t) \quad$ é (assolutamente) integrabile (in senso generalizzato) in (a,b). Fissiamo ora $\epsilon > 0$. Da $\int\limits_a^b g(t)\,dt < +\infty$ segue:

$$\exists\, a < a_\epsilon < b_\epsilon < b,\ \delta_\epsilon > 0 : \qquad \int_a^{a_\epsilon} g(t)dt \;+\; \int_{b_\epsilon}^b g(t)dt \;\le\; \frac{\epsilon}{2}$$

Inoltre, giá sappiamo che $\int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f(x_j,t) - f(x,t)|\,dt \to_j 0$ e quindi

$$\limsup_j \int_a^b |f(x_j,t) - f(x,t)|\ dt \ \le 2\int_a^{a_\epsilon} g(t)dt + 2\int_{b_\epsilon}^b g(t)dt \le \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

Analogamente, se $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a,b])$, dalla equidominatezza di f e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ segue che $\left|\frac{1}{s}\left[\int\limits_a^{a_\epsilon} f(x+se_j,t)\,dt - \int\limits_a^{a_\epsilon} f(x,t)\,dt\right] - \int\limits_a^{a_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt\right| +$ $\left|\frac{1}{s}\left[\int\limits_{b_\epsilon}^{b} f(x+se_j,t)\,dt - \int\limits_{b_\epsilon}^{b} f(x,t)\,dt\right] - \int\limits_{b_\epsilon}^{b} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt\right| \le \epsilon \qquad$ se $|s| \le \delta_\epsilon$,

mentre $\quad \lim\limits_{s\to 0}\left|\frac{1}{s}\left[\int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f(x+se_j,t)\,dt - \int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f(x,t)\,dt\right] - \int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt\right| = 0.$

ESEMPIO. Derivando sotto segno di integrale e poi integrando due volte per parti, troviamo $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}dt \;=\; -\int\limits_0^{+\infty} \sin t\; e^{-tx}dt \;=\; x\int\limits_0^{+\infty} \cos t\; e^{-tx}dt \;-1 \;=$ $x^2\int\limits_0^{+\infty} \sin t e^{-tx}dt - 1$ e quindi $\quad (1+x^2)\int\limits_0^{+\infty} \sin t e^{-tx}dt \equiv 1$, ovvero , $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}dt =$ $-\frac{1}{1+x^2}$. Da qui $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}dt - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi}dt \;=\; \arctan \xi - \arctan x.$

NOTA 1. Se $\sup\limits_{t\in K} |f(x,t) - f(t)| \to_{\|x\|\to\infty} 0 \quad \forall K \subset I$ compatto ed $f(x,t)$ é equidominata in $\{\|x\| \ge R\} \times I$, allora $\quad \int\limits_a^b f(x,t)dt \to_{\|x\|\to\infty} \int\limits_a^b f(t)dt.$

Ad esempio, $\quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}dt \to_{x\to+\infty} 0.\quad$ Ció implica, per quanto sopra

$$\lim_{\xi\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi}dt \;=\; \frac{\pi}{2}$$

ESERCIZIO

$$(\textit{integrale di Dirichlet}) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \;=\; \lim_{\xi\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi}dt \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Esercizi e complementi

1. Il laplaciano in coordinate polari. Sia $f \in C^2(\Omega)$, $\quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto.

$$\text{Laplaciano di} f : \qquad \Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sia $n = 2$ e scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Provare che

$$(\Delta f)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho}$$

Si ha

$$g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$g_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\sin^2\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \left[f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{\rho}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \right]$$

Quindi, essendo $f_x\cos\theta + f_y\sin\theta = g_\rho$, troviamo

$$g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho} = (f_{xx} + f_{yy})\,(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

2. Calcolare ΔU, ove $U(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $\quad x^2 + y^2 > 0$.

3. Sia $N \geq 3$. Sia $U(x) = \frac{1}{\|x\|^{N-2}}$, $\quad x \in \mathbf{R}^N$, $\quad \|x\| > 0$. Calcolare ΔU.

4. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare che

$$\exists c > 0 : \quad < H_f(x)h, h > \; \geq c\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \;\Rightarrow\; \forall y \in \mathbf{R}^n\; \exists! x \in \mathbf{R}^n : \quad \nabla f(x) = y$$

Prova. Fissati x, y, poniamo $\varphi(t) := < \nabla f(tx + (1-t)y), x - y >$. É

$$\varphi'(t) \;= < H_f(tx + (1-t)y)\,(x - y), x - y > \geq \; c\,\|x - y\|^2$$

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y >= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \geq c\|x - y\|^2$$

Ció implica in particolare l'unicitá: $\quad \nabla f(x) = \nabla f(y) \Rightarrow \|x - y\| = 0$. Inoltre

$$f(x) \;=\; f(0) \;+\; \int_0^1 \tfrac{d}{dt} f(tx)dt \;=\; f(0) \;+\; \int_0^1 < \nabla f(tx) - \nabla f(0) + \nabla f(0), x > dt \geq$$

$$f(0) + < \nabla f(0), x > + \frac{c}{2}\|x\|^2$$

e quindi per ogni fissato y la funzione $x \to f(x) - < x, y >$ é coerciva e continua e quindi ha un minimo globale. Dunque l'equazione $\nabla(f(x) - < x, y >) = 0$ ha soluzione, e cioé l'equazione $\nabla f(x) = y$ ha soluzione.

5. Massimi e minimi

5.1 Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$. É

$$f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$$

$$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 1, 0))$; $\det H(\pm 1, 0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$; $(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

5.2 Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Notiamo che

$$\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$$

e quindi $(0,0), (1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi

$$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3 \qquad \text{e quindi}$$

- $H_g(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_g(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo locale (e non assoluto, perché $\inf_{\mathbf{R}^2} = -\infty$)

6. Provare che: $f \in Lip_{loc}(\Omega), K \subset \Omega$ compatto $\Rightarrow$ f é Lipschitz su K.
Supponiamo il contrario:
esiste K ed esistono $x_j, y_j \in K$ tali che $\frac{\|f(x_j) - f(y_j)\|}{\|x_j - y_j\|} \to_j \infty$.
Siccome f é limitata in K, dovrá risultare $\|x_j - y_j\| \to_j 0$. Passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che

$$\exists \bar{x} \in K : \quad x_j \to_j \bar{x}, \quad y_j \to_j \bar{x}, \quad \frac{\|f(x_j) - f(y_j)\|}{\|x_j - y_j\|} \to_j \infty$$

contraddicendo la Lipschitzianitá in $B_r(\bar{x})$ per qualche $r > 0$.

7. L'equidominatezza é essenziale nel Teorema di dipendenza continua Sia, ad esempio,

$$f(x,t) = \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}}, \qquad t, x \in \mathbf{R}$$

Tale f é continua in $\mathbf{R}^2$, ma non é equidominata (in $\mathbf{R}$) rispetto a $x \in [-\delta, \delta]$ perché $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{1+|t|^2} dt = +\infty$ (teorema del confronto). In particolare, non esiste $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+|t|^2} dt$.
Tuttavia, per $x \neq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{1+|t|^{2+x^2}} dt < \infty$, e quindi la funzione $g(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}} dt$ é definita per $x \neq 0$ e, per disparitá, vale zero. Dunque $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) dt, \quad x \neq 0$ ha un prolungamento continuo in $x = 0$, che non é $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(0,t) dt$ (che neppure esiste!).

Notiamo che la continuitá di f assicura che

$$f(x,t) \to_{x\to 0} f(0,t) = \tfrac{t}{t^2+1} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{uniformemente sui compatti}$$

E in effetti la convergenza é uniforme su tutto $\mathbf{R}$ perché $|f(x,t)| \leq |f(0,t)|$ e $f(0,t) \to_{t\to\infty} 0$. Il carattere uniforme della convergenza si vede anche direttamente stimando $\quad \max_t |f(x,t) - f(0,t)| \leq \max_t \frac{|t(1-|t|^{x^2})|}{1+|t|^{x^2+2}}$:

$$\max_{t\geq 1} \frac{t(t^{x^2}-1)}{|t|^{x^2+2}} \;=\; \max_{t\in[0,1]} t(1-t^{x^2}) \;=\; \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}} \; \frac{x^2}{1+x^2} \to_{x\to 0} 0$$

Notiamo infine che $h(x) := \int\limits_{0}^{+\infty} f(x,t) dt$ é, come g, definita per $x \neq 0$, ma, diversamente da g, ha un limite per x tendente a zero, e infatti

$$\lim_{x\to 0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}} dt = +\infty = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}} dt$$