AM210 2012-13: Tracce delle lezioni- III Settimana

ELEMENTI DI TOPOLOGIA NEGLI SPAZI METRICI, IN $\mathbf{R}^n$

1. Sia (X, d) spazio metrico, $A \subset X$, $x \in X$.

(i) x é *interno (esterno)* ad A se esiste $B_r(x) \subset A$ (rispettivamente $B_r(x) \subset A^c$):

$$intA = \{punti\ interni\, ad\, A\} = \{x :\ \exists B_r(x) \subset A\}$$

Dunque, $A \subset X$ é aperto $\Leftrightarrow A = int\, A$. Inoltre, $A \subset X$ é aperto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$, ove

$x \in \partial A$ (*x é punto frontiera* di A) se non é né interno né esterno ad A, ovvero

$$\partial A := \{x :\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap A^c,\ \forall r > 0\}$$

Si ha $\partial A = \partial A^c$ e $X = (int\, A) \cup \partial A \cup (int\, A^c)$ con $(int\, A) \cap \partial A = \emptyset = \partial A \cap int\, A^c$ e quindi $(int\, A) \cup \partial A = (int\, A^c)^c$ é chiuso, e quindi $A \cup \partial A = (int\, A) \cup \partial A$ é chiuso.
Inoltre, $(\partial A)^c = int\, A \cup int\, A^c$ e quindi ∂A **é un insieme chiuso**. Poi

$\exists r_0 > 0 :\ r < r_0 \Rightarrow B_r(x) \cap A = \{x\}$ (cioé x é *punto isolato* di A) $\Rightarrow$ $x \in \partial A$

$x \in \partial A \backslash A \Rightarrow x$ é *punto di accumulazione* di A, ovvero $\exists x_n \in A, x_n \neq x : x_n \to x$.

(ii) $A = \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ A é chiuso $\Leftrightarrow$ $\partial A \subset A$

La prima equivalenza é ovvia: se $A = \overline{A}$ allora A é chiuso perché $\overline{A}$ é chiuso e, viceversa, se A é chiuso allora é anche il piú piccolo chiuso che contiene A!
Poi, A chiuso $\Rightarrow A^c$ aperto $\Rightarrow \partial A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow \partial A \subset A$.
Viceversa, $\partial A \subset A \Rightarrow A = A \cup \partial A$ che é chiuso.

2. Ogni aperto in $\mathbf{R}^n$ é unione numerabile di palle aperte (o chiuse)

Infatti, se $\mathcal{B}_O := \{B_r(x) \subset O :\ r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}$, $\mathcal{B}_O$ é numerabile. É $O = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_O} B$. Infatti, dato $x \in O$, siano $r \in \mathbf{Q}^+, \xi \in \mathbf{Q}^n$ tali che $B_{2r}(x) \subset O$ e $\xi \in B_r(x)$.
Allora $x \in B_r(\xi) \subset B_{2r}(x) \subset O$.

3. Se O_α sono sottinsiemi aperti in $\mathbf{R}^n$, esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha = \bigcup\limits_j O_{\alpha_j}$ *(da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento finito).*

Sia $\mathcal{B} := \{B_r(x) :\ r \in \mathbf{Q},\ x \in \mathbf{Q}^n,\ B_r(x) \subset O_\alpha$ per qualche $\alpha\}$. $\mathcal{B}$ é famiglia numerabile di palle aperte, che si puó quindi indicare come $\{B_j :\ j \in \mathbf{N}\}$. Come sopra, $\cup_\alpha O_\alpha = \bigcup\limits_j B_j$. Sia, per ogni j, α_j tale che $B_j \subset O_{\alpha_j}$. Allora

$$\cup_\alpha O_\alpha \subset \cup_j B_j \subset \cup_j O_{\alpha_j} \subset \cup_\alpha O_\alpha$$

4. $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice **limitato** se esiste $r > 0 : \quad A \subset B_r$

5. (i) $K \subset X$ si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito: cioé, se $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in \mathcal{A}$,

$$K \subset \bigcup_\alpha O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \quad \textit{tali che} \quad K \subset \bigcup_{j=1,\ldots,l} O_{\alpha_j}$$

(ii) $K \subset X$ si dice **sequenzialmente compatto** se ogni successione $x_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di K, ovvero

$$x_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists x_{k_j}, x \in K \quad \text{tali che} \quad x_{k_j} \to_j x$$

PROPOSIZIONE 1 Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) K é chiuso e limitato. (ii) K é sequenzialmente compatto. (iii) K é compatto

Prova.(i) $\Rightarrow$ (ii): $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty$ per tutti i $j = 1, \ldots, n \Rightarrow \exists k_i,\ \exists\ x_1, \ldots, x_n : \ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \ldots, n \Rightarrow u_{k_i} \to_i u$ $u = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ perché K é chiuso.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Dal punto 3-(iii) sappiamo che possiamo supporre $\mathcal{A} = \mathbf{N}$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $k \in \mathbf{N}$ esista $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k} O_i$. Sia $x_{k_j} \to_j x \in K$. Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, esiste k_0 tale che $x \in O_{k_0}$ e quindi $x_{k_j} \in O_{k_0}$ per j grande, mentre $x_{k_j} \notin O_i$ se $i \le k_j$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, ove D_i é la palla di raggio $i \in \mathbf{N}$ e centro l'origine, $K \subset D_{\hat{i}}$ per qualche $\hat{i}$. Per provare che K é chiuso, supponiamo che non lo sia: esiste $x_k \in K$, $\hat{x} \notin K$ con $x_k \to_k \hat{x}$. Siccome $K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ si ha che $K \subset \bigcup_k \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} = \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ e quindi $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} =$ $= \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{N}\}$. Ma $x_k \in K$ e $\|x_k - \hat{x}\| < \frac{1}{N}$ se k é grande.

Nel seguito, $(X, d), (Y, \rho)$ sono spazi metrici e $f : X \to Y$.

TEOREMA $f \in C(K, Y)$, $K \subset X$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ compatto.

(Weierstrass) Se $Y = \mathbf{R}$, esistono $\underline{u}$, $\overline{u} \in K$: $\inf_K f = f(\underline{u})$, $f(\overline{u}) = \sup_K f$.

Prova. $O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ aperti in $\mathbf{R}^m$, $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(O_\alpha) \quad \Rightarrow$ $\exists\mathcal{A}_0$ finito tale che $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_0} f^{-1}(O_\alpha) \quad \Rightarrow f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha \;\Rightarrow\; f(K)$ é compatto.

Variante di Weierstrass Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F, \mathbf{R})$ tale che

(i) **(coercivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \;\Rightarrow\; f(u_n) \to_n +\infty$

(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \;\Rightarrow\; \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

$$\text{Allora} \qquad \exists\, \underline{u} \in C \quad \text{tale che} \qquad f(\underline{u}) = \inf_C f$$

Sia infatti $u_n \in C$ *successione minimizzante*, ovvero

$$f(u_n) \to_n \inf_C f$$

Allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue quindi che

$$\inf_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u) \geq \inf_C f$$

NOTA. Una funzione f é semicontinua inferiormente in x_0 sse

$$\forall\epsilon > 0\; \exists\delta_\epsilon > 0 : \quad d(x, x_0) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$$

Ad esempio, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0\; \forall x \neq 0$, $f(0) = c$ é semicont. inf. sse $c \leq 0$.
χ_A, la funzione caratteristica di A (ovvero $\chi_A(x) = 1 \quad \forall x \in A$, χ_A é nulla altrove) é inf. semicontinua sse A é aperto

Uniforme continuitá.

Siano $(X, d), (Y, \rho)$ spazi metrici, $A \subset X$.

$f : A \to Y$ é **uniformemente continua** in $A \subset X$ se e solo se

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \;\; d(u, v) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(f(u), f(v)) \leq \epsilon)$$

Lipschitzianitá. f si dice Lipschitziana (o Lip) di costante $L > 0$ se

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

Una funzione si dice localmente Lipscitziana in A se, per ogni $x \in A$, é Lip su qualche $B_{r(x)}(x) \cap A$. O, equivalentemente (vedi Es. 7), se é Lip sui compatti.

Chiaramente, ogni funzione Lip é anche uniformemente continua, ma non viceversa. Ad esempio, $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in R$ é uniformemente continua (in $\{|x| \leq 1\}$ per Heine-Cantor, ed in $\{|x| \geq 1\}$, perché $x, y \geq 1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$) ma non é Lip, perché $\sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = +\infty$.

(**Teorema di Heine-Cantor**)

$$f \in C(K, Y), \quad K \subset X \qquad \text{compatto} \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ é uniformemente continua in } K.$$

Prova 1 ($X = R^n$). Se no, $\exists\, \epsilon_0 > 0$, $u_n, v_n \in K$, $d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n}$ tale che $\rho(f(u_n), f(v_n)) \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $\rho(f(u), f(v)) \geq \epsilon_0$. Ma $d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v) \quad \forall n \Rightarrow u = v$, contraddizione.

Prova 2 ($X = R^n$). Fissato $\epsilon > 0$, sia, per ogni x in K,

$$\omega(f, x, \delta) := \sup\{\rho(f(x'), f(x'')) : \quad x', x'' \in K \cap B_\delta(x)\}$$

$$\delta_\epsilon(x) := \sup\{\delta > 0 : \quad \omega(f, x, \delta) < \epsilon\}$$

La funzione $x \to \delta_\epsilon(x)$ é inferiormente semicontinua, perché, se $\delta < \delta_\epsilon(x)$, si ha

$$y \in K, d(y, x) < \delta_\epsilon(x) - \delta \quad \Rightarrow B_\delta(y) \subset B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \Rightarrow \omega(f, y, \delta) \leq \epsilon \quad \Rightarrow \delta_\epsilon(y) \geq \delta$$

Per Weierstrass, esiste $\underline{x} \in K$ tale che $\delta_\epsilon(x) \geq \delta_\epsilon(\underline{x}) \quad \forall x \in K$. Dunque

$$d(x, y) < \delta_\epsilon(\underline{x}) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

Prova 3. Fissato $\epsilon > 0$

$$\forall\, x \in K\ \exists \delta_\epsilon(x) \qquad x'\,,\ x'' \in B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \quad \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$$

Dalla compattezza di K segue che

$$\exists x_j \in K,\ j = 1, \ldots, p : \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}}(x_j)$$

Sia $\delta_\epsilon :=\ \min_j\ \delta_\epsilon(x_j)$. Allora,

$$d(x, y) < \frac{\delta_\epsilon}{2},\ x \in B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}} \Rightarrow d(y, x_j) < \frac{\delta_\epsilon}{2} + \frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2} < \delta_\epsilon(x_j) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

CONNESSIONE

Definizione di insieme connesso per archi

$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso per archi** se

$$\forall\, u, v \in A, \ \ \exists\, \gamma \in C([a,b], A): \quad \gamma(a) = u, \ \gamma(b) = v$$

ovvero, presi due punti u, v di A esiste un cammino continuo che porta da u a v senza uscire da A.

ESEMPIO $\quad A \subset \mathbf{R}$ é connesso per archi $\quad \Leftrightarrow \quad A$ é un intervallo.

Siccome due punti di un intervallo I sono estremi di un intervallo chiuso (che é ovviamente un arco) tutto contenuto in I, ogni intervallo é connesso per archi.
Viceversa, se A é connesso per archi, dati $x < y$ punti di A, esiste $\gamma \in C([0,1], A)$ e tale che $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Per il teorema del valore intermedio $\gamma([0,1])$ contiene tutto l'intervallo di estremi x ed y e quindi A é un intervallo.

Proposizione Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ continua. Se A é connesso per archi allora $f(A)$ é connesso per archi.

Infatti, se $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, $f \circ \gamma$ é cammino continuo, in $f(A)$, tra $f(x)$ ed $f(y)$.

Teorema del valore intermedio.

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$, connesso per ardchi, $\quad f \in C(A, \mathbf{R})$. Allora,

$$x, y \in A, a := f(x), b := f(y), a < c < b \ \Rightarrow \exists z \in A: \quad f(z) = c$$

Infatti: $\quad f(A)$ é sottoinsieme connesso per archi in $\mathbf{R}$, e quindi é un intervallo.

Definizione di insieme connesso

Uno spazio metrico (X, d) é connesso se non é unione di due aperti disgiunti, ovvero l'unico sottoinsieme non vuoto di X che é sia aperto che chiuso é X.
$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso** se $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$, O_1, O_2 aperti e tali che $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Ad esempio, $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y): \ y = ax + b\}$ é unione di due aperti disgiunti e quindi sconnesso. Allo stesso modo, una circonferenza disconnette il piano.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

1. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Provare che $\overline{E} = E \cup \partial E$.

$(E \cup \partial E)^c = E^c \cap (\partial E)^c = E^c \cap [int\, E \cup int\,(E^c)] = E^c \cap int(E^c) = int(E^c)$ é aperto e quindi $E \cup \partial E$ é chiuso e quindi $\overline{E} \subset E \cup \partial E$.
Viceversa, sia $E \subset F$, F chiuso. Se $x \in \partial E \setminus E$ allora esiste $x_n \in E, x_n \to x$ e quindi $x \in F$ perché $x_n \in F$ ed F é chiuso. Dunque $E \cup \partial E \subset F$ e quindi $E \cup \partial E \subset \overline{E}$.

2. Provare che, se O é aperto in $\mathbf{R}^n$ e $\gamma \in C([0,1], \mathbf{R}^n)$ tale che $\gamma(0) \in O$ e $\gamma(1) \notin O$, allora esiste $t \in (0,1)$ tale che $\gamma(t) \in \partial O$.

Prova. $I := \{t \in [0,1] : \gamma(s) \in O \quad \forall s < t\}$ contiene, per continuitá, $t = 0$. Posto $\bar{t} := \sup I$, risulta $\gamma(\bar{t}) \in \partial O$. Intanto, $\gamma(\bar{t}) \notin O$ perché, altrimenti $\gamma(t) \in O$ per $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ per un $\delta > 0$. Poi, $\gamma(t_n) \in O$ e $t_n < \bar{t}$ e quindi, se $t_n \to_n \bar{t}$, $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O}$. Dunque $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O} \setminus O = \partial O$.

3. Tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti

Sia $\| \cdots \|$ una norma su $\mathbf{R}^n$. Indichiamo con $\|.\|_2$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$. Proviamo che $\exists\, C \geq c > 0 : \quad c\|x\| \leq \|x\|_2 \leq C\|x\| \qquad \forall x \in E$.
Da $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ segue

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\, \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 = C\|x\|_2$$

In particolare, ció assicura che $x \to \| \cdots \|$ é funzione continua in $\mathbf{R}^n$ (munito della norma $\| \cdots \|_2$) e quindi é dotata di minimo sul compatto $\{\|x\|_2 = 1\}$, ovvero

$$\text{esiste } \underline{x}, \text{ con } \|\underline{x}\|_2 = 1 \text{ tale che:} \qquad \|x\| \geq \|\underline{x}\| \text{ se } \|x\|_2 = 1$$

e quindi $\|\frac{x}{\|x\|_2}\| \geq \|\underline{x}\| \quad \forall x \neq 0$ e quindi $\|x\| \geq \|\underline{x}\|\, \|x\|_2 = c\|x\|_2 \quad \forall x$.

Esercizio 1. Provare che, se $f \in C(A, \mathbf{R})$ é localmente costante in A (cioé per ogni $x \in A$ esiste $B_r(x)$ tale che f é costante in $B_r(x) \cap A$) ed A é connesso, allora f é costante in A.

4. Def.: $f \in C(E, \mathbf{R}^m)$ é $Lip_{loc}(E)$ se $\forall x \in E, \exists B_{r(x)}(x)$ tale che $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$.

Provare che $\quad f \in Lip_{loc}(K), \quad K$ compatto $\quad \Rightarrow \quad f \in Lip(K)$

Se no, $\exists x_j, y_j \in K : \|f(x_j) - f(y_j)\| \ \|x_j - y_j\|^{-1} \to +\infty$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $x_j \to_j x \in K, y_j \to_j y \in K$. Siccome f é limitata, necessariamente $\|x_j - y_j\| \to 0$ e quindi $x = y$. Ma $x_j, y_j \in B_{r(x)}(x)$ per j grande e $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$, contraddizione.

5. Provare con un esempio che non é vero in generale che da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento numerabile.

Sia $X = l^\infty$ dotato della metrica $\|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$. Sia $E = 2^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \{0,1\}$. Questo insieme é non numerabile. Siccome $\alpha \neq \beta \in l^\infty \Rightarrow \|\alpha - \beta\|_\infty = 1$, la famiglia (non numerabile) di aperti disgiunti $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$ é un ricoprimento di E e, chiaramente, cessa di essere tale non appena si lasci da parte anche un solo $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$.

6. Mostrare, con un esempio, che non é vero in generale che ogni successione limitata in uno spazio normato ammette una estratta convergente.

Sia $E = l^2$ dotato della norma $\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|2\right)^{\frac{1}{2}}$. Siano $e_j(i) := \delta_{ij}$. Allora $\|e_n - e_m\| = 2$ se $n \neq m$ e quindi e_n non ha estratte convergenti, dato che nessuna sua sottosuccessione é di Cauchy (una successione x_n in uno spazio metrico é di Cauchy se per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ se $n, m \geq n_\epsilon$; ovviamente ogni successione convergente é di Cauchy).

7 . A connesso per archi $\Rightarrow A$ connesso.

Siano $O_i, i = 1,2$ aperti tali che $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ con $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1,2$. Sia γ cammino continuo in A, con $\gamma(0) \in O_1, \gamma(1) \in O_2$. Siccome, per continuitá, $\gamma(t) \in O_1$ se t é vicino a $t = 0$, l'intervallo $I := \{t \in [0,1] : \gamma(\tau) \in O_1 \ \forall \tau \in [0,t)\}$ é un intervallo non vuoto e $\bar{t} := \sup I < 1$. Siccome, sempre per continuitá, $\gamma(\bar{t}) \notin O_1$, si ha che $\gamma(\bar{t}) \in O_2$ e quindi, per continuitá, $\gamma(t) \in O_2$ per $t < \bar{t}$ vicino a $\bar{t}$. Dunque $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ e cioé A é connesso.

NOTA. Il viceversa é vero se A é aperto, ma non é vero in generale.

8. **L'immagine continua di un insieme connesso é un insieme connesso**

Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ continua. Se A é connesso allora $f(A)$ 'e connesso.

Infatti, $f(A) = (f(A) \cap O_1) \cup (f(A) \cap O_2) \Rightarrow A = (f^{-1}(O_1) \cap A) \cup (f^{-1}(O_2) \cap A) \Rightarrow f^{-1}(O_1) \cap A \cap f^{-1}(O_2) \neq \emptyset \Rightarrow O_1 \cap A \cap O_2 \neq \emptyset$.

9. Dati $\alpha,\ \beta > 0,$ sia

$$f(x,y) \;=\; \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

Provare che f é prolungabile con continuitá in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Se $\alpha+\beta-2 \le 0,\ \ f(tx,ty) \;=\; t^{\alpha+\beta-2} f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2 \neq 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + \beta - 2 > 0$.

Se $\alpha \ge 2$ é $f(x,y) \le |x|^{\alpha-2}\,|y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$. Analogamente se $\beta \ge 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta < 2$. In tal caso, $\delta := \frac{\alpha+\beta-2}{2} \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y) \;=\; \frac{|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^\delta\,|y|^\delta\,)$$

ove $\delta > 0,\ \alpha - \delta > 0,\ \beta - \delta > 0,\ \alpha + \beta - 2\delta = 2.$ Dalla diseguaglianza di Holder, segue che, se $0 < r,s,\ \ r+s = 2$ allora (prendendo $p := \frac{2}{r},\ \ q := \frac{2}{s}$ nella diseguaglianza di Holder)

$$|x|^r\,|y|^s \;\le\; \frac{r}{2}\,x^2 \;+\; \frac{s}{2}\,y^2 \;\le\; x^2 \;+\; y^2 \quad \forall x,y \in \mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta} \;\le\; x^2 \;+\; y^2$ e quindi $f(x,y) \;\le\; |x|^\delta\,|y|^\delta \to_{x^2+y^2\to 0} 0.$