**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM120

**A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini**

**Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani**

Tutorato 2 - 25 Febbraio 2013

1. Sfruttando le opportune regole di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $\frac{1+\cos 2x}{\ln(\sqrt{1+x^2})}$
- $\frac{1}{\ln x}$
- $\sin^2 x$
- $x^2 \ln x$
- $\arcsin(x - \sin x)$
- $\sqrt{\frac{\sin x - x}{\cos x}}$
- $(x + \arctan x)^x$
- $\log_x(2x)$
- $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$
- $x^x$
- $\cos^2(x) + \tan^2(x)$
- $\cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
- $(1 + \ln(x - \sin x))e^{2\sin x}$
- $\ln(\cosh x) + e^{\sinh x}$
- $\arctan^2(x)\ln(\arccos x)$
- $(\tan x)^{\frac{1}{n}}$, *in* $(0; \frac{\pi}{2})$

2. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , con $\beta > 0$, definiamo nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che:

- $f(x)$ *continua* $\iff \alpha > 0$
- $f'(0)$ *esiste* $\iff \alpha > 1$
- $f'(x)$ *limitata* $\iff \alpha \geq 1 + \beta$
- $f'(x)$ *continua* $\iff \alpha > 1 + \beta$
- $f''(0)$ *esiste* $\iff \alpha > 2 + \beta$
- $f''(x)$ *limitata* $\iff \alpha \geq 2 + 2\beta$
- $f''(x)$ *continua* $\iff \alpha > 2 + 2\beta$

NB: Posta $D(f(x)) = f'(x)$ allora $D(f'(x)) = f''(x)$.

3. Dimostrare che:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(-1)^n}{2^n}(2n-1)!!\ (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

dove $(2n-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

4. Si dica se é applicabile il Teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x(x-1)}{2} & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Si verifichi poi comunque la tesi del Teorema.

5. Si dica se é applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \leq e \end{cases}$$

Si verifichi poi comunque la tesi del Teorema.

6. Si stabilisca se le seguenti funzioni verificano le ipotesi dei Teoremi di Rolle o di Lagrange negli intervalli a fianco indicati:

   - $f(x) = |x| + 3$ in $[-1; 2]$
   - $f(x) = \sin x + \cos x$ in $[0; \frac{\pi}{2}]$
   - $f(x) = \sqrt{x+1}$ in $[-1; 4]$
   - $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 7-2x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $in$ $[1; 3]$

7. Dimostrare che se $f'(x) = 0$ in un intervallo $[a; b]$ allora $f(x)$ é costante.

8. Tramite il Teorema di Lagrange verificare che per $x > 0$ si ha che $\sin x < x$.

9. Data la funzione $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$:

   - Dimostrare che non é continuna in $x = 0$.
   - Calcolare la derivata di $f(x)$.
   - Tramite le informazioni ottenute dedurre la natura di $f(x)$.

10. Dimostrare che $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x$.