AM120-2013 Settimana 5

PROPRIETÁ DELLE FUNZIONI ANALITICHE

Come giá detto, $f \in C^\infty((a,b))$ é analitica in (a,b) se é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad ogni $x_0 \in (a,b)$:

$$\forall x_0 \in I, \ \exists\, r = r(x_0): \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Ricordiamo che

Proposizione Se $f \in C^\infty((a,b))$ é tale che

$$\exists\ M,\ r > 0: \qquad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \le \frac{Mn!}{r^n} \ \ \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a,b)$$

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0) \ \ \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \ \text{ in}(a,b)$$

Prova. Posto $h(x) := f(x) - g(x)$, si tratta di provare che

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad h^{(n)}(x_0) = 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad h \equiv h(x_0) = 0 \ \text{ in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0: \quad h(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b: \ h(t) = 0 \quad \forall t \in [x_0, x]\} \ \ge \ x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow h \equiv 0$ in $[x_0, x] \Rightarrow h^{(n)}(x) = 0$ in $[x_0, b')$, $\forall n$. Se fosse $b' < b$, sarebbe, per continuitá, $h^{(n)}(b') = 0 \ \ \forall n$ e quindi $h \equiv 0$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Corollario Sia f analitica in I. Sia $(a,b) \subset I \subset (a', b')$. Allora
(i) (continuazione unica) $f \equiv 0$ in $(a,b) \quad \Rightarrow f \equiv 0$ in I
(ii)(unicitá del prolungamento analitico) Se f_1, f_2 sono analitiche in (a', b') e $f_1 \equiv f \equiv f_2$ in I (cioé f_1, f_2 sono prolungamenti analitici di f ad (a', b')) allora $f_1 \equiv f_2$ in (a', b').

Zeri di funzioni analitiche

Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Prova. Supponiamo che esistano $x_n \in (a,b)$ zeri di f e tali che $x_n \to x_0 \in (a,b)$. Per continuitá, $f(x_0) = 0$. Inoltre, per Rolle, esiste x'_n tra x_n e x_{n+1} tale che $f'(x'_n) = 0$. Per la continuitá di f', si ha che é anche $f'(x_0) = 0$. Iterando il ragionamento, si conclude che $f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Dal principio di identitá segue allora che $f \equiv 0$ in (a,b).

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica

Prova. Sia $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r} =< \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists\ \overline{k}: \qquad |a_{j+k}| \ \le\ \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \ge \overline{k},\ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $\qquad f^{(k)}(x) \ =\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, a_{j+k}\,(x-x_0)^j \qquad$ segue

$$|x-x_0| \ \le\ \underline{r} \ \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \ \le\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\ \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j}\ \ \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\quad \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j \ =\ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1), \quad$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \ \le\ \frac{k!}{\overline{r}^k(1\ -\ \underline{r}\ \ \overline{r}^{-1})^{k+1}} \ =\ \frac{\overline{r}\ k!}{(\overline{r}\ -\ \underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \ge \overline{k},\ \ |x| \le \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Corollario

Se f é analitica in (a,b) e la sua serie di Taylor di punto iniziale x_0 ha raggio di convergenza $r > 0$, allora

$$f(x) \ =\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

1. Definizione $z_n \in \mathbf{C}$ converge a z (e scriveremo $z_n \to_n z$) se e solo se $|z_n - z| \to_n 0$, ovvero, se $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon : \ |z_n - z| \le \epsilon \ \ \forall n \ge n_\epsilon$.

Siccome $|z_n - z|^2 = |Rez_n - Rez|^2 + |Imz_n - Imz|^2$, si ha che:

$$z_n \to_n z \qquad \Leftrightarrow \qquad Rez_n \to_n Rez \quad \text{e} \quad Imz_n \to_n Imz$$

La condizione necessaria e sufficente di Cauchy

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \quad n, m \ge n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_m| \le \epsilon$$

2. Definizione $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sse $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$ converge.
$\sum_n z_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_n |z_n| < +\infty$.

(**Cauchy**) $\sum_n z_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \ \exists N_\epsilon : \ |\sum\limits_{n=N}^{N+p} z_n| \le \epsilon \quad \forall N \ge N_\epsilon, \ \forall p.$

In particolare, $\sum_n |z_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n z_n$ converge e in particolare,

$\limsup_n |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \ \Rightarrow \ \sum_n |z_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum z_n$ converge. Si ha cosí

3. Cauchy-Hadamard Sia $a_n \in \mathbf{C}$, $r := \limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Allora

$$z \in \mathbf{C}, \quad |z| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \ < \ +\infty \ , \qquad |z| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \ = \ +\infty$$

r:= raggio di convergenza, $D_r := \{z : \ |z| < r\}$:= disco di convergenza .

ESEMPIO. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge in $|z| < 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \ = \ \frac{1}{1-z}$.

4. La funzione esponenziale nel campo complesso

$$\exp \ z \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{converge} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

5. Proposizione $\exp\,(z + w) \ = \ \exp z \ + \ \exp w \qquad \forall \ z, \ w \ \in \mathbf{C}.$

Segue da

6. Lemma (Prodotto secondo Cauchy). $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n| \ + \sum\limits_{n=0}^{\infty} |w_n| \ < \ +\infty \ \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} | \sum_{j+k=n} z_j \, w_k| \ < \ +\infty \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} z_j \, w_k) \ = \ (\sum_{n=0}^{\infty} z_n) \ (\sum_{n=0}^{\infty} w_n)$$

Da 6. segue 5.: $\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!} z^j\, w^k) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}) (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}) = \exp z \, \exp w$$

In particolare, $(\exp z)^p = \exp(pz) \quad \forall p \in \mathbf{N}, \ z \in \mathbf{C}$,$\exp p = (\exp 1)^p =: e^p$, $(\exp(\frac{1}{p}))^p = e$. Dunque $\exp(\frac{1}{p}) = e^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\exp(\frac{p}{q}) = (\exp\frac{1}{q})^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^{\frac{p}{q}}$: $x \to \exp x, \quad x \in \mathbf{R}$ é prolungamento continuo di $r \to e^r, r \in \mathbf{Q}$.

7. $(i) \quad \exp(-z) = (\exp z)^{-1} \quad (ii) \quad \overline{\exp z} = \exp \overline{z} \quad (iii) \quad |\exp(it)| = 1 \quad \forall t \in \mathbf{R}$

$(i) \quad \exp z \, \exp(-z) = 1 \quad (ii) \quad \exp \overline{z} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \overline{\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp z}$

$(iii) \quad |\exp(it)|^2 = \exp(it) \, \overline{\exp(it)} = \exp(it) \, \exp(-it) = 1.$

8. $Re\,(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t \qquad Im\,(\exp \ it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t$

Formule di Eulero

$$\exp(\pm\, it) = \cos t \pm i \sin t$$

$$\sin t = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}, \qquad \cos t = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Da ció segue in particolare che

- $\exp(2k\pi i) = 1 \quad \forall k \in \mathbf{Z}$, cioé $t \to \exp(it) \quad t \in \mathbf{R}$ é 2π-periodica,
- $\exp(x+iy) = \exp x \exp(iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ e $\exp(z+2\pi i) = \exp z, \quad \forall z$
- $z = x+iy, \quad x^2+y^2 = 1 \ \ y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\ ! \ t \in [0,\pi] : \quad x = \cos t$
- $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\ ! \ t \in (-\pi,\pi] : \quad z = \exp(it)$

9. Funzioni circolari ed iperboliche sui complessi

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\sinh z := \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\cosh z := \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

10. (i) $\exp(iz) \equiv \cos z + i \sin z, \qquad \exp(-iz) \equiv \cos z - i \sin z$

(ii) $\cos z \equiv \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \equiv \cosh iz \qquad \sin z \equiv \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \equiv \dfrac{\sinh(iz)}{i}$

Da (ii) segue: $\sin z, \cos z$ sono funzioni 2π-periodiche mentre $\sinh z, \cosh z$ sono $2\pi i$-periodiche. Inoltre, $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z \equiv 1$

11. Definizione di $\arg z$, $\log z$, $z \in \mathbf{C}$

Dato $z \in \mathbf{C}$, $\arg z$ (**argomento di** z) é l'unico reale in $(-\pi, \pi]$ tale che

$$z = |z| \exp(i \arg z)$$

Notiamo che, per periodicitá, $z = |z| \exp(i(\arg z + 2k\pi))$ $\forall\, k \in \mathbf{Z}$. Scriveremo

$$Arg\, z := \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

Ora, dato $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad \exp(Re\, z) \exp(i\, Im\, z) = |w| \exp(i \arg w) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exp\, Re\, z = |w| \quad \text{e} \quad Im\, z - \arg w \in 2\pi\, \mathbf{Z} \qquad \text{cioé}$$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{\log |w| + i\, Arg\, w\}$$

Porremo $$Log\, w := \{\log |w| + i\, Arg\, w\} \qquad \forall w \in \mathbf{C}, \quad w \neq 0$$

La funzione $log\, w := \log |w| + i \arg w$ si chiama valore principale del logaritmo.

Esempi. $Log\, x = \log x + 2k\pi i$, $\forall x > 0$, $Log\, x = \log |x| + (2k+1)\pi i$, $\forall x < 0$.
$log\,(-1) = \pi i$, $log\, i = \frac{\pi}{2} i$, $Log\,(1 - i) = \log \sqrt{2} + (2k - \frac{1}{4})\pi i$.

12. Potenze in C Se $w, z \in C, w \neq 0$

$$w^z := \exp(z\, Log\, w) = \exp\{z\, [\log |w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} \qquad k \in \mathbf{Z}$$

Esempi. Sia $z = n \in \mathbf{N}$; $w^n = \exp\{n\, [\log |w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} = \exp\{n \log |w|\} \exp\{n\, i(arg\, w + 2k\pi)\} = |w|^n [\exp\{i(arg\, w + 2k\pi)\}]^n = w \times \ldots \times w$ (n volte).

Se $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a^{\frac{1}{n}} = \{|a|^{\frac{1}{n}} \exp\, i\, \frac{arg\, a + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \ldots, n-1\}$ (le n radici complesse di a). Se $z \notin \mathbf{Q}$, a^z é un insieme infinito. In particolare, $e^z = \exp z$ se e solo se $z \in \mathbf{Z}$.

APPENDICE

A1. Funzioni complesse di variabile complessa.

Sia $O \subset \mathbf{C}$ aperto, ovvero $\forall z_0 \in O,\ \exists D_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\} \subset O$ e quindi, $z_0 \in O, z_n \to_n z_0 \Rightarrow z_n \in O$ definitivamente.
Sia $f : O \to \mathbf{C}$.

f é **continua** in $z_0 \in O \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ |z - z_0| \le \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \le \epsilon$

f é **derivabile** in $z_0 \in O$ con derivata $f'(z_0)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall\ \epsilon > 0\, \exists\ \delta > 0 : \ |z - z_0| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| \le \epsilon$$

Anche qui, come nel caso reale: f é derivabile in $z_0 \Rightarrow f$ é continua in z_0.

Esercizio Sia $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora $f \in C^\infty(D_r)$.
Proviamo che

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} z^n \qquad \forall z \in D_r$$

Basta provare la formula per $k = 1$. Sia $z \in D_\rho(z_0) \subset D_{r+\epsilon}$. É

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right|$$

Ora, $|z^k - z_0^k| = |(z-z_0)(z^{k-1} + z_0 z^{k-2} + \ldots + z_0^{k-2} z + z_0^{k-1})| \le |z - z_0| k (r+\epsilon)^{k-1} \Rightarrow$

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right| = |z^{n-1} - z_0^{n-1} + z_0(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \ldots + z_0^{n-2}(z - z_0)| \le$$

$$\le |z^{n-1} - z_0^{n-1}| + |z_0|\,|z^{n-2} - z_0^{n-2}| + \ldots + |z_0|^{n-2}\,|z - z_0| \le$$

$$\le |z - z_0| \left[(n-1)(r+\epsilon)^{n-2} + (n-2)|z_0|(r+\epsilon)^{n-3} + \ldots + |z_0|^{n-2}\right] \le$$

$$\le \frac{n(n-1)}{2} |z - z_0|\, (r+\epsilon)^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right| \le |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2} (r+\epsilon)^{n-2} \to_{z \to z_0} 0$$

perché $\rho < r \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} < +\infty$.

A2: Prova di 6. Siano $s_N := \sum\limits_{n=0}^{N} z_n, \quad \sigma_N := \sum\limits_{n=0}^{N} w_n$

$$p_N := \sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{j+k=n} z_j w_k\Big) = z_0w_0+(z_0w_1+z_1w_0)+\ldots+(z_0w_N+z_1w_{N-1}+\ldots+z_{N-1}w_1+z_Nw_0)$$

$= z_0(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_Nw_0.$ Dunque

$$|s_N\,\sigma_N \,-\, p_N| \;=$$

$$|z_0(w_0+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_0+\ldots+w_N)+z_N(w_0+\ldots+w_N)-$$

$$[z_0\,(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1\,(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_{N-1}(w_0+w_1)+z_N\,w_0]| =$$

$$|z_1\,w_N + z_2(w_{N-1}+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_2+\ldots+w_N)+z_N\,(w_1+\ldots+w_N)| \;\le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left[|z_j|\,|\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}|\right] + \sum_{j=n+1}^{N}\left[|z_j|\,|\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}|\right] \;\le$$

$$\le \left[\sum_{j=1}^{n}|z_j|\right]\left[\sum_{k=N-n+1}^{\infty}|w_k|\right] + \left[\sum_{j\ge n+1}|z_j|\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|\right] \qquad n:=[\frac{N}{2}].$$

Da

$$\sum_{k=N-[\frac{N}{2}]+1}^{\infty}|w_k| \to_{N\to+\infty} 0, \quad \sum_{j\ge[\frac{N}{2}]+1}|z_j| \to_{N\to+\infty} 0 \qquad \sum_j |z_j| < +\infty, \;\; \sum_{k=1}^{\infty}|w_k| < \infty$$

segue $|s_N\,\sigma_N \,-\, p_N| \to_{N\to+\infty} 0$ e quindi $\lim\limits_N p_N \;=\; \lim\limits_N s_N\,\sigma_N.$

ESERCIZIO. $e := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ É

$(1+\frac{1}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k-1)\ldots n}{(n-k)!n\,n\ldots n} < 1$

e quindi $$\limsup_n (1+\frac{1}{n})^n \;\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Viceversa, $n > n_0 \;\;\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n > \sum\limits_{k=0}^{n_0}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} \;\;\Rightarrow\;\; \liminf_n(1+\frac{1}{n})^n \ge \sum\limits_{k=0}^{n_0}\frac{1}{k!},\; \forall n_0$

perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = (1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\;\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \to_n 1.$ Quindi

$$\liminf_n (1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

A3: Funzioni circolari e loro proprietá

$$c(t) := Re(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \qquad s(t) := Im(\exp\, it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad t \in \mathbf{R}$$

(i) c ed s sono funzioni analitiche in tutto $\mathbf{R}$ e $c^2(t) + s^2(t) = |\exp\, it|^2 \equiv 1$

(ii) Derivando, come é lecito, termine a termine le due serie, si trova

$$s'(t) = c(t), \quad c'(t) = -s(t), \quad s'' = -s, \quad c'' = -c, \quad s^{(4)} = s, \quad c^{(4)} = c$$

$$D^{2n}s = (-1)^n s, \quad D^{2n+1}s = (-1)^n c, \quad D^{2n}c = (-1)^n c, \quad D^{2n+1}c = (-1)^{n+1}s$$

(iii) esiste $t_0 > 0$ tale che $c(t_0) = 0,\ s(t_0) = 1$ e $c(t) > 0 \quad \forall t \in [0, t_0)$.

É $c(0) = 1$. Proviamo che $c(t)$ si annulla in $(0, +\infty)$. Sia $c > 0$ in $[0, \bar{t}\,]$ e quindi $c'' \equiv -c < 0$ in $[0, \bar{t}\,]$ e quindi, essendo $c'(0) = -s(0) = 0$, $c' < 0$ in $[0, \bar{t}\,]$. Fissato $\underline{t} \in (0, \bar{t}\,)$, dalla formula di Taylor con resto Lagrange, troviamo

$$0 < c(\bar{t}) \le c(\underline{t}) + c'(\underline{t})(\bar{t} - \underline{t}) \quad \text{e quindi} \quad \bar{t} < \underline{t} - \frac{c(\underline{t})}{c'(\underline{t})}$$

(iv) $\hat{s}(t) := s(t + t_0) = c(t) \quad \forall t$ e quindi $c(t) = c(t + 4t_0), \quad s(t) = s(t + 4t_0) \quad \forall t.$

Infatti $\qquad (D^{2n}\hat{s})(0) = (D^{2n}\hat{s})(t_0) = (-1)^n s(t_0) = (-1)^n = (D^{2n}c)(0)$

$$(D^{2n+1}\hat{s})(0) = (D^{2n+1}\hat{s})(t_0) = (-1)^n c(t_0) = 0 = (D^{2n+1}c)(0)$$

Essendo analitiche, $\hat{s} \equiv c$. Allora é anche, derivando, $c(t + t_0) = -s(t) \quad \forall t$. Ma allora $s(t + 2t_0) = s(t + t_0 + t_0) = c(t + t_0) = -s(t)$ e quindi

$$s(t + 4t_0) = s(t + 2t_0 + 2t_0) = -s(t + 2t_0) = s(t)$$

$$c(t + 4t_0) = s(t + t_0 + 4t_0) = s(t + t_0) = c(t)$$

Definizione. $\quad \pi := 2t_0 = 2min\{t > 0 : c(t) = 0\}$

Formula di duplicazione. $c(a+b) + is(a+b) = \exp(i(a+b)) = \exp(ia)\exp(ib)$ $= [c(a) + is(a)]\,[c(b) + is(b)] = c(a)c(b) - s(a)s(b) + i[s(a)c(b) + c(a)s(b)] \quad \Rightarrow$

$$c(a + b) = c(a)c(b) - s(a)s(b), \qquad s(a + b) = s(a)c(b) + c(a)s(b)$$

Formula di bisezione. $(s^2(\frac{t}{2}) + \frac{c(t)}{2})' = s(\frac{t}{2})\, c(\frac{t}{2}) - \frac{s(t)}{2} = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow$ $s^2(\frac{t}{2}) + \frac{c(t)}{2} \equiv s^2(0) + \frac{c(0)}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$$s^2(\frac{t}{2}) = \frac{1 - c(t)}{2} \quad \forall t$$

Usando le formule di duplicazione si ottengono facilmente le

(i) **Formule di prostaferesi.** $s(a) + s(b) = 2s(\frac{a+b}{2})\, c(\frac{a-b}{2})$

$$c(a) + c(b) = 2c(\frac{a+b}{2})\, c(\frac{a-b}{2}), \qquad c(a) - c(b) = -2s(\frac{a+b}{2})\, s(\frac{a-b}{2})$$

(i) **Formule di Werner.** $2s(a)c(b) = s(a+b) + s(a-b)$

$$2c(a)c(b) = c(a+b) + c(a-b) \qquad 2s(a)s(b) = c(a-b) - c(a+b)$$