

AM120-2013 Settimana 4

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

Sia $f \in C^\infty((a, b))$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$. Sia $h := x - x_0$.

SERIE DI TAYLOR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \quad x \in \mathbf{R}$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 .

SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR, ANALITICITÀ

f si dice **svilupabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r > 0 : f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n, \quad \forall h \in (-r, r)$$

f si dice **analitica in (a, b)** se é svilupabile in serie di Taylor attorno ad ogni $x_0 \in (a, b)$.

NOTA. $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é $C^\infty(\mathbf{R})$ ma non é svilupabile in serie di Taylor attorno ad $x_0 = 0$ perché $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

ESEMPIO 1 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$

(serie di Mac Laurin, cioè di punto iniziale $x_0 = 0$). Se $f(x) := \frac{1}{1-x}$, é $f^{(n)}(0) = n!$

Notiamo che il resto n-esimo nella formula di Taylor (di punto iniziale zero) é

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow_n 0 \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Quindi (forse?) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \forall x \in (-1, 1)$

ESEMPIO 2. $\log(1-x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ per $|x| < 1$

Notiamo che, per il criterio della radice, la serie di Taylor converge se $|x| < 1$. Che la serie abbia per somma la funzione data, segue derivando la formula di Taylor

$$-\log(1-x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n+1}(x) \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + R'_{n+1}(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

e quindi $R'_{n+1}(x) = \frac{x^n}{1-x} \rightarrow_n 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$ Ora, se $|x| < 1$, per Lagrange, esiste ξ con $|\xi| < |x|$ tale che

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left| \frac{R_{n+1}(x)}{x} \right| = |R'_{n+1}(\xi)| = \left| \frac{\xi^{n+1}}{1-\xi} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \rightarrow_n 0$$

La convergenza della serie di Taylor ad f segue allora da

Proposizione $f \in C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r > 0 : R_n(x_0, h) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall h \in [-r, r]$.

Infatti $f(x_0 + h) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n = R_N(x_0, h)$.

• **(criterio di sviluppabilit )** In particolare, se $\exists r > 0, M_r > 0 :$

$$\sup_{|h| \leq r} |f^{(n)}(x_0 + h)| \leq \frac{M_r n!}{r^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

allora f é somma, per ogni $|h| < r$, della sua serie di Taylor centrata in x_0 .
Infatti, $|R_n(x_0, h)| = \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \bar{t}h) \right| \leq \frac{M_r |h|^{n+1}}{r^{n+1}} \rightarrow_n 0$ se $|h| < r$.

ESEMPIO. La funzione $\ln x$ é sviluppabile in serie di potenze attorno ad ogni $x_0 > 0$, cio  é analitica in \mathbf{R}^+ .

Infatti, siccome $D^{n+1} \ln x = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$, fissato $x_0 > 0$, risulta

$$|h| < \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad |D^n \ln(x_0 + h)| = \frac{n-1!}{|x_0 + h|^n} < (n-1)! \left(\frac{2}{x_0}\right)^n$$

Quindi la serie di Taylor di $\ln x$ centrata in x_0 ha per somma $\ln x$ in $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$.

Nota. La serie di Taylor di $\ln x$ centrata in $x_0 > 0$, e data da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-x_0)^n}{n x_0^n}$ converge in effetti se $|x - x_0| < x_0$. Vedremo che cio , insieme all'analiticit  di $\ln x$, implica che $\ln x$ coincide con la somma della sua serie di Fourier, centrata in x_0 , in tutto l'intervallo in cui tale serie converge, cio , in questo caso, in $|x - x_0| < x_0$.

• **(criterio di analiticit )** In particolare, se $\exists M, r > 0$ tali che:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{r^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in (a, b) \quad e \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

allora $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cio  f é analitica in (a, b) .

- (criterio di 'interezza') Se per ogni $r > 0$ esiste $M_r > 0$ tale che

$$\max_{|x| \leq r} |f^{(n)}(x)| \leq M_r \quad \forall n$$

allora f é **intera**, cioè é somma della sua serie di Mac Laurin su tutto \mathbf{R} .

$$\text{Infatti, } |x| \leq r \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{n+1!} \sup_{|x| \leq r} |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{M_r r^{n+1}}{n+1!} \rightarrow_n 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie validi in tutto \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \\ \sinh x &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} & \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \end{aligned}$$

SERIE BINOMIALE

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (*)$$

Si ha, $\frac{d^n}{dx^n} (1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Notiamo che, posto

$a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)||x|^n}{n!}$, é $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow |x|$ e quindi la serie converge se $|x| < 1$. Inoltre, $\forall r > 1, \exists c_r > 0 : \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!} \leq c_r r^n$ e quindi $-1 < -1 + \delta \leq x \leq b \Rightarrow$

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} (1+x)^\alpha \right| \leq \frac{c_r b^\alpha r^n n!}{\delta^n} \quad \text{e quindi } f(x) = (1+x)^\alpha \text{ é analitica in } (-1 + \delta, b)$$

Dunque $(1+x)^\alpha$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno a $x_0 = 0$. Come vedremo, l'analiticitá piú la convergenza della serie di Taylor in $|x| < 1$ dá (*). Di qui si ottiene anche che, per $x \in (-1, 1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n-1!!}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n}$$

NOTA. In tutti gli esempi visti il resto converge a zero per tutti e solo gli h in un intervallo del tipo $|h| < r$. Non é un caso....

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, $x \in \mathbf{R}$, chiameremo serie di potenze la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (SP)$$

L'insieme delle x per cui (SP) converge é necessariamente un intervallo centrato nell'origine, detto intervallo di convergenza. Il suo raggio si chiama raggio di convergenza della serie.

Infatti, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge, allora $|a_n x_0^n|$ é limitata e quindi

$$|x| < |x_0| \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq \sup_n |a_n x_0^n| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < +\infty$$

Dunque il raggio di convergenza é $\sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$.

Proposizione (Formula di Cauchy-Hadamard).

Il raggio di convergenza r di (SP) é dato dalla formula

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

($\frac{1}{0} := +\infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$). Infatti

$$|x| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < +\infty, \quad |x| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = +\infty$$

Ciò segue subito dal criterio della radice:

$$|x| \limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_n (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < +\infty$$

$$|x| \limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_n (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = +\infty$$

Dunque $\{|x| < r\}$ é l'intervallo di convergenza.

NOTA. $\exists r := \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{r} \Rightarrow r$ é raggio di convergenza.

Ad esempio, la serie di Mac Laurin di $\frac{1}{1-x}$, di $\log(1+x)$, di $(1+x)^\alpha$, $\alpha \notin \mathbf{N}$ hanno raggio di convergenza 1 (é utile ricordare che $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow_n 1$).

ESEMPI (di serie di potenze).

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \rightarrow +\infty$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \rightarrow +\infty$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \rightarrow 1$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}.$$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$ (serie di Mac Laurin di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$). Ha raggio di convergenza 1 (come tutte le serie binomiali).

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze può avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

In (3) :

se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$

Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$ (Leibnitz)

se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.

In (4) : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} = +\infty$ perché, da

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} \left(\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad (\text{ formula di Stirling })$$

segue $\frac{n^n}{n! e^n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} + o(\sqrt{n})}$. Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ (Leibnitz).

In (5) : siccome

$$\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

la serie converge in $x = 1$ (criterio di Leibnitz) mentre in $x = -1$ diverge perché, per Stirling,

$$\frac{2n-1!!}{2n!!} = \frac{2n!}{(2n!!)^2} = \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Proposizione. Sia $r > 0$ il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Allora

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} [a_n x^n] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

NOTA $\limsup |n a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ e quindi le 'serie derivate' (ovvero le 'serie delle derivate') $D^k f = \sum_{n=0}^{\infty} D^k(a_n x^n) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ hanno lo stesso raggio di convergenza della serie data.

Prova. Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < r$. Essendo le due serie assolutamente convergenti per ogni $|x| < r$, si ha

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(x+h)^n - x^n - n h x^{n-1}}{h} \right|$$

Dal binomio di Newton, ed effettuando il cambio di indici $m := n - 2$, $j := k - 2$, troviamo

$$\begin{aligned} & \left| (x+h)^n - x^n - n h x^{n-1} \right| = \\ & = \left| x^n + n x^{n-1} h + h^2 \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} x^{n-k} h^{k-2} - (x^n + n h x^{n-1}) \right| \\ & = h^2 \left| \sum_{j=0}^m \frac{m+2!}{j+2! (m-j)!} x^{m-j} h^j \right| = h^2 \left| \sum_{j=0}^m \frac{(m+2)(m+1)m!}{(j+2)(j+1)j! (m-j)!} x^{m-j} h^j \right| \leq \\ & h^2 n(n-1) \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j! (m-j)!} |x|^{m-j} |h|^j = h^2 n(n-1) (|x| + |h|)^{n-2} \end{aligned}$$

Dunque, se $|x| + |h| < r$, e quindi $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) (|x| + |h|)^{n-2} < +\infty$, troviamo

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) (|x| + |h|)^{n-2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Corollario Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Allora, se $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $|x| < r$, si ha che $f \in C^\infty((-r, r))$ e $f^{(n)}(0) = n! a_n$, e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é la serie di Mac Laurin di f . Inoltre

$$D^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

ESEMPIO $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1, 1)$