Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 9: Funzioni continue. Ripasso per il secondo esonero.

Soluzione Esercizio 9.1.

(9.1.1) La funzione è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (essendo composizione di funzioni continue). Inoltre, può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$: infatti

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi l'estensione continua è data da

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(9.1.2) La funzione, continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, non può essere estesa in modo continuo su tutto $\mathbb{R}$. Infatti, non esiste il limite di tale funzione per $x \to 0$, o meglio

$$\lim_{x\to 0^\pm} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

(9.1.3) Poiché

$$\lim_{x\to 1^-} x[x] = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} x[x],$$

la funzione non può essere estesa in modo continuo.

(9.1.4) Si ha $f(x) := \{x\} + \{-x\} = -([-x] + [x])$ e quindi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

poiché $[-x] = -1 - [x]$ se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(9.1.5) Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} |[x]|^{\{x\}} = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} |[x]|^{\{x\}}.$$

Quindi la funzione non può essere estesa in modo continuo.

(9.1.6) Si ha

$$f(x) := \frac{1}{x^4} \wedge x^2 = \begin{cases} \frac{1}{x^4} & \text{se } |x| \geqslant 1, \\ x^2 & \end{cases}$$

In effetti, f è continua su tutto $\mathbb{R}$, poiché $\frac{1}{x^4}$ e x^2 coincidono in ± 1.

(9.1.7) È

$$\frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Tale funzione è quindi continua su tutto $\mathbb{R}$.

(9.1.8) Siano

$$A := \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right], \qquad B := \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right].$$

Allora

$$\sin(x) \vee \cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } x \in A + 2\pi\mathbb{Z}, \\ \sin(x) & \text{se } x \in B + 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tale funzione è continua poiché $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ e $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Soluzione Esercizio 9.2. (9.2.1) Sicuramente, $x \neq 2$. Si vede poi facilmente che

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1.$$

Quindi, se $x < 1$, la serie converge assolutamente.

(9.2.2) La serie converge assolutamente. Infatti, $n^3 + 3 \geqslant n^3$ e $\frac{\sqrt{n}}{n} \leqslant 1$ se n è sufficientemente grande, i.e. se $n \geqslant N$, per un qualche $N \in \mathbb{N}$. Quindi

$$\left|\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}\right| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^3+3} \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{\sqrt{n}}{n} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geqslant N.$$

(9.2.3) La serie converge per il criterio di Leibniz.

(9.2.4) Se $|x| < 1$, la serie converge assolutamente per (e.g.) il criterio della radice (si può anche far ricorso a delle stime elementari). Se $|x| > 1$, la serie diverge assolutamente (e quindi diverge se $x > 1$). Se $x \in \{\pm 1\}$, si vede ancora che la serie converge assolutamente. Se $x < -1$, la serie non converge.

(9.2.5) Ricordiamo che, per definizione, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\cosh(n)}} = \frac{|x|}{e}\sqrt[n]{\frac{2}{1+e^{-2n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x|}{e}.$$

Quindi, se $|x| < e$, la serie converge assolutamente e diverge assolutamente per $|x| > 1$. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^n}{e^n + e^{-n}} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n e^n}{\cosh(n)} \text{ non converge,}$$

la serie è divergente per $x \geqslant e$, e non converge per $x = -e$. Si vede poi che la serie non converge anche per $x < -e$.

(9.2.6) La serie è divergente (nonostante il primo termine converga per il criterio di Leibniz). Infatti, ricordiamo che $\tan(\cdot)$ è periodica di periodo π. Quindi

$$\tan(10) = \tan(3\pi + (10 - 3\pi)) = \tan(10 - 3\pi) \overset{(a)}{<} 1.$$

Verifichiamo (a). È $0 < 10 - 3\pi < 1$, e $\tan(\cdot)$ è monotona crescente tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Quindi

$$\tan(10 - 3\pi) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 10 - 3\pi < \frac{\pi}{4} = \arctan(1) \quad \Leftrightarrow \quad \pi > 3 + \frac{1}{13}$$

ed è vero poiché $\pi > 3 + \frac{14}{100} > 3 + \frac{1}{13}$. Allora

$$\sum_{n\geqslant 4} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{(\tan(10))^n} \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(\tan(10))^n} = +\infty,$$

poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(\tan(10))^n} = +\infty$.

Soluzione Esercizio 9.3.

(9.3.1)

$$\frac{\sin(|x|)}{\log(1+x^2)} = \underbrace{\frac{\sin(|x|)}{|x|}}_{\to 1}\underbrace{\frac{x^2}{\log(1+x^2)}}_{\to 1}\underbrace{\frac{|x|}{x^2}}_{\to+\infty} \xrightarrow{x\to 0} +\infty.$$

(9.3.2) Poniamo $\alpha(x) := \frac{\tan(x)}{x}$. Abbiamo

$$\log(\sinh(x))\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\log\left(e^x(1-e^{-2x})\right) - \log(2)}{x} = \underbrace{\alpha\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}\left(1 + \frac{\log(1-e^{-2x})}{x} - \frac{\log(2)}{x}\right) \xrightarrow{x\to\infty} 1.$$

(9.3.3) Il limite non esiste. Infatti, notiamo che se $x \in [2, 2+\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ allora $[x] = 2$ e $\{x\} = x - [x] = x - 2$. Se invece $x \in (2-\varepsilon, 2)$, allora $[x] = 1$ e $\{x\} = x - [x] = x - 1$. Quindi

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 + \{x\}}{[x]} = 5 \neq 2 = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 + \{x\}}{[x]}.$$

(9.3.4) $\cos(\pi n^2) = (-1)^{n^2}$, quindi $a_n := 1 - \cos(\pi n^2) \leqslant 2$. Inoltre, $a_{2n+1} \equiv 2$ per ogni n ($(2n+1)^2$ è dispari per ogni n). Quindi $\limsup_{n\to\infty} \left(1 - \cos\left(\pi n^2\right)\right) = 2$.

Soluzione Esercizio 9.4.

(9.4.1) Poniamo $E := \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 4x^2 - 7x + 3 \neq 0\right\}$. Il suo complementare è un insieme chiuso (si vede senza fare alcun conto: $\complement E$ può essere o il vuoto, o un punto oppure due punti distinti), quindi E è aperto.

(9.4.2) L'insieme E non è né aperto né chiuso. Non è aperto poiché non contiene $(a_n - r, a_n + r)$ per alcun $r > 0$, se n è sufficientemente grande, dove $a_n := \tan\left(\frac{2n-1}{4n}\pi\right)$ $(a_n \to \infty)$ (i.e., esistono punti non interni). Non è chiuso poiché non contiene tutti i suoi punti di accumulazione (è $\mathscr{D}E = \left[-\frac{\pi}{2}, 1\right] \cup \{\infty\}$). Perciò $\overline{E} = \left[-\frac{\pi}{2}, 1\right] \cup \left\{a_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{\infty\}$.

Soluzione Esercizio 9.5. Ricordiamo che una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. se

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \text{ tale che } |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \ \forall y \in (x - \delta, x + \delta) \text{ (cioè per ogni } x, y \text{ t.c. } |x - y| < \delta).$$

(9.5.1) Fissato $x \in \mathbb{R}$, si vede che comunque fissato $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ soddisfa la definizione.

(9.5.2) Presi $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, dobbiamo trovare un $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ tale che

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon$$

Abbiamo $\left|x^2 - y^2\right| = |x - y|\,|x + y| < \delta\,(2\,|x| + \delta)$. Quindi, si tratta di trovare un δ tale che

$$\delta^2 + 2\delta\,|x| - \varepsilon < 0,$$

cioè è sufficiente scegliere un qualsiasi $\delta \in \left(0, \sqrt{|x|^2 + 4\varepsilon^2} - 1\right)$.

(9.5.3) Presi $x > 0$, $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\log(y) - \log(x)| < \varepsilon$$

Possiamo scrivere $y = x + \tau$, con $\tau \in (-\delta, \delta)$. Allora,

$$|\log(y) - \log(x)| = \left|1 + \frac{\tau}{x}\right|.$$

Ricordiamo ora il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$. Dalla definizione di limite, abbiamo che se δ è sufficientemente piccolo, allora

$$\left|\frac{\log(1 + \frac{\tau}{x})}{\frac{\tau}{x}} - 1\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\log\left(1 + \frac{\tau}{x}\right)\right| < \frac{|\tau|}{x}(\varepsilon + 1) < \frac{\delta}{x}(\varepsilon + 1) < \varepsilon.$$

Quindi, basta scegliere $\delta < \varepsilon(\varepsilon + 1)x$.

(9.5.4) Presi $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, scriviamo $y = x + \tau$, $\tau \in (-\delta, \delta)$. Quindi

$$|e^y - e^x| = \left|e^{x+\tau} - e^x\right| = e^x\left|e^{\tau - 1}\right| < e^x\delta(\varepsilon + 1) < \varepsilon.$$

È sufficiente scegliere $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) e^{-x}$.

Soluzione Esercizio 9.6. Chiaramente, tale limite non può essere $\pm\infty$ (altrimenti, verrebbe contraddetta la periodicità di f). Supponiamo allora che $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tale che $\forall\varepsilon > 0\,\exists X > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x > X$. Comunque preso $x \in \mathbb{R}$, prendiamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $x + kT > X$. Allora

$$|f(x) - \ell| = |f(x + kT) - \ell| < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, otteniamo che $f(x) = \ell$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.