Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 8: Funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.1. Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

(8.1.1) $\sqrt{x-19}$,

(8.1.2) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$,

(8.1.3) $\sqrt[4]{\log_2(3x^2+2x)}$,

(8.1.4) $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$,

(8.1.5) $\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}+\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$,

(8.1.6) $\sqrt{\frac{|x|-|x+1|}{2}-1}$,

(8.1.7) $x^{\frac{1}{\log(x)}}$,

(8.1.8) $\sqrt{\log\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\alpha}\right)}$ $(\alpha > 0)$.

Esercizio 8.2. Trovare l'immagine $f(C)$, dove f e C sono:

(8.2.1) $f(x) = 1-\frac{1}{x}$, $C = (0,1)$,

(8.2.2) $f(x) = |x-1|$, $C = (0,5)$,

(8.2.3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $C = [2,+\infty)$,

(8.2.4) $f(x) = x^2+x+1$, $C = \mathbb{R}$,

(8.2.5) $f(x) = x+[x]$, $C = \mathbb{R}$,

(8.2.6) $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $C = \mathbb{R}$.

Esercizio 8.3. Trovare la retroimmagine $f^{-1}(C)$, dove f e C sono:

(8.3.1) $f(x) = \log(x)$, $C = (0,1)$,

(8.3.2) $f(x) = 2x+3$, $C = [1,3]$

(8.3.3) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $C = [0,1)$,

(8.3.4) $f(x) = [x^2+x]$, $C = [0,5]$,

(8.3.5) $f(x) = x+[x]$, $C = \left\{\frac{3}{2}\right\}$,

(8.3.6) $f(x) = \frac{x-|x|}{2}$, $C = (-1,1)$.

Esercizio 8.4. Determinare insieme di definizione e l'espressione della funzione composta $g\circ f$, dove g ed f sono

(8.4.1) $g(x) = \sin(x)$, $f(x) = \sin(x)$,

(8.4.2) $g(x) = e^{2x}$, $f(x) = x^2+1$,

(8.4.3) $g(x) = \sqrt{e^x-1}$, $f(x) = \sin(x)$,

(8.4.4) $g(x) = \sqrt{\log(x)}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Esercizio 8.5. Dare un esempio di un'applicazione $f : A \to B$ che sia

(8.5.1) iniettiva ma non suriettiva,

(8.5.2) suriettiva ma non iniettiva,

(8.5.3) iniettiva e suriettiva,

(8.5.4) né iniettiva, né suriettiva.

Esercizio 8.6. Dimostrare che un'applicazione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se per ogni $X \subset A$ e per ogni $Y \subset A$ si ha $f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$.

Esercizio 8.7. Determinare se le seguenti funzioni $f : A \to B$ sono iniettive e/o suriettive:

(8.7.1) $f(x) = [x]+\{x\}$, $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$,

(8.7.2) $f(x) = x-\{x\}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$,

(8.7.3) $f(x) = \sin(x)$, $A = [-\pi,\pi]$, $B = [-1,2]$,

(8.7.4) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $B = \mathbb{R}$.

Esercizio 8.8. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

(8.8.1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$,

(8.8.2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin(x)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$,

(8.8.3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$, $m,n > 0$(1),

(8.8.4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$,

(8.8.5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$,

(8.8.6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}x^i}{\sum_{i=0}^{m}b_{m-i}x^i}$, $k,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, a_i, $b_i\in\mathbb{R}$, $a_0,b_0\neq 0$,

(8.8.7) $\frac{\cot(x)}{x}$.

Esercizio 8.9. Sia $f : A \to A$. Dimostrare che f è *idempotente* (cioè tale che $f\circ f = f$) se e solo se $f|_{f(A)} = \mathrm{id}_{f(A)}$.

(1) Ricordare che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.