Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 7: Serie numeriche. Elementi di topologia di $\mathbb{R}$ — 2.

Soluzione Esercizio 7.1.

(7.1.1) $|\sin(n)| \leqslant 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi $|\sin(\sin(n))| \leqslant \sin(1) \in (0,1)$. Quindi la serie converge assolutamente per il criterio del confronto.

(7.1.2) Per il criterio di condensazione di Cauchy, $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\sqrt{n}} \sim \sum_{n\geqslant 1} 2^{n-\sqrt{2^n}}$. Ora,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-2^{n/2}}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot 2^{-\frac{2^{n/2}}{n}} = 0.$$

Quindi la serie è convergente.

(7.1.3) Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2} = \frac{1}{2},$$

la serie converge per il criterio della radice.

(7.1.4) Abbiamo

$$\frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \frac{4}{27}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{27} < 1.$$

Quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

(7.1.5) Per il criterio del confronto asintotico, si ha che

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{3n+5}\right) \sim \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(3n+5)}.$$

Segue che la serie è convergente.

(7.1.6) La serie è convergente, come si vede subito applicando il criterio di condensazione di Cauchy.

(7.1.7) La serie è convergente, per il criterio del confronto asintotico.

(7.1.8) $\prod_{j=1}^{n^n} \sin\left(\frac{22}{7}j\pi\right) = 0 \quad \forall n \geqslant 3$. Quindi la serie è convergente.

Soluzione Esercizio 7.2.

(7.2.1) Se $x = 1$ la serie diverge, mentre se $x = -1$ non converge. Supponiamo ora $|x| > 1$. In tal caso, il termine generale non è infinitesimo: infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{2+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n\left(\frac{2}{x^n}+1\right)} = 1.$$

Se invece $|x| < 1$, dalla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$|2+x^n| = |2-(-x^n)| \geqslant |2-|x^n|| \geqslant 2 - \underbrace{|x^n|}_{<1} > 1.$$

Dunque

$$\left|\frac{x^n}{2+x^n}\right| < |x|^n,$$

cioè la serie converge assolutamente per il criterio del confronto.

(7.2.2) Se $x = 0$, la serie diventa $\sum \frac{1}{2}$, che è chiaramente divergente. Se $x < 0$, $e^{n^2 x} \to 0$, i.e. $\frac{1}{1+e^{n^2 x}} \to 1$, perciò la serie è ancora divergente. Sia ora $x > 0$. Abbiamo

$$e^{n^2 x} \geqslant n^2 x \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geqslant \frac{2}{x}\log(n) + \frac{\log(x)}{x} \quad \Leftarrow \quad n^2 \geqslant \frac{2}{x} n + \frac{\log(x)}{x} \quad \Leftarrow \quad n \geqslant \left[\frac{1}{x}\left(1 + \sqrt{1 + x\log(x)}\right)\right] + 1^{(1)}.$$

Quindi la serie è convergente per il criterio del confronto.

(7.2.3) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^{x^n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(x^n \log(x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1], \\ +\infty & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi la serie è divergente per ogni $x > 0$.

(7.2.4) Sicuramente, $x \neq -1$. Ora, sia

$$\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\sin(x^n)|}{|1+x|^n}} = \frac{1}{|1+x|}.$$

Abbiamo che $\ell < 1$ se $x \in A := (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Quindi, la serie converge assolutamente se $x \in A$ e diverge assolutamente se $x \in \complement A \backslash \{-2, 0\}$. Se $x = 0$, si ha una somma di zeri, e quindi la serie è ancora assolutamente convergente. Se invece $x = -2$, la serie diventa $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin((-1)^n 2^n)$, che non converge. Dobbiamo ora discutere la convergenza della serie per $x \in (-2, 0)\backslash\{-1\}$. Se $x \in (-2, -1)$, allora $1 + x \in (-1, 0)$, cioè $1 + x = -y$, per qualche $y \in (0, 1)$, e quindi $x^n = (-1)^n (1 + y)^n$, e

$$\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} = \frac{\sin\left((-1)^n (1+y)^n\right)}{(-1)^n y^n} = \frac{\sin((1+y^n))}{y^n} \geqslant 0 \quad (\sin(\cdot) \text{ è dispari}).$$

In effetti, $\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} = \left|\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}\right|$, e abbiamo già visto che la serie diverge assolutamente per $x \in (-2, 0)\backslash\{1\} \supset (-2, -1)$. Sia ora $x \in (-1, 0)$, i.e. $x = -y$ per qualche $y \in (0, 1)$. Poiché $x^n \to 0$, $\sin(x^n) \sim x^n$, i.e. (criterio del confronto asintotico)

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} \sim \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(\frac{y}{1-y}\right)^n.$$

Ora, se $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, la successione (a termini positivi) $\left(\frac{y}{1-y}\right)^n$ è decrescente e infinitesima, quindi per Leibniz la serie è convergente. Sia ora $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, i.e. $x = -y$ per qualche $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Abbiamo sempre $\sin(x^n) \sim x^n$, e quindi per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{(1+x)^n} = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(\frac{y}{1-y}\right)^n,$$

e $\frac{y}{1-y} = -1 + \frac{1}{1-y} > -1 + 2 = 1$ (poiché $y > \frac{1}{2}$), cioè $\left(\frac{y}{1+y}\right)^n \to \infty$. Quindi la serie non converge.

(7.2.5) Occorre sicuramente richiedere $x > 0$ per poter definire $\log(n^2 x)$. Poi, abbiamo $\frac{\log(n^2 x)}{n^2+x^2} \leqslant \frac{2\log(n)}{n^2} + \frac{\log(x)}{n^2}$. Poiché $\frac{\log(n)}{\sqrt{n}} \to 0$, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{2\log(n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ per ogni $n > N$. Allora

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log(n^2 x)}{n^2 + x^2} \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{3}{2}} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} + 2\sum_{n>N} n^{-\frac{3}{2}} + \log(x) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie converge $\forall x > 0$.

(7.2.6) La serie converge se $\alpha < \beta$, e diverge altrimenti. Infatti, se $\alpha < \beta$, dalla disuguaglianza di Stirling semplificata,

$$\frac{n^{n\alpha}}{(n!)^\beta} < n^{n(\alpha-\beta)} \underbrace{e^{-n\beta}}_{\leqslant 1} \leqslant n^{n(\alpha-\beta)}.$$

Poiché $n^{\alpha-\beta} \to 0$, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $n^{\alpha-\beta} \leqslant \frac{1}{2}$ per ogni $n > N$. Perciò

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n\alpha}}{(n!)^\beta} < \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Sia ora $\alpha \geqslant \beta$. Allora

$$\frac{n^{n\alpha}}{(n!)^\beta} > \frac{n^{n\alpha}}{n^{n\beta}} = n^{n(\alpha-\beta)} =: a_n(\alpha, \beta).$$

Se $\alpha = \beta$, $a_n(\alpha, \beta) \equiv 1$, mentre se $\alpha > \beta$, $a_n(\alpha, \beta) \to \infty$. In entrambi i casi, la serie è divergente.

(1) Si può assumere che $x\log(x) \geqslant -e^{-1} > -1$ per ogni $x > 0$ (si vede facilmente dallo studio di funzione...).

(7.2.7) Se $x \geqslant 1$, la successione $x^{\sqrt{n}}$ non è infinitesima, e quindi la serie diverge. Sia allora $x \in (0,1)$. Per il criterio di condensazione di Cauchy, la serie avrà lo stesso carattere di
$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n x^{\sqrt{2^n}} = \sum_{n\geqslant 0} 2^n x^{2^{\frac{n}{2}}}.$$
Applichiamo allora il criterio della radice a quest'ultima serie:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n x^{2^{\frac{n}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} 2x^{\frac{2^{n/2}}{n}} = 0,$$
poiché $\frac{2^{n/2}}{n} \to \infty$ e $x \in (0,1)$. In conclusione, la serie proposta converge se $x \in (0,1)$, e diverge se $x \geqslant 1$.

(7.2.8) Stabiliremo per quali $x \in (0,+\infty)$ la serie è convergente, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consideriamo separatamente i seguenti sottocasi:

- *Se $\alpha < -1$ e $\beta \leqslant 0$, allora la serie converge $\forall x > 0$.* Infatti, in tal caso $x^{n^\beta} = \exp\left(n^\beta \log(x)\right) \to 1$ (poiché $n^\beta \to 0$ e $x \mapsto e^x$ è continua), e quindi esisterà un $\varepsilon \in (0,1)$ tale che se n è sufficientemente grande
$$n^\alpha x^{n^\beta} \leqslant (1+\varepsilon)n^\alpha \sim n^\alpha.$$
Notare che l'argomento funziona *senza bisogno di alcuna modifica* anche se $x = 1$.
- *Se $\alpha < -1$ e $\beta > 0$, allora la serie converge per $x \in (0,1]$ e diverge per $x > 1$.* Infatti, se $x > 1$, allora
$$n^\alpha x^{n^\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$
Se invece $x \in (0,1]$, allora $x^{n^\beta} \to 0$ per $n \to \infty$ se $x < 1$ oppure $x^{n^\beta} \equiv 1$, e quindi esisterà una costante $C > 0$ tale che per tutti gli n sufficientemente grandi
$$n^\alpha x^{n^\beta} \leqslant C n^\alpha,$$
Si ottiene dunque la convergenza della serie, poiché $\alpha < -1$.
- *Se $\alpha \geqslant -1$ e $\beta \leqslant 0$, allora la serie diverge $\forall x > 0$.* Infatti, se $x > 0$, poiché $n^\beta \to 0$, si avrà $x^{n^\beta} \to 1$ e quindi se n è sufficientemente grande
$$n^\alpha x^{n^\beta} \geqslant \frac{n^\alpha}{2}$$
Dunque la serie è divergente.
- *Se $\alpha \geqslant -1$ e $\beta > 0$, allora la serie converge per $x \in [0,1)$ e diverge altrimenti.* Infatti, se $x \geqslant 1$ si ha
$$n^\alpha x^{n^\beta} \geqslant n^\alpha.$$
Se invece $x \in [0,1)$, allora $n^\alpha x^{n^\beta} \leqslant x^{n^\beta}$ e, argomentando come nel punto (18) del precedente esercizio, si ottiene che la serie è convergente.

Soluzione Esercizio 7.3.

(7.3.1) L'insieme non è né aperto né chiuso, e il suo derivato è $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(7.3.2) È l'insieme vuoto (quindi è simultaneamente aperto e chiuso).

(7.3.3) Non è né aperto né chiuso, e il suo derivato è $\{0\}$.

(7.3.4) $\left\{x^2 + x < 2\right\} = (-1,2)$ è aperto, e il suo derivato è $[-1,2]$.

Soluzione Esercizio 7.4.

(7.4.1)

(a) d_1 non è una distanza su $\mathbb{R}$ (la (i) è violata: considerare $y = -x$), mentre lo è su $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$ (cfr. (7.4.2)).

(b) d_2 non è una distanza su nessuno dei tre insiemi indicati, poiché la disuguaglianza triangolare è sempre violata. Vediamo come dimostrarlo: espandendo la disuguaglianza $(x-z)^2 \leqslant (x-y)^2 + (y-z)^2$, si ottiene

$$-2xz \leqslant 2y^2 - 2(xy + yz).$$

Ora, se $X = \mathbb{R}$ o $X = (0, \infty)$, si vede che tale condizione è violata se (*ad esempio*) $x = 0, y = 1, z = 2$. In modo analogo, si vede che la triangolare non vale neanche in $(-\infty, 0)$.

(c) d_3 non è una distanza su $\mathbb{R}$ (cfr. il punto (7.4.1a)), ma lo è su $(0, \infty)$ e $(-\infty, 0)$, come si verifica facilmente.

(d) d_4 è una distanza su tutti gli insiemi indicati (cfr. (7.4.2)).

(7.4.2) Le (ii) e (iii), sono ovvie, mentre la (i) segue dall'iniettività di f.

Soluzione Esercizio 7.5.
"$\Rightarrow$". Se per assurdo $x \in O := \complement F$, allora esisterebbe un $\varepsilon > 0$ tale che $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset O$ (poiché O è aperto). Ma, poiché $x_n \to x$, $x_n \in O$ se n è sufficientemente grande, in contraddizione con l'ipotesi che $\{x_n\} \subset F$.
"$\Leftarrow$". Se per assurdo $O := \complement F$ non fosse aperto, allora esisterebbe un $x \in O$ tale che $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F \neq \varnothing$ per ogni $\varepsilon > 0$. In particolare, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap F$. Quindi $x_n \to x$ e $\{x_n\} \subset F$, ma $x \notin F$. Contraddizione.

Soluzione Esercizio 7.6.

(7.6.1) Si consideri

$$A_k := \bigcup_{j=0}^{k-1} \left\{ j + \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(7.6.2) Si consideri $A = \mathbb{N}$.

(7.6.3) Poniamo $B_r(x) := (x-r, x+r)$ (la *palla aperta di raggio* $r > 0$ *centrata in* x)

- "$\partial A \subset \overline{A} \backslash \mathring{A}$": se $x \in \partial A$, allora $B_r(x) \cap \complement A \neq \varnothing\ \forall r > 0$, i.e. $B_r(x) \not\subset A\ \forall r > 0$, quindi $x \notin \mathring{A}$. Da $B_r(x) \cap A \neq \varnothing\ \forall r > 0$, si trova una succesione $\{x_n\} \subset A \subset \overline{A}$ tale che $x_n \to x$, e quindi $x \in \overline{A}$ (cfr. Esercizio 7.5...). Quindi $x \in \overline{A} \backslash \mathring{A}$.
  "$\overline{A} \backslash \mathring{A} \subset \partial A$": se $x \in \overline{A} \backslash \mathring{A}$, allora $\forall r > 0\ B_r(x) \not\subset A$, i.e. $B_r(x) \cap \complement A \neq \varnothing\ \forall r > 0$. Sappiamo poi che $x \in \overline{A}$ se e solo se $B_r(x) \cap A \neq \varnothing\ \forall r > 0$.
- "$\partial A \subset \overline{A} \cap \overline{\complement A}$": se $x \in \partial A$, allora esistono due successioni $\left\{x_n^{(1)}\right\} \subset A$ e $\left\{x_n^{(2)}\right\} \subset \complement A$ tali che $x_n^{(i)} \to x\ \forall i \in \{1, 2\}$. Quindi $x \in \overline{A} \cap \overline{\complement A}$.
  "$\overline{A} \cap \overline{\complement A} \subset \partial A$": segue immediatamente dall'esercizio (6.5.2) del sesto tutorato.

(7.6.4) Abbiamo appena dimostrato che $\partial O = \overline{O} \cap \overline{\complement O}$. In particolare, $\partial O \subset \overline{\complement O}$, e $\overline{\complement O} = \complement O$ se e solo se O è aperto, i.e. $\partial O \subset \complement O$ se e solo se O è aperto, i.e. $\partial O \cap O = \varnothing$ se e solo se O è aperto.

(7.6.5) $\partial F = \overline{F} \cap \overline{\complement F}$. In particolare $\partial F \subset \overline{F}$ e $\overline{F} = F$ se e solo se F è chiuso. Quindi $\partial F \subset F$ se e solo se F è chiuso.

(7.6.6) A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \varnothing$, ed è chiuso se e solo se $\partial A \subset A$. Questo implica $\partial A = \varnothing$ se e solo se A è simultaneamente aperto e chiuso.

(7.6.7) Poiché ogni aperto contiene sia punti razionali che irrazionali, $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathring{\complement\mathbb{Q}} = \varnothing$. Poi, $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \backslash \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \backslash \varnothing = \mathbb{R}$.

(7.6.8) Sappiamo che A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \varnothing$. Quindi, $\partial A \subset \complement A$. Se si avesse un $x \in \mathring{\widehat{\partial \mathbb{A}}}$, esisterebbe un intorno U di x tutto contenuto in $\partial A \subset \complement A$. Ma allora, $U \cap A = \varnothing$, contro l'ipotesi che $x \in \partial A$. Ora, se A è un chiuso, il risultato è ancora vero: infatti

$$\partial\left(\complement A\right) = \overline{\complement A} \cap \overline{\complement\left(\complement A\right)} = \overline{\complement A} \cap \overline{A} = \partial A.$$

Il risultato non è però vero in generale: infatti, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Soluzione Esercizio 7.7. Se $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ è convergente, allora necessariamente $a_n \to 0$. In particolare, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < 1\ \forall n > N$. Quindi, $a_n^2 < a_n$ se $n > N$. Di conseguenza

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n > N} a_n^2 < \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n > N} a_n < +\infty.$$

Per mostrare che il viceversa non è vero, considerare $a_n = \frac{1}{n}$.

Soluzione Esercizio 7.8. Se $x > 1$, poiché $\sum_{j=0}^{n} x^j > x^n$, abbiamo che la serie è convergente. Se invece $x \leqslant 1$, $\sum_{j=0}^{n} x^j \leqslant \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1$. Perciò la serie è divergente.

Soluzione Esercizio 7.9. Ci sono due casi possibili: $\{a_n\}$ illimitata oppure $\{a_n\}$ limitata (i.e. convergente). Se $\{a_n\}$ è illimitata, allora $a_n \to \infty$, e quindi $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geqslant 1\ \forall n \geqslant N$. Se $n \geqslant N+1$, avremo

$$\frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} = \frac{a_n}{\left(\prod_{j=1}^{N-1}(1+a_j)\right)\left(\prod_{j=N}^{n-1}(1+a_j)\right)(1+a_n)} \leqslant c_N \frac{1}{2^{n-N}},$$

poiché $\frac{a_n}{1+a_n} < 1$; abbiamo poi posto $c_N := \left(\prod_{j=1}^{N-1}(1+a_j)\right)^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} + \sum_{n\geqslant N+1} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} < \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} + c_N \sum_{n\geqslant N+1} 2^{N-n} = \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} + c_N \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j} < +\infty.\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $\{a_n\}$ sia limitata. Allora, $a_n \to \ell > 0$. Di conseguenza, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ se $n > N$, i.e. $\frac{\ell}{2} < a_n < \frac{3}{2}\ell$. Allora, se $n > N$ si ha la stima

$$\frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} < \frac{3}{2} c_N \frac{\ell}{\prod_{j=N}^{n}\left(1+\frac{\ell}{2}\right)} < \frac{3}{2} c_N \frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{2}\right)^{n-N+1}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} + \sum_{n\geqslant N+1} \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} < \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} + \frac{3}{2}\ell c_N \sum_{n\geqslant N+1} \frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{2}\right)^{n-N+1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)} + \frac{3}{2}\ell c_N \sum_{j\geqslant 0} \left(1+\frac{\ell}{2}\right)^{-j} < +\infty.\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 7.10. Assumiamo che abbiate dimostrato, come suggerito, che

$$a_n = \frac{a_0}{2^n + (2^n - 1)a_0}, \qquad b_n = \frac{a_0}{1+na_0}.$$

Allora, $a_n < \frac{a_0}{2^n}$. Quindi $\sum a_n$ converge per il criterio del confronto. Per il criterio del confronto asintotico, si ha invece

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_0}{1+na_0} \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$