Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 4: Ripasso e introduzione alle serie numeriche.

Parte A

Soluzione Esercizio 4.1.

(4.1.1) Notiamo che il termine dominante al numeratore è n^3, mentre quello dominante al denominatore è n^{10}. L'intuizione è che questa serie dovrà comportarsi come $\sum(1/n^7)$, che converge. Dimostriamolo utilizzando il criterio del confronto asintotico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{2n^{10}+\cos(n)} n^7 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{2n^{10}\left(1+\frac{\cos(n)}{2n^{10}}\right)} n^7 = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n}{2n^{10}+\cos(n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} < \infty.$$

(4.1.2)

$$\sqrt{n^2+2}-n = \left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}.$$

Applichiamo il criterio del confronto asintotico con la serie armonica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\left[1+\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}\right]} n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{n\sqrt{1+(2/n^2)}}{n}} = 1.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

(4.1.3) Poiché $\frac{\log(n)}{n} \to 0$, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\log(n)}{n} \leq 1$ per ogni $n > N$. Quindi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\log(n)}{n^3} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\log(n)}{n^3} + \sum_{n>N}\frac{\log(n)}{n^3} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\frac{\log(n)}{n^3}}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{n>N}\frac{1}{n^2}}_{<\infty}.$$

La serie risulta dunque essere convergente.

(4.1.4) Si ha

$$\frac{((n+1))^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Dunque la serie converge per il criterio del rapporto.

(4.1.5) Dalla disuguaglianza di Stirling semplificata (cfr. Tutorato 1) e dal fatto che $n! < n^n$, abbiamo

$$\frac{n^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{n^n(n!)^2}{(2n)!} > \frac{n^n\frac{n^{2n}}{e^{2n}}}{2^{2n}n^{2n}} = \left(\frac{n}{4e^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Quindi la serie è sicuramente divergente.

(4.1.6) Poiché $n! < n^n$,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n}.$$

Per il criterio del confronto, la serie è divergente.

(4.1.7) Riscriviamo l'argomento della tangente
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$
Sfruttiamo ora il confronto asintotico con $1/[(n+1)(n+2)]$:
$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)(n+1)(n+2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=1.$$
Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$
cioè la serie è convergente.

(4.1.8) Sicuramente $\left|\cos(n^{451})\right|\le 1<\frac{\pi}{2}$, e quindi $\left|\sin\left(\cos(n^{451})\right)\right|\le\sin(1)<1$. Per il criterio del confronto, la serie è dunque convergente.

(4.1.9) Si noti che $[e^n]\le 3^n$. Applicando il criterio della radice,
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{(\log(n))^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\log(n)}=0,$$
quindi la serie è convergente.

(4.1.10) La serie è divergente: infatti, dal confronto asintotico
$$e^{\frac{1}{n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)=\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\ge\frac{1}{n}.$$

(4.1.11) Dal criterio della radice
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\log(2)^n}{5n+28}}=\log(2)<1,$$
quindi la serie è convergente.

(4.1.12) Razionalizzando, si ottiene
$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{n}}=\frac{3}{n^3\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{n^3}}\right)}.$$
Quindi la serie converge.

Soluzione Esercizio 4.2.

(4.2.1) La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\sin(x)-1|^n}{n}}=|\sin(x)-1|.$$
$|\sin(x)-1|<1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ (i.e., per $\sin(x)\neq 0$). Se invece $x=k\pi$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$, la serie diventa una serie armonica, che diverge. In conclusione
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(x)-1|^n}{n}<+\infty\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}.$$

(4.2.2) Essendo $x^{2n}=(-x)^{2n}$, possiamo discutere senza perdita di generalità solo gli $x\ge 0$. Se $0\le x\le 1$, la serie diverge: infatti, in tal caso $1+x^{2n}\le 2$, e quindi $\left(1+x^{2n}\right)^{-1}\ge\frac{1}{2}$. Se invece $x>1$, allora
$$\frac{1}{1+x^{2n}}<\frac{1}{x^{2n}}=\Bigg(\underbrace{x^{-2}}_{<1}\Bigg)^n,$$
e quindi la serie è convergente. Riassumendo, la serie converge se $|x|>1$, e diverge altrimenti.

(4.2.3) Se $|x| \geq 1$, allora $\log(1+|x|^n) \geq \log(2)$, quindi $\sum_{n\geq 0} n \log(1+|x|^n) \geq \log(2) \sum_{n\geq 0} n = +\infty$. Se invece $|x| < 1$, dal criterio del confronto asintotico $\sum n \log(1+|x|^n) \sim \sum n\,|x|^n$, e quindi la serie converge per il criterio della radice.

(4.2.4) Andiamo a provare che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+y^n} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \text{ o } x < y.$$

"$\Leftarrow$": Poiché $\frac{x^n}{1+y^n} < x^n$ $(1+y^n > 1\dots)$, la serie è convergente se $x < 1$. D'altra parte, $\frac{x^n}{1+y^n} < \left(\frac{x}{y}\right)^n$: quindi la serie è convergente se $x < y$.
"$\Rightarrow$": Se $x \geq \max\{1, y\}$, allora $1+y^n \leq 2x^n$, e quindi $\frac{x^n}{1+y^n} \geq \frac{x^n}{2x^n} = \frac{1}{2}$. La serie risulta dunque essere divergente.

Soluzione Esercizio 4.3.

(4.3.1) La base induttiva è chiaramente verificata. Supponiamo quindi di aver dimostrato l'ipotesi fino a $n \geq 1$, e proviamola per $n+1$. Si ha

$$(n+1)\left((n+1)^2+5\right) = (n+1)\left((n^2+5)+(2n+1)\right) = n(n^2+5)+n(2n+1)+n^2+5+2n+1 = n(n^2+5)+3(n^2+n+2).$$

Ora, $6|n(n^2+5)$ per l'ipotesi induttiva, e n^2+n+2 è pari (infatti $2|n^2+n$, cfr. Esercizio (2.1.2) del secondo tutorato), quindi $6|3(n^2+n+2)$. Questo conclude la dimostrazione.

(4.3.2) Per $n = 1$ l'ipotesi è ovviamente verificata. Andiamo allora a provare il passo induttivo:

$$\prod_{j=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \frac{(n+1)^n}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)^n}{n!}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)^n(n+2)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^n} =$$
$$= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soluzione Esercizio 4.4. Proviamo che $n! = n!!(n-1)!!$. Ovviamente, $0! = 1 = 0!!(-1)!!$, quindi la base induttiva è provata. Per il passo induttivo,

$$(n+1)! = (n+1)n! = (n+1)n!!(n-1)!! = (n+1)!!n!!.$$

Andiamo ora a provare che $(2n)!! = 2^n n!$. La base induttiva è di verifica immediata, mentre per il passo induttivo notare che

$$(2n+2)!! = (2n+2)(2n)!! = 2(n+1)2^n n! = 2^{n+1}(n+1)!.$$

Soluzione Esercizio 4.5.

(4.5.1) 0,

(4.5.2) 1,

(4.5.3) $+\infty$,

(4.5.4) $-\infty$.

Soluzione Esercizio 4.6.

(4.6.1) $\inf(A) = \min(A) = \frac{6}{7}$, $\sup(A) = 12$.

(4.6.2) $\inf(B) = 0$, $\sup(B) = +\infty$.

Part B

Solution of exercise 4.7. It's not difficult to convince yourself that $\#\mathfrak{A} \cap [0, 10^n) = 9^n - 1$[‡], so $\#\left(\mathfrak{A} \cap [10^{n-1}, 10^n)\right) = 8 \cdot 9^{n-1}$. Then

$$\sum_{a \in \mathfrak{A}} \frac{1}{a} = \sum_{n \geq 1} \sum_{a \in \mathfrak{A} \cap [10^{n-1}, 10^n)} \frac{1}{a} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{n-1}} \#(\mathfrak{A} \cap [10^{n-1}, 10^n)) \leq 8 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 80 < +\infty.$$

Solution of exercise 4.8.

(4.8.1) Otherwise, one would have $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$, that is $a_n \to 0$. Hence, there would exists an $N \in \mathbb{N}$ such that $a_n \leq 1$ $\forall n \geq N$. So

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq 2a_n,$$

that is a contradiction.

(4.8.2) Without loss of generality, $a_n > 0$ for all n. Then $\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$. Thus, the comparison test implies that the series converges.

(4.8.3) If $a_n = \frac{1}{n}$, then $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+n a_n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} = +\infty$. On the other hand, consider the sequence

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{if } n \in \mathfrak{A}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\mathfrak{A}$ is the set defined in exercise 4.7. Clearly $\sum a_n = +\infty$. But

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+n a_n} = \sum_{n \in \mathfrak{A}} \frac{1}{1+n} < \sum_{n \in \mathfrak{A}} \frac{1}{n} < \infty.$$

(4.8.4) If $a_n = \frac{1}{n}$, then $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2+1} = +\infty$. Now, if $\mathfrak{A}$ is as before, consider the sequence

$$a_n := \begin{cases} n & \text{if } n \in \mathfrak{A}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It's evident that $\sum_{n \geq 1} a_n = +\infty$. But

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum_{n \in \mathfrak{A}} \frac{n}{1+n^2} \sim \sum_{n \in \mathfrak{A}} \frac{1}{n} < +\infty.$$

Solution of exercise 4.9. The convergence follows at once noting that $n^2 + 2n\cos(x) - \sin^2(x) \geq n^2 - 2n - 1$. So, let us evaluate the sum of the series. We first consider the case $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, that is $\cos(x) = 0$. In such case, we have $S(x) = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n^2-1}\right)$. It's easy to verify, for example with mathematical induction (for, $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ could be useful), that

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right), \quad \forall N \in \mathbb{N} \cap [2, \infty).$$

Hence, if $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $S(x) = \frac{3}{4}$. Consider now $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, that is $\cos(x) \neq 0$. First, note that

$$n^2 + 2n\cos(x) - \sin^2(x) = (n + \cos(x))^2 - 1 = (n + \cos(x) - 1)(n + \cos(x) + 1).$$

Then

$$\frac{1}{n^2 + 2n\cos(x) - \sin^2(x)} = \frac{1}{(n + \cos(x) - 1)(n + \cos(x) + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n + \cos(x) - 1} - \frac{1}{n + \cos(x) + 1}\right)$$

[‡] For instance, one can adopt the following *combinatorial argument*: if $a = \sum_{i=0}^{N} a_i 10^i$, the possible choices for every a_i are $9 = \#([0, 9] \cap \mathbb{N} \setminus \{5\})$, so a can be choosen in $9^n - 1$ different ways (the -1 is to remove 0, that is counted as one of the 9^n possible choices). Since you have to deal with `IN110` too, it could be nice to test the just proved result (up to 10^n, for some suitable $n \in \mathbb{N}$) writing down a program in `C` language which counts the naturals between $(0, 10^n)$ that doesn't contain the digit 5 (or any other digit)...

Let $a_n(x) := \frac{1}{n+\cos(x)-1}$. Thus, for all $n \in \mathbb{N}$, from the properties of telescopic sums, we have

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2 + 2n\cos(x) - \sin^2(x)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(a_n(x) - a_{n+2}(x)) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(a_n(x) - a_{n+1}(x) + a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x)) = \\ &= \frac{1}{2}\left(a_0(x) - a_N(x) + a_1(x) - a_{N+2}(x)\right).\end{aligned}$$

Since $a_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} 0$, we deduce

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(a_0(x) + a_1(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos(x)-1} + \frac{1}{\cos(x)}\right).$$

Solution of exercise 4.10. Let $S := \sum_{n\geq 1} a_n$ and $s_m := \sum_{n\geq m} a_n$. We shall define inductevely an increasing sequence $\{N_k\}_{k\geq 0}$ satisfying

$$\sum_{n\geq N_k+1} a_n \leq 4^{-k} S. \tag{$\star_k$}$$

Define $N_0 := 0$, which clearly satisfies $(\star_0)$. Suppose now that all the terms up to N_{k-1} have been defined, with N_j satisfying $(\star_j)$ for $j \in [0, k-1] \cap \mathbb{N}$. We're going to define N_k. Since the series converges, there esists an $M_k > 0$ such that

$$\sum_{n\geq m+1} a_n = |S - s_m| < 4^{-k} S \quad \forall m \geq M_k.$$

So, it will be sufficent to choose any $N_k > \max\{M_k, N_{k-1}\}$. Let

$$b_n := 2^k, \qquad \text{dove } k \text{ è tale che } n \in [N_k + 1, N_{k+1}].$$

Clearly, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Since $a_n, b_n \geq 0$, we can write

$$\sum_{n\geq 1} a_n b_n = \sum_{k\geq 0} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_n \leq \sum_{k\geq 0} 2^k \sum_{n\geq N_k+1} a_n \leq S \sum_{k\geq 0} 2^{-k} = 2S.$$