Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 4: Ripasso e introduzione alle serie numeriche.

Parte A

Esercizio 4.1. Studiare la convergenza delle seguenti serie

(4.1.1) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+2n}{2n^{10}+\cos(n)}$, (4.1.7) $\sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$,

(4.1.2) $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$, (4.1.8) $\sum_{n\geq 1} \left|\sin\left(\cos(n^{451})\right)\right|^n$,

(4.1.3) $\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n)}{n^3}$, (4.1.9) $\sum_{n\geq 2} \frac{[e^n]}{(\log(n))^n}$,

(4.1.4) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (4.1.10) $\sum_{n\geq 1} \left(e^{\frac{1}{n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

(4.1.5) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$, (4.1.11) $\sum_{n\geq 0} \frac{(\log(2))^n}{5n+28}$,

(4.1.6) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, (4.1.12) $\sum_{n\geq 2} \frac{1-\sqrt{1-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{n}}$.

Esercizio 4.2. Studiare la convergenza delle seguenti serie, al variare dei parametri $x, y \in \mathbb{R}$:

(4.2.1) $\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin(x)-1|^n}{n}$, (4.2.3) $\sum_{n\geq 0} n\log(1+|x|^n)$.

(4.2.2) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^{2n}}$, (4.2.4) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+y^n}$ $(x, y > 0)$.

Esercizio 4.3. Dimostrare per induzione che le seguenti relazioni valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(4.3.1) $6 | n(n^2+5)$, (4.3.2) $\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Esercizio 4.4. Si definisca il *semifattoriale* di $n \in \mathbb{Z}\cap[-1,\infty)$ per ricorrenza come $(-1)!! := 1 =: 0!!$ e $n!! := n(n-2)!!$ per $n \geq 1$. Dimostrare per induzione che $n! = n!!(n-1)!!$ e $(2n)!! = 2^n n!$.

Esercizio 4.5. Calcolare (se esistono) i limiti per $n \to \infty$ delle seguenti successioni ($[x]$ è la parte intera di $x \in \mathbb{R}$):

(4.5.1) $\frac{5^{n/3}+42\log(n)}{3^n-\frac{13}{53}n}$, (4.5.3) $\sqrt[2n]{n!}$,

(4.5.2) $\left[\left|\cos(\sqrt{37}n^{900})\right|\right]!$, (4.5.4) $\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-n+\sin(n)}$.

Esercizio 4.6. Determinare estremo inferiore e superiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e stabilire se si tratta di minimi o massimi:

(4.6.1) $A := \left\{\frac{12n^2}{n^2+13}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(4.6.2) $B := \left\{n^3+\frac{4}{m+5}\,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$.

Part B

Exercise 4.7. Let $\mathfrak{A}$ be the set of natural numbers that do not contain the digit 5 in their decimal expansion, i.e.

$$\mathfrak{A} := \left\{\sum_{i=0}^{N} a_i 10^i \,\middle|\, N \in \mathbb{N},\ a_i \in ([0,9]\cap\mathbb{N})\setminus\{5\}\right\}\setminus\{0\}.$$

Show that $\sum_{a\in\mathfrak{A}} \frac{1}{a} < \infty$, namely that the set $\mathfrak{A}$ defines a convergent subseries of the harmonic series.

Exercise 4.8. Let $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ be such that $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$. Prove that

(4.8.1) $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n} = +\infty$,

(4.8.2) $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n^2 a_n} < +\infty$,

(4.8.3) $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n a_n}$ can either converge or diverge,

(4.8.4) $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ can either converge or diverge.

Hint: exercise 4.7 could be useful for (4.8.3) $\div$ (4.8.4).

Exercise 4.9. Prove that the following series converges, and evaluate its sum as the parameter x ranges in $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$:

$$S(x) := \sum_{n\in\mathcal{N}(x)} \frac{1}{n^2+2n\cos(x)-\sin^2(x)},$$

where $\mathcal{N}(x) := \begin{cases} \mathbb{N}\cap[2,+\infty) & \text{if } x \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}, \\ \mathbb{N}\cup\{0\} & \text{otherwise.} \end{cases}$

Exercise 4.10. Let $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ be such that $\sum_{n\geq 1} a_n < \infty$. Prove that $\exists\, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ and $\sum_{n\geq 1} a_n b_n < \infty$.