Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 3: Preparazione al I esonero

Soluzione Esercizio 3.1.

(3.1.1) $0.\underbrace{9\cdots9}_{n \text{ volte}} = 1 - \frac{1}{10^n} \to 1$;

(3.1.2) $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \to \frac{1}{2}$;

(3.1.3) Poiché $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (cfr. Tutorato 1), $\frac{n!}{\sqrt{n^n}} > \frac{\sqrt{n^n}}{e^n} \to +\infty$. Infatti, fissato $M > 1$, si ha $n^n > Me^{2n}$ se $n\log(n) > n(2 + \log(M))$, e questo avviene non appena $n > Me^2$;

(3.1.4) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} = \frac{6}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}} \to 0$;

(3.1.5) Ricordando che $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, otteniamo $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} \to 0$;

(3.1.6) 0;

(3.1.7) Scrivendo $n^k \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{n^{n-k}} \leq k! \frac{k+1}{n} \to 0$;

(3.1.8) $\sqrt[n]{(1-\cos(n))3^n + 7^n} = 7\sqrt[n]{(1-\cos(n))\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1}$. Ora, $\left|(1-\cos(n))\left(\frac{3}{7}\right)^n\right| \leq 2\left(\frac{3}{7}\right)^n \to 0$, quindi $\sqrt[n]{(1-\cos(n))3^n + 7^n} \to 7$;

(3.1.9) $\frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=1}^n k\right) - \frac{n}{2} = -\frac{n}{2(n+2)} \to -\frac{1}{2}$;

(3.1.10) $\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+12}} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}k = -\frac{n}{\sqrt[4]{n^4+12}} \to -1$, poiché $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}k = -n$ (induzione);

(3.1.11) $\frac{1}{27}$;

(3.1.12) $\left|\frac{(-1)^n \sin(n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$;

(3.1.13) 0;

(3.1.14) $-\infty$;

(3.1.15) $\frac{n!}{e^{n^3+n}} \sum_{k=0}^n e^{-k} \leq \frac{n!}{e^{n^3+n}} \frac{1}{1-e^{-1}} < \frac{n!}{n^n} \frac{1}{1-e^{-1}} \to 0$, poich'e $\frac{n!}{n^n} \to 0$, per il punto (3.1.7).

Soluzione Esercizio 3.3.

$$\frac{\sqrt{n}-1}{2n^2+\sqrt{157}} < 10^{-10} \Leftrightarrow \sqrt{n} < 1 + 10^{-10}(2n^2 + \sqrt{157}).$$

L'ultima disuguaglianza è implicata (*ad esempio*) da $\sqrt{n} < 2n^2 10^{-10}$, che è come richiedere $n > \sqrt[3]{\frac{1}{4\cdot 10^{-20}}}$.

Soluzione Esercizio 3.4.

(3.4.1) Se $\alpha > 1$, si ha dai limiti notevoli che $a_n \to +\infty$. Se $|\alpha| \leq 1$, allora $a_n \to 0$ (poiché $\alpha^n + (-1)^n$ è limitata). Se invece $\alpha < -1$, allora

$$a_n = \frac{(-1)^n((-\alpha)^n + 1)}{n\log(n)}.$$

Quindi $|a_n| \to \infty$. Essendo in tal caso a_n a segni alterni, la successione non converge per $\alpha < -1$.

(3.4.2) Razionalizzando si ottiene

$$b_n = \frac{2n^3}{(n^\alpha + n)n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}.$$

Otteniamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}.$$

(3.4.3) Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \log(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -1 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}.$$

Vediamo subito che

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha \in [-1, 0). \end{cases}$$

Per $\alpha < -1$, dobbiamo discutere una forma indeterminata del tipo $-\infty + \infty$. Ma poiché n^t diverge più velocemnte di $\log(n)$, abbiamo che se $\alpha < -1$ allora $c_n \to +\infty$.

Soluzione Esercizio 3.6. Se $a_n \to a$, dalla disuguaglianza triangolare $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \to 0$. Il viceversa non è vero: si consideri ad esempio $a_n = (-1)^n$.

Soluzione Esercizio 3.7.

(3.7.1) Poiché $a_n \to \ell$, $\forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0 \,:\, |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \geq N$. Possiamo inoltre scegliere un $n_0 > 0$ tale che

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_\mu}{n_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \frac{\mu\ell}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3},$$

notando che $a_1 + \cdots + a_\mu$ è una somma finita, una volta fissati ε e μ. Allora, dato $\varepsilon > 0$, sia $n > \mu$ dove $\mu := \max\{N, n_0\}$ e N, n_0 sono quelli definiti sopra. Abbiamo

$$\begin{aligned} |s_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (a_j - \ell)\right| = \left|\frac{(a_1-\ell) + (a_2-\ell) + \cdots + (a_n - \ell)}{n}\right| = \\ &= \left|\frac{a_1 + \cdots + a_\mu}{n} + \frac{(a_\mu - \ell) + \cdots + (a_n - \ell)}{n} - \frac{\mu\ell}{n}\right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n}\sum_{j=\mu}^n |a_j - \ell| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n-\mu}\sum_{j=\mu}^n |a_j - \ell| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{n-\mu}{n-\mu}\cdot\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Cioè, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mu > 0 \,:\, |s_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall n > \mu$, che non è altro che la definizione di $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell$.

(3.7.2) Vediamo che

$$\begin{aligned} s_{n+1} > s_n \;&\Leftrightarrow\; s_{n+1} - s_n > 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \\ &= \frac{na_1 + \cdots + na_n + na_{n+1} - na_1 - \cdots - na_n - a_1 - \cdots - a_n}{n\,(n+1)} > 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; \frac{na_{n+1} - a_1 - \cdots - a_n}{n\,(n+1)} > 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; a_{n+1} > \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} =: s_n. \end{aligned}$$

Ma

$$s_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} < \frac{a_n + \cdots + a_n}{n} = \frac{na_n}{n} = a_n < a_{n+1},$$

i.e. la tesi.