Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 3: Preparazione al I esonero

Esercizio 3.1. Determinare (se esistono) i limiti per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

(3.1.1) $0.\underbrace{9\cdots9}_{n \text{ volte}}$,

(3.1.2) $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}$,

(3.1.3) $\frac{n!}{\sqrt{n^n}}$

(3.1.4) $\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}$,

(3.1.5) $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$,

(3.1.6) $\frac{2^n+n^5}{3^n-n^2}$,

(3.1.7) $n^k \frac{n!}{n^n}$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$,

(3.1.8) $\sqrt[n]{(1-\cos(n))3^n+7^n}$,

(3.1.9) $\frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=1}^n k\right)-\frac{n}{2}$,

(3.1.10) $\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+12}}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k$,

(3.1.11) $\frac{n+n^2+n^{\frac{1}{n}}+3^n}{n^2 2^n+3^{n+3}}$,

(3.1.12) $\frac{(-1)^n \sin(n)}{\sqrt{n}}$,

(3.1.13) $\log(n^3)\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(3.1.14) $\frac{2^n-\left(\sqrt{5}\right)^n}{n^{20}+\left(\frac{4}{3}\right)^n}$,

(3.1.15) $\frac{n!}{e^{n^3+n}}\sum_{k=0}^n e^{-k}$.

Esercizio 3.2. Calcolare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi, specificando se si tratta di minimi o massimi, rispettivamente:

(3.2.1) $A_1 := \left\{-2^n+2n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(3.2.2) $A_2 := \left\{e^{-\frac{1}{n}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(3.2.3) $A_3 := \left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+n}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(3.2.4) $A_4 := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{(2x-1)(x+1)}{x} \geq 0\right\}$,

(3.2.5) $A_5 := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, [x]=8\right\}$ (1),

(3.2.6) $A_6 := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x\,|x| < x^2\right\} \cup [-1,1)$,

(3.2.7) $A_7 := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x}{|x|}(1-x) \leq 1+x\right\}$,

(3.2.8) $A_8 := \left\{\cos(n\pi)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$,

(3.2.9) $A_9 := \left\{x^2-x \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

Esercizio 3.3. Sia $\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2n^2+\sqrt{157}}$. Trovare un $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n-\ell| < 10^{-10}$ $\forall n \geq N$.

Esercizio 3.4. Calcolare i limiti (per $n \to \infty$) delle seguenti successioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

(3.4.1) $a_n := \frac{\alpha^n+(-1)^n}{n\log(n)}$,

(3.4.2) $b_n := \frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha+n}$,

(3.4.3) $c_n := \log(n^\alpha)+\frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

Esercizio 3.5. Provare per induzione che

(3.5.1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(3.5.2) $\sqrt{(n+2)^{n+2}} \geq \sqrt{(n+2)!}$,

(3.5.3) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$.

Esercizio 3.6. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione. Provare che ($\{a_n\}$ converge $\Rightarrow \{|a_n|\}$ converge). È vero il viceversa?

Esercizio 3.7. Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione. Si definisca

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j.$$

(3.7.1) Provare che se $a_n \to \ell$, allora $s_n \to \ell$, dove $\ell \in \mathbb{R}$;

(3.7.2) Provare che se a_n è monotona crescente, allora lo è anche s_n.

---

(1) Si ricorda che $[x]$ è la *parte intera di* x, cioè $[x] := \sup\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n \leq x\right\}$.