Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 2: Principio di Induzione, Estremo inferiore e superiore

---

Soluzione Esercizio 2.2.

(2.2.1) $\sup A_1 = +\infty$, $\inf A_1 = \min A = 0$;

(2.2.2) $\sup A_2 = \max A_2 = 1$, $\inf A_2 = \min A_2 = -1$ (prendere, ad esempio, $n = 4$ e $n = 12$);

(2.2.3) $\sup A_3 = +\infty$, $\inf A_3 = -\infty$;

(2.2.4) Notare che $A_4 = (-\infty, -\sqrt{3}]$, quindi $\inf A_4 = -\infty$ e $\sup A_4 = \max A_4 = -\sqrt{3}$;

(2.2.5) $\sup A_5 = \frac{3}{2}$, $\inf A_5 = -1$ (no max/min);

(2.2.6) $A_6 = \mathbb{R}$. Questo segue da $(x-y)^2 \geq 0 \ldots$;

(2.2.7) Notare che $xy = (\sqrt{\tau}x)\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)$ per ogni $\tau > 0$. Segue subito che anche $A_7 = \mathbb{R}$;

(2.2.8) $\sup A_8 = \frac{1}{2}$ e $\inf A_8 = \min A_8 = -\frac{1}{2}$. È chiaro che $\frac{1}{2}$ è maggiorante (per (2.2.6), $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \ldots$). Per provare che $\frac{1}{2}$ è sup (ma non max, poiché $x < y$), fissato $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, si scelgano (*ad esempio*) $\overline{x} := 1$ e $\overline{y} := 1 + \delta$, con $\delta = \delta(\varepsilon)$ da determinare. Vogliamo che

$$\frac{1+\delta}{2 + 2\delta + \delta^2} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Con manipolazioni elementari, si vede che la precedente condizione è equivalente a

$$\delta^2 - \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}\delta - \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon} < 0.$$

Ma ciò è come richiedere

$$\delta \in (0,\infty) \cap (\delta_-, \delta_+) = (0, \delta_+), \quad \delta_\pm = \frac{2}{1-2\varepsilon}\left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right)$$

Quindi si può scegliere (*ad esempio*) $\delta = \frac{\delta_+}{2}$. In modo analogo si prova che $-\frac{1}{2}$ è minorate, e si vede subito che è minimo, scegliendo (*ad esempio*) $x = -y = -1$.

(2.2.9) Si vede subito che $\left\{\frac{3n-2}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente. Quindi $\inf A_9 = \min A_9 = \frac{1}{2}$ e $\sup A_9 = \frac{3}{2}$ (che non è max).

Soluzione Esercizio 2.3. Si verifica facilmente che $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, cioè la somma dei primi n interi.

Soluzione Esercizio 2.4.

(2.4.1) Si ha

$$cx^{n+2} = a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n = cc_1 x^{n+1} + cc_2 x^n,$$

semplificando (supponendo $x \neq 0$), otteniamo che $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$.

(2.4.2) Calcolo diretto.

(2.4.3) Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = \alpha u + \beta v. \end{cases}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{a_0 v - a_1}{v-u}, \qquad \beta = \frac{a_1 - a_0 u}{v-u}.$$

(2.4.4) Consideriamo

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n. \end{cases}$$

Il *polinomio caratteristico* $p(x)$ sarà $p(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. Dalle condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 1$, si ha

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = 3\alpha - \beta. \end{cases}$$

Quindi $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$. La successione di Fibonacci si tratta in modo analogo.

Soluzione Esercizio 2.5. Chiaramente, $\sup A = \sqrt[3]{2}$. Per verificare che $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, si può procedere esattamente come nel caso ben noto di $\sqrt{2}$. Proviamo ora che $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} = \left\{ r + s\sqrt{2} \middle| r, s \in \mathbb{Q} \right\}$: se esistessero $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che $\sqrt[3]{2} = r + s\sqrt{2}$, allora

$$2 = q^3 + 3\sqrt{2}q^2 s + 6qs^2 + 2\sqrt{2}s^3.$$

Cioè (poiché necessariamente $3q^2 + 2s^2 \neq 0$)

$$\sqrt{2} = \frac{2 - q^3 - 6qs^2}{3q^2 + 2s^2} \in \mathbb{Q},$$

che è assurdo.

Soluzione Esercizio 2.6. Entrambe le domande hanno risposta negativa: si consideri infatti l'insieme $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$.

Soluzione Esercizio 2.7. Se $k = 0$, si ha è $y_0 \leq c^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}} y_0$, i.e. $c^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}} > 0$, che è ovvio. Abbiamo quindi che la base dell'induzione è vera. Assumiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino a k, e proviamola per $k+1$:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &\leq cb^k y_k^{1+\varepsilon} \leq \\ &\leq cb^k \left[c^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon^2} - \frac{k}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^k} \right]^{1+\varepsilon} = \\ &= c^{1 + \frac{(1+\varepsilon)^{k+1} - 1 - \varepsilon}{\varepsilon}} b^{k + \frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon^2} - \frac{k}{\varepsilon} - k} y_0^{(1+\varepsilon)^{k+1}} = \\ &= c^{\frac{(1+\varepsilon)^{k+1} - 1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^{k+1} - 1}{\varepsilon^2} - \frac{k+1}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^{k+1}}. \end{aligned}$$