Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 2: Ancora sul principio di induzione, estremo inferiore e superiore

Esercizio 2.1. Utilizzare il principio di induzione per provare le seguenti relazioni:

(2.1.1) $\cos(n\pi) = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$,

(2.1.2) $n + n^2$ è pari $\forall n \in \mathbb{N}$,

(2.1.3) $n^n < 3^n n! \ \forall n \in \mathbb{N}$,

(2.1.4) $n^3 > 2n - 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$,

(2.1.5) $\prod_{j=1}^{n} (2j-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \ \forall n \in \mathbb{N}$,

(2.1.6) $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.2. Determinare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi e discutere se si tratta di minimi o massimi:

(2.2.1) $A_1 := \left\{ n^2 - n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$,

(2.2.2) $A_2 := \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

(2.2.3) $A_3 := \left\{ n^3 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$,

(2.2.4) $A_4 := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x^2 - 3} \leq 1 - x \right\}$,

(2.2.5) $A_5 := \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

(2.2.6) $A_6 := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \ \ \forall y \in \mathbb{R} \right\}$,

(2.2.7) $A_7 := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, xy \leq \frac{1}{2}\left(\tau x^2 + \frac{y^2}{\tau}\right) \ \ \forall y \in \mathbb{R}, \forall \tau > 0 \right\}$,

(2.2.8) $A_8 := \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \,\middle|\, x < y,\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$,

(2.2.9) $A_9 := \left\{ \frac{3n-2}{2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Esercizio 2.3. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} a_1 := 1 \\ a_n := n + a_{n-1} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Determinare una *formula chiusa* per tale successione (cioè tale da permettere di calcolare il termine n^{o} senza aver calcolato i precedenti).

Esercizio 2.4. Un'*equazione alle differenze omogenea del secondo ordine* è una successione definita per ricorrenza della forma

$$\begin{cases} a_0, a_1 \text{ assegnati } (\textit{condizioni iniziali}), \\ a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{$\star$}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$. Il problema è quello di riuscire a ricavare una formula chiusa per a_n. A tale scopo, si seguano i passi seguenti.

(2.4.1) Si cerchi una soluzione particolare della forma $a_n = cx^n$, $c, x \in \mathbb{R}$, e si osservi che se quest'ultima esiste allora x soddisfa $p(x) := x^2 - c_1 x - c_2 = 0$.

(2.4.2) Si supponga che $p(x) = (x-u)(x-v)$, con $u, v \in \mathbb{R}$, $u \neq v$. Provare che in tal caso $a_n = \alpha u^n + \beta v^n$ risolve l'equazione alle differenze ($\star$) per $n \geq 2$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(2.4.3) Trovare (se esistono) i valori α, β soddisfacenti le condizioni iniziali assegnate.

(2.4.4) Applicare il metodo ottenuto dai punti (2.4.1)÷(2.4.3) per risolvere le seguenti equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n,\ n \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ n \geq 0. \end{cases}$$

(2.4.5) Quale forma assumerà a_n (cfr. il punto (2.4.2)) nel caso in cui $u = v$?

Girare, prego

Esercizio 2.5. Provare che l'insieme $A := \left\{ q \in \mathbb{Q} \middle| q^3 < 2 \right\}$ non ha sup in $\mathbb{Q}$ (chi se la sente, provi che l'estremo superiore non appartiene a $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\,\mathbb{Q}$).

Esercizio 2.6. Un reale x si dice *algebrico* se esiste un polinomio a coefficienti razionali $P \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $P(x) = 0$ (ad esempio, tutti i razionali sono algebrici, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ sono algebrici; e, π invece non lo sono[(1)]). Rispondere alle seguenti domande:

(2.6.1) L'estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ è razionale?

(2.6.2) L'estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ è algebrico?

Esercizio 2.7. Sia $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$) una successione a termini non negativi, tale che $\exists c, \varepsilon > 0$, $b > 1$ con

$$y_{k+1} \leq c b^k y_k^{1+\varepsilon} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Provare per induzione che

$$y_k \leq c^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon^2} - \frac{k}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[(1)] Si ricordi che $e := \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$.