

II Esonero di AM110 - 20/12/2012

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tema 1 [5 punti] Discutere la convergenza di successioni monotone ed il loro legame con le serie a termini positivi.

Tema 2 [5 punti] Definire il concetto di massimo limite per una successione, fornendo una caratterizzazione di tale quantità.

Tema 3 [5 punti] Definire la proprietà di compattezza per insiemi, classificando gli insiemi compatti in \mathbb{R} .

Esercizio 1 [3 punti] Determinare i punti di accumulazione dell'insieme

$$A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup \left\{(-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

discutendo se A risulta chiuso oppure no.

Esercizio 2 [3 punti] Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 3 [3 punti] Calcolare, se esiste, il limite della successione a_n definita per ricorrenza da $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$, $a_0 \geq 0$.

Esercizio 4 [6 punti] Discutere la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro x nell'insieme specificato in parentesi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n^x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln n}} \quad (x > 1)$$