II Esonero di AM110 - 20/12/2012 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Poiché $\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = -1$ e $\limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = 1$, si ottiene che $DA = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, e quindi A risulta un insieme chiuso.

Esercizio 2 Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{-\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 3 Osserviamo che la successione a_n cresce:

$$a_{n+1}-a_n = a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} = (a_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

Quindi $l = \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in [0,+\infty]$ esiste e, se $l<+\infty$, l risolve $l = l^2+\frac{1}{4}$, ossia $l=\frac{1}{2}$. Da $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} < (>) \frac{1}{2}$ se $a_n < (>) \frac{1}{2}$, otteniamo per induzione che $a_n < (>) \frac{1}{2}$ se $a_0 < (>) \frac{1}{2}$. Se $0 \leq a_0 < \frac{1}{2}$, otteniamo $l \leq \frac{1}{2}$ e quindi $l=\frac{1}{2}$, mentre, se $a_0 > \frac{1}{2}$, otteniamo $l > \frac{1}{2}$ e quindi $l=+\infty$. Infine, se $a_0 = \frac{1}{2}$, abbiamo che $a_n = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $l = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 Per la prima serie, abbiamo convergenza assoluta per $x \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin\frac{x}{n}}{n^x}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^{x+1}} < +\infty.$$

Per $x<0$ abbiamo invece

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{|x|}{n}}{n^x} \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sin\frac{|x|}{n}}{n^x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|x|}{n^{x+1}} = +\infty,$$

ove $\sin t \geq \frac{t}{2}$ per $t \in [0,\eta]$ con $\eta>0$ piccolo, e $N \geq 1$ soddisfa $\frac{|x|}{N} \leq \eta$. Per la seconda serie, usiamo il criterio di condensazione di Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln x)^{n\ln 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2}{(\ln x)^{\ln 2}}]^n,$$

ottenendo convergenza per $x > e^e$, ossia $2 < (\ln x)^{\ln 2}$, e divergenza per $1 < x \leq e^e$.