

Appello X di AM110 - 4/9/2013

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tema 1 [5 punti] Dare la definizione di estremo superiore e fornirne una caratterizzazione.

Tema 2 [5 punti] Provare il criterio di Cauchy sulla completezza di \mathbb{R} e discutere la condizione necessaria per la convergenza di una serie. Mostrare con un esempio che tale condizione non è sufficiente.

Tema 3 [5 punti] Definire l'uniforme continuità e discutere l'uniforme continuità di funzioni continue su insiemi compatti.

Esercizio 1 [3 punti] Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 [3 punti] Determinare il limite della seguente successione a_n definita per ricorrenza come:

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad a_0 = \alpha > 0.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\log \frac{n+1}{n} - \log(1 - \sin \frac{1}{n})}{1 + n \sin \frac{1}{n}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - 1}} - 1 \right].$$

Esercizio 4 [3 punti] Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, discutere l'uniforme continuità o meno in $[0, +\infty)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & x = 0 \\ \frac{1}{x} \left[\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - 1}} - 1 \right] & x \in (0, 1) \\ \beta x & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$