Appello B di AM110 - 6/2/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Basta osservare che per $x < 0$ la funzione data equivale a $-e^x$, che risulta continua su $[-1,0]$ e quindi anche uniformemente continua su $[-1,0)$.

Esercizio 2 La serie non converge per $x = 0$. Per $x \neq 0$ abbiamo che per n grande

$$|\frac{x+n}{1+n^3x^2}| \leq \frac{2n}{n^3x^2} = \frac{2}{n^2x^2}.$$

Dal criterio del confronto e dalla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, otteniamo la convergenza della serie per $x \neq 0$.

Esercizio 3 Se $a_n > \sqrt{3}$, abbiamo che $a_{n+1} > \sqrt{3}$, essendo quest'ultima equivalente a $\frac{(a_n-\sqrt{3})^2}{a_n} > 0$. Poiché $a_0 > \sqrt{3}$, per induzione otteniamo che $a_n > \sqrt{3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che equivale ad avere $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dalla decrescenza di a_n segue che esiste finito $l = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq \sqrt{3}$. Poiché l deve soddisfare la condizione limite $l = \frac{1}{2}(l + \frac{3}{l})$, otteniamo $l = \sqrt{3}$.

Esercizio 4 Abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log n)^2+\log n^2}}}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\log n\sqrt{1+\frac{2}{\log n}}}}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\log 2\sqrt{1+\frac{2}{\log n}}}}{n^2+1} = 0$$

in vista di $\log 2 < 2$ e

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(\pi-\pi\cos x)}{x\sin x} = \pi \lim_{x\to0} \frac{\sin(\pi(1-\cos x))}{\pi(1-\cos x)} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}.$$