AM110 - ESERCITAZIONI XIII - XIV

26 - 27 NOVEMBRE 2012

Teorema (Criterio di Leibniz). Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ tale che:

i) $a_n \geq 0$ per ogni n;
ii) $a_n \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$;
iii) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n.

Allora, la serie è convergente.

(Per la dimostrazione – discussa durante l'esercitazione – si veda ad esempio il libro di testo)

Osservazioni:

- È sufficiente che le proprietà (i-iii) valgano definitivamente, cioè per $n \geq N_0$ per un opportuno N_0;
- se la serie è della forma $\sum_{n=M}^{\infty}(-1)^{n+k} a_n$ (con $k, M \in \mathbb{Z}$), il criterio continua a rimanere valido;
- mostreremo con dei controesempi (si veda l'esercizio 2) che se il criterio non è soddisfatto (in particolare se la proprietà (iii) non è verificata), allora non si può concludere nulla. In altre parole, la serie può convergere o non convergere e bisogna utilizzare altri strumenti per stabilirlo.

Esercizio svolto 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos(\pi n)}{n^3+3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}[2\arctan(n+1)-\pi]\cdot\cos((n+1)\pi)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$

Soluzione.

a) Osserviamo che la condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.
La serie non converge assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \frac{1}{n}$ soddisfa le condizioni (i-iii), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < +\infty.$$

b) La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n} = 0$. La serie non converge assolutamente (ricordiamo che $\sin\frac{1}{n}$ ha lo stesso comportamento asintotico di $\frac{1}{n}$, in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \sin\frac{1}{n}$ soddisfa le condizioni (i-iii) (infatti $\sin x$ è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e di conseguenza $\sin\frac{1}{n}$ è decrescente), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n} < +\infty.$$

c) Cominciamo con l'osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos(\pi n)}{n^3+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+3}.$$

La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+3} = 0$. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+3}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+3} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{n}}} \leq \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} < +\infty,
\end{aligned}$$

quindi la serie converge assolutamente.

d) La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = 0$. Cominciamo con l'osservare che:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \log\left(\frac{(n-2)+3}{n-2}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right).
\end{aligned}$$

La serie non converge assolutamente (ricordiamo che $\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ si comporta asintoticamente come $\frac{3}{n-2}$, in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)}{\frac{3}{n-2}} = 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n-2} = +\infty.$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ soddisfa le condizioni (i-iii) (infatti $\log x$ è crescente e di conseguenza $\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ è decrescente), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) < +\infty.$$

e) La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3} = 0$. La serie non converge assolutamente. Infatti (ricordando che $\log n \le \sqrt{n}$ per $n \ge 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+3\log n} \ge \\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt{n}} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\sqrt{n}} = +\infty.
\end{aligned}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3}$ soddisfa chiaramente le condizioni (i-iii), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3} < +\infty.$$

f) La condizione necessaria è soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty}[2\arctan(n+1)-\pi]\cdot\cos((n+1)\pi) = 0.$$

Cominciamo con l'osservare che:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}[2\arctan(n+1)-\pi]\cdot\cos((n+1)\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}[2\arctan(n+1)-\pi] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\pi-2\arctan(n+1)] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la seguente identità trigonometrica:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi, la serie non converge assolutamente.
Infatti, usando il fatto che $\arctan\frac{1}{n+1}$ si comporta asintoticamente come

$\frac{1}{n+1}$ (si ricordi che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$) si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n 2 \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = +\infty.\end{aligned}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ soddisfa le condizioni (i-iii) (infatti $\arctan x$ è crescente e di conseguenza $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è decrescente), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2 \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) < +\infty.$$

g) Cominciamo col riscrivere la serie in una forma più utile:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n(n+1)+1}{n+1}\pi\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).\end{aligned}$$

La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = 0.$$

Per quanto già visto nell'esercizio 1 b), la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio svolto 2. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

Soluzione.

a) La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} = 0.$$

La serie non converge assolutamente (osservare che $n+(-1)^{n+1}>0$ per ogni $n\geq 1$):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+(-1)^{n+1}}\geq\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.\end{aligned}$$

Studiamo la convergenza semplice. Denominiamo $a_n=\frac{1}{n+(-1)^{n+1}}$. La serie in esame è della forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Le ipotesi del criterio di Leibniz non sono però soddisfatte. Infatti:

– $a_n>0$ per ogni $n\geq 1$;
– $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$;
– ma a_n NON è decrescente. Infatti:

$$a_{2n}=\frac{1}{2n+(-1)^{2n+1}}=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}=\frac{1}{(2n-1)+(-1)^{(2n-1)+1}}=a_{2n-1}.$$

Non possiamo dedurre niente dal criterio di Leibniz. Osserviamo che per $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} &= \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\cdot\frac{n-(-1)^{n+1}}{n-(-1)^{n+1}}=\\ &= (-1)^n\frac{n-(-1)^{n+1}}{n^2-1}=\\ &= (-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\,.\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}=\\ &= -\frac{1}{2}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left((-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)=\\ &= -\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}<+\infty\end{aligned}$$

Infatti:

– la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ converge assolutamente;
– la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$ converge per il criterio di Leibniz. Sia infatti $b_n=\frac{n}{n^2-1}$. Chiaramente $b_n>0$, $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$. Inoltre, $b_n\geq b_{n+1}$ per ogni n. Infatti:

$$\begin{aligned}b_n\geq b_{n+1} &\iff \frac{n}{n^2-1}\geq\frac{(n+1)}{(n+1)^2-1}\\ &\iff \frac{1}{n-\frac{1}{n}}\geq\frac{1}{(n+1)-\frac{1}{n+1}}\\ &\iff n-\frac{1}{n}\leq(n+1)-\frac{1}{n+1}\\ &\iff \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\leq 1\,,\end{aligned}$$

che è chiaramente vera ($\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0$).

Concludendo, la serie converge semplicemente (nonostante il criterio di Leibniz NON sia soddisfatto), ma non converge assolutamente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=0.$$

La serie non converge assolutamente (osservare che $\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\geq 0$ per ogni $n\geq 1$):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\geq\\ &\geq \sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)+\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)=\\ &= \sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=+\infty,\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è usato che $n\geq 2\sqrt{n}$ per $n\geq 4$.

Studiamo la convergenza semplice. Denominiamo $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. La serie in esame è della forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ma le ipotesi del criterio di Leibniz non sono soddisfatte (in particolare a_n non è decrescente!). Dimostriamo che la serie non converge assolutamente.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)=\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.\end{aligned}$$

Infatti:
– la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ è divergente;
– la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibniz. Sia infatti $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Chiaramente $b_n>0$, $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ e b_n è decrescente.

Concludendo, la serie diverge positivamente.