AM110 - ESERCITAZIONI IX - X

5 - 8 NOVEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Si consideri la seguente successione:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{for } n \geq 0. \end{cases}$$

Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste e calcolarlo.

Soluzione. Cominciamo col dimostrare che la successione è monotona crescente, *i.e.* $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamolo per induzione; la base dell'induzione è verificata: $a_1 = \sqrt{2} \geq 1 = a_0$. Supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n+1$:

$$a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} \geq \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}.$$

Dimostriamo ora che la successione è limitata dall'alto, ad esempio: $a_n \leq 2$ per ogni n. Dimostriamolo per induzione. Per $n = 0$ è vero; supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n+1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{3} < 2.$$

Quindi, la successione $\{a_n\}_n$ ammette limite finito; sia $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. In particolare:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{for } n \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = \sqrt{1+\ell}.$$

Ne segue che:

$$\ell = \sqrt{1+\ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell^2 - \ell - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Dal momento che la successione è positiva, possiamo dedurre che $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esercizio svolto 2. Si considerino due successioni di numeri reali $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ tali che:

- $a_1 > b_1 > 0$,
- $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$,
- $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$.

Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n$ esistono e calcolarli.

Soluzione. Cominciamo col dimostrare alcune proprietà di queste successioni.

a) $a_n > b_n > 0$ per ogni n. Innanzitutto, si verifica facilmente (per induzione) che a_n e b_n sono sempre positivi. Dimostriamo per induzione che $a_n > b_n$ per ogni n. La base dell'induzione ($n = 1$) è vera per ipotesi. Supponiamo che tale proprietà sia vera per n e dimostriamolo per $n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} > b_{n+1} &\iff \frac{a_n + b_n}{2} > \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\ &\iff (a_n + b_n)^2 > 4a_n b_n \\ &\iff a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n > 4a_n b_n \\ &\iff a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n > 0 \\ &\iff (a_n - b_n)^2 > 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera per ipotesi induttiva.

b) a_n è monotona decrescente. Usando il fatto che $b_n < a_n$ per ogni n, otteniamo infatti:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

c) In maniera simile si dimostra che b_n è monotona crescente. Usando il fatto che $b_n < a_n$ per ogni n, infatti, otteniamo:

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} > \frac{2a_n b_n}{a_n + a_n} = b_n.$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che per ogni n:

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > 0.$$

Possiamo concludere che:

- Esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n =: \alpha \in \mathbb{R}$. Infatti a_n è monotona decrescente e limitata dal basso da - per esempio - b_1.
- Esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n =: \beta \in \mathbb{R}$. Infatti b_n è monotona crescente e limitata dall'alto da - per esempio - a_1.

In particolare:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \iff \qquad \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad \iff \qquad \alpha = \beta,$$

quindi i due limiti coincidono. Considerando l'altra relazione (ed usando che $\alpha = \beta$) non otteniamo purtroppo maggiori informazioni:

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \qquad \iff \qquad \beta = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \qquad \iff \qquad \beta = \beta.$$

Vediamo com'è possibile ottenere maggiori informazioni sul valore del limite. Osserviamo infatti che per ogni n si ha:

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n;$$

quindi il prodotto è costante e di conseguenza $a_n b_n = a_1 b_1$ per ogni n. Possiamo quindi dedurre che:

$$\alpha^2 = \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = a_1 b_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Concludendo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Esercizio aggiuntivo 1. Si consideri la seguente successione:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + 2 & \text{for } \alpha \geq 0 \\ a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n+1} & \text{for } n \geq 1. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

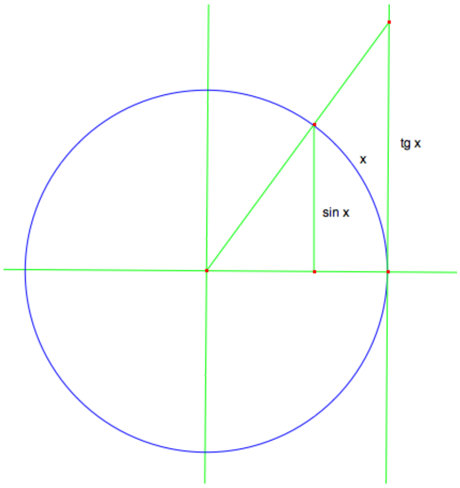
Esercizio svolto 3. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali (diversi da zero) tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione. Innanzitutto, osservare che se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, allora:

$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$

(vedere figura qui sotto).



Di conseguenza:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Osserviamo che $\cos x$ e $\frac{\sin x}{x}$ sono entrambi funzioni pari, quindi la disuguaglianza di sopra si può estendere ai valori di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Riassumendo:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \forall\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ x \neq 0.$$

Sia ora $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali che tende a 0; quindi, esiste N_0 tale che $|a_n| < \frac{\pi}{2}$ per $n > N_0$. Di conseguenza:

$$\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1 \qquad \forall\, n > N_0.$$

Usando il teorema del confronto possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Per dimostrare il secondo limite, basta osservare che:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1+\cos a_n}{1+\cos a_n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\cos a_n} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio svolto 4 (Teoremi di Cesaro). Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali.

i) Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = L.$$

ii) Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n) = L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = L.$$

iii) Se $a_n > 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, dimostrare che:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = L.$$

iv) Se $a_n > 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, dimostrare che:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Soluzione. Dimostremo tutte le proprietà nel caso $L\in\mathbb{R}$. L'estensione al caso $L=\pm\infty$ è lasciata come (semplice) esercizio.

i) Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$; fissato $\varepsilon>0$, esisterà N_ε tale che:
$$L-\varepsilon \le a_n \le L+\varepsilon \qquad \forall\, n > N_\varepsilon.$$
Quindi per $n > N_\varepsilon$ si ha:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k + \frac{n-N_\varepsilon}{n}(L-\varepsilon) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k + \frac{n-N_\varepsilon}{n}(L+\varepsilon).$$
Osserviamo che $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k = 0$, quindi:
$$L-\varepsilon \le \liminf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \limsup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \le L+\varepsilon.$$
Questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon>0$, quindi si può concludere che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = L. \qquad \square$$

ii) Considerare la successione $b_n := a_{n+1}-a_n$ ed applicare il punto (*i*).

iii) Considerare la successione $b_n := \log a_n \longrightarrow \log L$ (con la convenzione che $\log 0 = -\infty$). Usando (*i*) si ottiene:
$$\log L \longleftarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log a_k = \log \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$
e di conseguenza:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = L.$$

iv) Considerare la successione $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ed applicare il punto (*iii*).

Esercizio svolto 5. Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\ldots+n^{1/n}}{n}$.

ii) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$.

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

iv) $\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n!}$.

Soluzione.

i) Applicare Esercizio 4 (*i*) con $a_n = n^{1/n}$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \ldots + n^{1/n}}{n} = 1.$$

ii) Applicare Esercizio 4 (*iii*) con $a_n = n$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

iii) Osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

Applicare Esercizio 4 (*iv*) con $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,\end{aligned}$$

e di conseguenza (esercizio 4 (*iv*)) possiamo concludere che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

iv) Osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log n! = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log k.$$

Applicando Esercizio 4 (*i*)) con $a_n = \log n$ possiamo concludere che:

$$\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Esercizio svolto 6. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali. Verificare che

$$a_n \longrightarrow \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{2n} \longrightarrow \ell \quad \text{e} \quad a_{2n+1} \longrightarrow \ell.$$

Soluzione. [$\Longrightarrow$] Segue dalla definizione di limite che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > N_\varepsilon.$$

In particolare:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |a_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > \frac{N_\varepsilon}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \ell$$

ed in maniera simile

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |a_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > \frac{N_\varepsilon}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \ell.$$

$\square$

[$\Longleftarrow$] Segue dalla definizione di limite che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |a_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > N_\varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |a_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > M_\varepsilon.$$

Scegliamo $K_\varepsilon := \max\{2N_\varepsilon, 2M_\varepsilon + 1\}$. Si verifica facilmente che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > K_\varepsilon$$

e di conseguenza:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

$\square$

Esercizio aggiuntivo 2. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali.

a) Se a_n è monotona e $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \ell$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

b) Se a_{2n} e a_{2n+1} sono entrambe monotone e $\lim_{n\to+\infty}(a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste.

c) Se a_{2n} e a_{2n+1} sono entrambe monotone e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste.